BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	8

Exercice 1

Conjecturer une limite à la calculatrice

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{7x+4}{2x}$.

1.

Calculer $f(10)$, $f(100)$ et $f(1\,000)$.

INDICE

Outil : la calculatrice ; remplace x par chaque valeur dans l'expression de f.

CORRIGÉ

On remplace x par chaque valeur dans l'expression de f :

$$f(10) = \frac{74}{20} = 3{,}7$$
$$f(100) = \frac{704}{200} = 3{,}52$$
$$f(1\,000) = \frac{7\,004}{2\,000} = 3{,}502$$

Conclusion. $f(10) = 3{,}7$, $f(100) = 3{,}52$ et $f(1\,000) = 3{,}502$.

2.

Quelle limite de f en $+\infty$ peut-on conjecturer ?

INDICE

Outil : regarde de quel réel les trois valeurs se rapprochent quand x grandit.

CORRIGÉ

L'écart entre ces valeurs et $3{,}5$ vaut $0{,}2$, puis $0{,}02$, puis $0{,}002$: il diminue quand x grandit.

Conclusion. On conjecture que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{7}{2}.$$

3.

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2}{x}$, puis justifier la conjecture.

INDICE

Outil : sépare la fraction en deux ; ensuite, une limite de référence en l'infini et la limite d'une somme.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $x > 0$. On sépare la fraction en deux :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{7x}{2x} + \frac{4}{2x} \\ &= \frac{7}{2} + \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Limite. D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par produit par 2, $\dfrac{2}{x}$ tend aussi vers 0, puis, par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{7}{2}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2}{x}$, et la conjecture de la question 2 est justifiée.

Exercice 2

Puissances et racine carrée en l'infini

1.

Donner, sans calcul, $\lim_{x\to-\infty} x^5$, $\lim_{x\to-\infty} x^6$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : les limites des fonctions de référence en l'infini ; en $-\infty$, regarde si l'exposant est pair ou impair.

CORRIGÉ

On lit chaque résultat dans les limites des fonctions de référence en l'infini.

- L'exposant 5 est impair : $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.
- L'exposant 6 est pair : $\lim_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.
- En $+\infty$, l'inverse d'une puissance et l'inverse de la racine carrée tendent vers 0 : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

2.

Calculer $\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^5\right)$.

INDICE

Outil : la limite d'un produit, avec la règle des signes.

CORRIGÉ

D'après la question 1, x^5 tend vers $-\infty$ en $-\infty$. On multiplie par -3, réel strictement négatif : d'après la limite d'un produit et la règle des signes, la limite change de signe.

Conclusion. On obtient

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^5\right) = +\infty.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque terme, puis la limite d'une somme.

CORRIGÉ

En $+\infty$, d'après les limites de référence, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0.

Conclusion. Un terme de limite $+\infty$ ajouté à un terme de limite réelle donne, par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Exercice 3

Près de zéro, des deux côtés

1.

Donner $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ a-t-elle une limite en 0 ?

INDICE

Outil : les limites des fonctions de référence en 0 ; l'exposant 3 est impair.

CORRIGÉ

À droite. D'après les limites de référence en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty.$$

À gauche. L'exposant 3 est impair : pour $x < 0$, $x^3 < 0$, et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 0 sont différentes : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ n'a pas de limite en 0.

2.

Même question pour la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$.

INDICE

Outil : la même propriété ; regarde l'exposant.

CORRIGÉ

À droite. D'après les limites de référence en 0, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$.

À gauche. L'exposant 6 est pair : pour $x < 0$, $x^6 > 0$, et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$.

Conclusion. Les deux côtés donnent la même limite : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ a une limite en 0, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = +\infty.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x\to 0} \left(x^2+5\right)$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{-2}{\sqrt{x}} = -2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, puis la limite d'un produit.

CORRIGÉ

Premier calcul. Pour $x > 0$, $\dfrac{-2}{\sqrt{x}} = -2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. D'après les limites de référence en 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ à droite en 0. Par produit par -2, réel strictement négatif :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Second calcul. D'après les limites de référence en 0, x^2 tend vers 0. Par somme :

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2+5\right) = 5.$$

Conclusion. La première limite vaut $-\infty$ et la seconde vaut 5.

Exercice 4

La valeur en un réel

1.

Calculer $\lim_{x \to -2} \left(x^3 + 4x^2 - x + 5\right)$.

INDICE

Outil : la limite en un réel d'un polynôme ; remplace x par -2.

CORRIGÉ

La fonction $x \mapsto x^3 + 4x^2 - x + 5$ est un polynôme : sa limite en -2 s'obtient en remplaçant x par -2 (limite en un réel d'un polynôme).

$$\begin{aligned}&(-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2) + 5\\ &= -8 + 16 + 2 + 5\\ &= 15.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x \to -2} \left(x^3 + 4x^2 - x + 5\right) = 15$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 1}{x + 4}$.

INDICE

Outil : contrôle d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 3.

CORRIGÉ

Dénominateur. En 3, $x + 4$ vaut 7, qui n'est pas nul.

Limite. On peut donc remplacer x par 3, ce que justifie la limite en un réel d'une fonction rationnelle :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 1}{x + 4} &= \frac{2 \times 9 - 1}{7}\\ &= \frac{17}{7}.\end{aligned}$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $\dfrac{17}{7}$.

3.

Calculer $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4x}$.

INDICE

Outil : même méthode ; attention au signe du dénominateur en 1.

CORRIGÉ

Dénominateur. En 1, $x^2 - 4x$ vaut $1 - 4 = -3$, qui n'est pas nul.

Limite. Comme à la question 2, on remplace x par 1 (limite en un réel d'une fonction rationnelle) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4x} &= \frac{1 + 3}{-3} \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $-\dfrac{4}{3}$.

Exercice 5

Trois opérations directes

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{3}{x}\right)(\sqrt{x}+2)$.

INDICE

Outil : la limite de chaque facteur, puis la limite d'un produit.

CORRIGÉ

Premier facteur. D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 ; par produit, $\dfrac{3}{x}$ aussi. Par somme, $5-\dfrac{3}{x}$ tend vers 5.

Second facteur. D'après les limites de référence, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$; par somme, $\sqrt{x}+2$ aussi.

Conclusion. Le premier facteur tend vers $5>0$ et le second vers $+\infty$. D'après la limite d'un produit et la règle des signes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{3}{x}\right)(\sqrt{x}+2) = +\infty.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)$.

INDICE

Outil : la limite d'une somme ; en $-\infty$, l'exposant 2 est pair.

CORRIGÉ

Premier terme. En $-\infty$, l'exposant 2 est pair : d'après les limites de référence, x^2 tend vers $+\infty$.

Second terme. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$; par produit, $\dfrac{4}{x}$ aussi.

Conclusion. Par somme :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\frac{4}{x}\right)=+\infty.$$

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^3 + 1}$.

INDICE

Outil : la limite d'un quotient dont le dénominateur devient très grand.

CORRIGÉ

Dénominateur. D'après les limites de référence en l'infini, x^3 tend vers $+\infty$ en $+\infty$; par somme, $x^3 + 1$ aussi.

Conclusion. Le numérateur est constant, égal à 6, et le dénominateur tend vers $+\infty$. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^3 + 1} = 0.$$

Exercice 6

Garder le terme de plus haut degré

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(4x^3-9x^2+2\right)$.

INDICE

Outil : repère la forme indéterminée, puis les limites en l'infini d'un polynôme.

CORRIGÉ

Forme. En $+\infty$, $4x^3$ tend vers $+\infty$ et $-9x^2$ vers $-\infty$: la somme conduit à la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$.

Terme de plus haut degré. D'après les limites en l'infini d'un polynôme, la limite est celle de son terme de plus haut degré, $4x^3$. Par produit par $4>0$, $4x^3$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. On obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^3-9x^2+2\right)=+\infty.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+8}{6x^2+5}$.

INDICE

Outil : garde le terme de plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur, puis simplifie.

CORRIGÉ

Forme. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est la forme indéterminée $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Termes de plus haut degré. D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, on ne garde, en haut et en bas, que le terme de plus haut degré. Pour $x\neq 0$:

$$\frac{3x^2}{6x^2}=\frac{1}{2}.$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $\dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+8}{6x^2+5}=\frac{1}{2}.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+7}{x^2+1}$.

INDICE

Outil : même méthode ; simplifie $\dfrac{2x}{x^2}$ avant de conclure.

CORRIGÉ

Termes de plus haut degré. D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, il suffit de diviser le terme de plus haut degré du numérateur par celui du dénominateur. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

Limite de ce quotient. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$; par produit par 2, $\dfrac{2}{x}$ aussi.

Conclusion. On obtient

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+7}{x^2+1} = 0.$$

Exercice 7

Un dénominateur qui s'annule en 4

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$.

1.

Calculer la limite en 4 du numérateur $2x+3$.

INDICE

Outil : la valeur en 4 d'un polynôme.

CORRIGÉ

On remplace x par 4 dans le numérateur ; c'est la limite en un réel d'un polynôme qui l'autorise :

$$2 \times 4 + 3 = 11.$$

Conclusion. Quand x tend vers 4, le numérateur $2x+3$ tend vers 11, réel non nul.

2.

Étudier le signe de $x-4$ de part et d'autre de 4.

INDICE

Outil : une expression du premier degré change de signe en la valeur qui l'annule.

CORRIGÉ

L'expression $x-4$ s'annule en 4 :

- pour $x > 4$, $x-4 > 0$;
- pour $x < 4$, $x-4 < 0$.

De plus, d'après la limite en un réel d'un polynôme, $x-4$ tend vers 0 quand x tend vers 4.

Conclusion. Le dénominateur est positif à droite de 4, négatif à gauche, et tend vers 0 en 4.

3.

En déduire $\lim_{x \to 4^+} g(x)$ et $\lim_{x \to 4^-} g(x)$. La fonction g a-t-elle une limite en 4 ?

INDICE

Outil : la limite d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0, avec la règle des signes.

CORRIGÉ

Le numérateur tend vers $11 > 0$ et le dénominateur vers 0. Le signe du dénominateur décide alors du signe de la limite (limite d'un quotient, règle des signes) :

- à droite de 4, $x-4 > 0$, donc $\lim_{x \to 4^+} g(x) = +\infty$;
- à gauche de 4, $x-4 < 0$, donc $\lim_{x \to 4^-} g(x) = -\infty$.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 4 sont différentes : g n'a pas de limite en 4.

Exercice 8

Le coût moyen d'une tonne d'olives

Une coopérative agricole imaginaire conditionne des olives ; les chiffres sont inventés. Pour x tonnes conditionnées, avec $x > 0$, le coût total, en dirhams, est $C(x) = 400x + 1\,500$. Le coût moyen d'une tonne est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1.

Calculer $M(10)$ et $M(100)$.

INDICE

Outil : calcule d'abord $C(10)$ et $C(100)$.

CORRIGÉ

Coûts totaux. $C(10) = 4\,000 + 1\,500 = 5\,500$ et $C(100) = 40\,000 + 1\,500 = 41\,500$.

Coûts moyens.

$$M(10) = \frac{5\,500}{10} = 550$$
$$M(100) = \frac{41\,500}{100} = 415$$

Conclusion. $M(10) = 550$ et $M(100) = 415$: le coût moyen d'une tonne baisse quand la quantité augmente.

2.

Vérifier que $M(x) = 400 + \dfrac{1\,500}{x}$, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} M(x)$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(x)$ par x ; puis la limite d'une somme.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $x > 0$. On divise chaque terme de $C(x)$ par x :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{400x}{x} + \frac{1\,500}{x} \\ &= 400 + \frac{1\,500}{x}. \end{aligned}$$

Limite. D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 ; par produit, $\dfrac{1\,500}{x}$ aussi. Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} M(x) = 400.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $M(x) = 400 + \dfrac{1\,500}{x}$, et la limite de M en $+\infty$ vaut 400.

3.

Interpréter ce résultat pour la coopérative.

INDICE

Outil : que représente le nombre 400 dans l'expression du coût total ?

CORRIGÉ

Le nombre 400 est le coût de chaque tonne supplémentaire. Les frais fixes de $1\,500$ DH, eux, se répartissent sur un nombre de tonnes de plus en plus grand, et leur part dans le coût moyen devient très petite.

Conclusion. Pour une très grande quantité conditionnée, le coût moyen d'une tonne se rapproche de 400 DH.