BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	8

Exercice 1

Conjecturer une limite à la calculatrice

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{7x + 4}{2x}$.

1.

Calculer $f(10)$, $f(100)$ et $f(1\,000)$.

INDICE

Outil : la calculatrice ; remplace x par chaque valeur dans l'expression de f.

2.

Quelle limite de f en $+\infty$ peut-on conjecturer ?

INDICE

Outil : regarde de quel réel les trois valeurs se rapprochent quand x grandit.

3.

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2}{x}$, puis justifier la conjecture.

INDICE

Outil : sépare la fraction en deux ; ensuite, une limite de référence en l'infini et la limite d'une somme.

Exercice 2

Puissances et racine carrée en l'infini

1.

Donner, sans calcul, $\lim_{x\to-\infty} x^5$, $\lim_{x\to-\infty} x^6$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : les limites des fonctions de référence en l'infini ; en $-\infty$, regarde si l'exposant est pair ou impair.

2.

Calculer $\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^5\right)$.

INDICE

Outil : la limite d'un produit, avec la règle des signes.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque terme, puis la limite d'une somme.

Exercice 3

Près de zéro, des deux côtés

1.

Donner $\lim_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3}$ et $\lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ a-t-elle une limite en 0 ?

INDICE

Outil : les limites des fonctions de référence en 0 ; l'exposant 3 est impair.

2.

Même question pour la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$.

INDICE

Outil : la même propriété ; regarde l'exposant.

3.

Calculer $\lim_{x\to0^+} \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x\to0} \left(x^2+5\right)$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{-2}{\sqrt{x}} = -2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, puis la limite d'un produit.

Exercice 4

La valeur en un réel

1.

Calculer $\lim_{x \to -2} \left(x^3 + 4x^2 - x + 5\right)$.

INDICE

Outil : la limite en un réel d'un polynôme ; remplace x par -2.

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 1}{x + 4}$.

INDICE

Outil : contrôle d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 3.

3.

Calculer $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4x}$.

INDICE

Outil : même méthode ; attention au signe du dénominateur en 1.

Exercice 5

Trois opérations directes

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(5 - \dfrac{3}{x}\right)(\sqrt{x} + 2)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque facteur, puis la limite d'un produit.

2.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{4}{x}\right)$.

INDICE

Outil : la limite d'une somme ; en $-\infty$, l'exposant 2 est pair.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^3 + 1}$.

INDICE

Outil : la limite d'un quotient dont le dénominateur devient très grand.

Exercice 6

Garder le terme de plus haut degré

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(4x^3 - 9x^2 + 2\right)$.

INDICE

Outil : repère la forme indéterminée, puis les limites en l'infini d'un polynôme.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x + 8}{6x^2 + 5}$.

INDICE

Outil : garde le terme de plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur, puis simplifie.

3.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 7}{x^2 + 1}$.

INDICE

Outil : même méthode ; simplifie $\dfrac{2x}{x^2}$ avant de conclure.

Exercice 7

Un dénominateur qui s'annule en 4

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$.

1.

Calculer la limite en 4 du numérateur $2x + 3$.

INDICE

Outil : la valeur en 4 d'un polynôme.

2.

Étudier le signe de $x - 4$ de part et d'autre de 4.

INDICE

Outil : une expression du premier degré change de signe en la valeur qui l'annule.

3.

En déduire $\lim_{x \to 4^+} g(x)$ et $\lim_{x \to 4^-} g(x)$. La fonction g a-t-elle une limite en 4 ?

INDICE

Outil : la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0, avec la règle des signes.

Exercice 8

Le coût moyen d'une tonne d'olives

Une coopérative agricole imaginaire conditionne des olives ; les chiffres sont inventés. Pour x tonnes conditionnées, avec $x > 0$, le coût total, en dirhams, est $C(x) = 400x + 1\,500$. Le coût moyen d'une tonne est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1.

Calculer $M(10)$ et $M(100)$.

INDICE

Outil : calcule d'abord $C(10)$ et $C(100)$.

2.

Vérifier que $M(x) = 400 + \dfrac{1\,500}{x}$, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} M(x)$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(x)$ par x ; puis la limite d'une somme.

3.

Interpréter ce résultat pour la coopérative.

INDICE

Outil : que représente le nombre 400 dans l'expression du coût total ?