BURHAN

Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/cours

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 2

Que devient le coût moyen ?

Imagine un petit atelier de couture, inventé pour ce chapitre. Il fabrique des tabliers.

Chaque mois, il paie $1\,800$ DH de frais fixes : loyer, électricité, entretien des machines. Chaque tablier coûte en plus 45 DH de tissu et de fil. Ces chiffres sont fictifs.

Pour x tabliers, le coût total vaut, en DH :

$$C(x) = 1\,800 + 45x.$$

Le **coût moyen** d'un tablier est le coût total divisé par le nombre de tabliers. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{C(x)}{x} \\ &= 45 + \frac{1\,800}{x}. \end{aligned}$$

Pour 10 tabliers, $M(10) = 45 + 180 = 225$ DH. Pour 100 tabliers, $M(100) = 45 + 18 = 63$ DH.

Plus l'atelier produit, plus les frais fixes se partagent.

> **Devine : Une prédiction**
>
> L'atelier reçoit une très grosse commande. Que devient le coût moyen $M(x)$ quand x devient très grand ?
>
> **A.** Il se rapproche de 0 DH.
>
> **Faux.**
> Chaque tablier coûte au moins 45 DH de tissu et de fil : le coût moyen ne descend jamais sous 45 DH.
>
> **B.** Il se rapproche de 45 DH.
>
> **Juste.**
> Juste : la part des frais fixes, $\frac{1\,800}{x}$, devient minuscule.
>
> **C.** Il devient de plus en plus grand.
>
> **Faux.**
> Le coût total grandit, mais il est partagé entre plus de tabliers : le coût moyen baisse.
>
> **D.** Il reste égal à 63 DH.
>
> **Faux.**
> 63 DH est le coût moyen pour 100 tabliers ; pour $1\,000$ tabliers, il vaut $46{,}8$ DH.

Correction

La part des frais fixes par tablier vaut $\frac{1\,800}{x}$. Pour $x = 1\,000$, elle vaut $1{,}8$ DH ; pour $x = 100\,000$, elle vaut $0{,}018$ DH.

Le coût moyen se rapproche donc de 45 DH, le prix du tissu et du fil d'un tablier. Il reste toujours un peu au-dessus.

Ce « se rapproche de 45 » est une **limite**.

Dans ce chapitre, tu apprends à reconnaître une limite sur un tableau de valeurs, à la calculatrice ou sur une courbe. Tu apprends ensuite à la calculer avec des règles, en l'infini et près d'un réel.

Tu emploies les fonctions de référence et la factorisation que tu as vues au tronc commun. À la fin, tu sauras dire ce que devient un coût moyen, un prix ou une recette.

Limite en l'infini

Observer le coût moyen

Reprends le coût moyen M de l'atelier : pour $x > 0$, $M(x) = 45 + \frac{1\,800}{x}$. Voici quelques valeurs exactes.

x	10	100	$1\,000$	$10\,000$	$100\,000$
$M(x)$	225	63	$46{,}8$	$45{,}18$	$45{,}018$

Plus x grandit, plus $M(x)$ se rapproche de 45.

Vérifie : À moins d'un dirham

À partir de combien de tabliers le coût moyen est-il à moins de 1 DH de 45 DH ?

A. Dès 46 tabliers.

Faux.

Pour $x = 46$, la part des frais fixes vaut $\frac{1\,800}{46}$, soit plus de 39 DH : c'est loin d'un dirham.

B. Dès $1\,000$ tabliers.

Faux.

Pour $x = 1\,000$, l'écart vaut $1{,}8$ DH : c'est encore trop.

C. Au-delà de $1\,800$ tabliers.

Juste.

Juste : l'écart $\frac{1\,800}{x}$ passe sous 1 quand x dépasse $1\,800$.

D. Jamais : l'écart reste trop grand.

Faux.

L'écart $\frac{1\,800}{x}$ devient aussi petit que tu le souhaites : il suffit de produire assez.

Correction

L'écart entre $M(x)$ et 45 vaut $\dfrac{1\,800}{x}$. Il est inférieur à 1 lorsque $x > 1\,800$.

Pour un écart inférieur à $0{,}1$ DH, il faut $x > 18\,000$.

Quel que soit l'écart choisi, il suffit de produire assez de tabliers : c'est l'idée d'une limite.

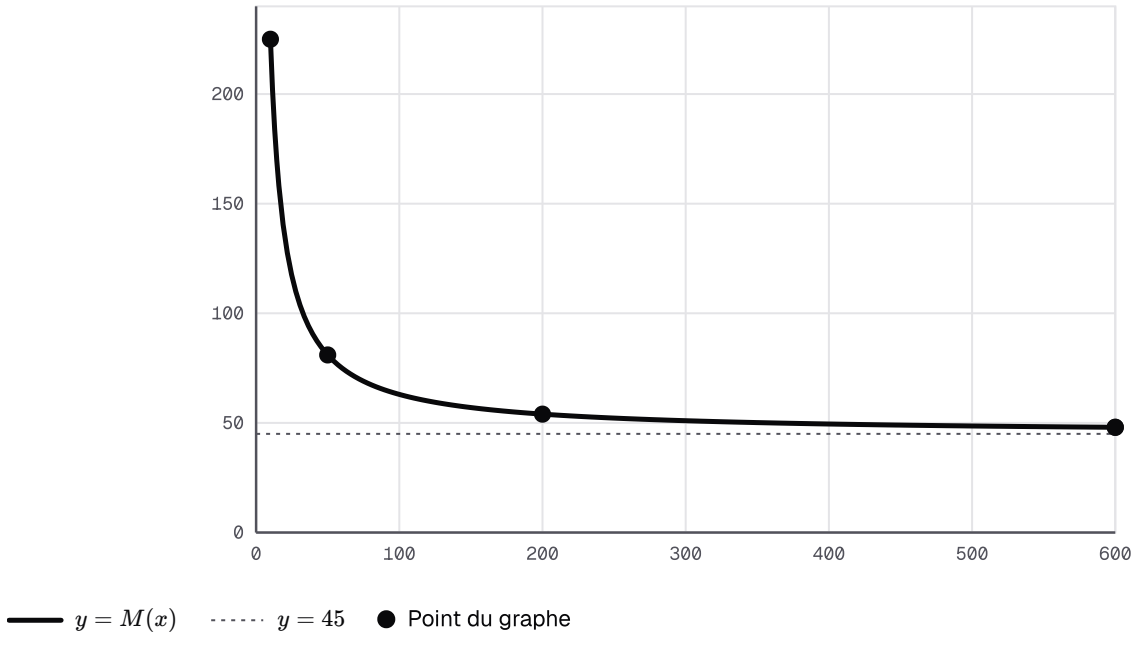
La limite en l'infini

Définition : Limite en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, et ℓ un réel.

- On dit que f a pour **limite** ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La limite $-\infty$ se décrit de même : $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

Pour une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$, on décrit de même les limites en $-\infty$, lorsque x est négatif et assez grand en valeur absolue.



Coût moyen d'un tablier dans l'atelier imaginaire, de 10 à 600 tabliers.

Exemple : une limite finie

D'après le tableau et la courbe, les valeurs de $M(x)$ se collent à 45 autant que tu le souhaites, pourvu que x soit assez grand. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} M(x) = 45.$$

En clair : quand l'atelier produit énormément, un tablier revient presque à 45 DH.

Pour l'instant, c'est une conjecture tirée d'un tableau. Les règles des opérations la prouveront.

Limite infinie et méthode

Exemple : une limite infinie

Le coût total $C(x) = 1\,800 + 45x$ ne se rapproche d'aucun nombre. Il dépasse $100\,000$ DH dès $2\,183$ tabliers, et un million de dirhams dès $22\,183$ tabliers.

Il dépasse n'importe quel montant fixé à l'avance, pourvu que x soit assez grand. On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = +\infty.$$

Méthode : conjecturer une limite en l'infini

1. **Choisis** des valeurs de x de plus en plus grandes : 10, 100, $1\,000$, $10\,000$. En $-\infty$, prends -10, -100, $-1\,000$.
2. **Calcule** $f(x)$ pour chacune, à la calculatrice, et range les résultats dans un tableau.
3. **Regarde** la tendance : les valeurs se stabilisent près d'un nombre, ou bien elles dépassent tout montant.
4. **Contrôle** sur la courbe si tu l'as. Garde en tête que c'est une conjecture : les règles du chapitre la prouveront.

Les fonctions de référence

Calcule à la calculatrice. Pour $x = 100$:

- $x^2 = 10\,000$ et $x^3 = 1\,000\,000$;
- $\sqrt{x} = 10$ et $\dfrac{1}{x} = 0{,}01$.

Pour $x = 10\,000$:

- $x^2 = 100\,000\,000$;
- $\sqrt{x} = 100$ et $\dfrac{1}{x} = 0{,}0001$.

Les puissances grandissent sans fin. La racine carrée grandit lentement, mais sans s'arrêter. L'inverse, lui, s'écrase vers 0.

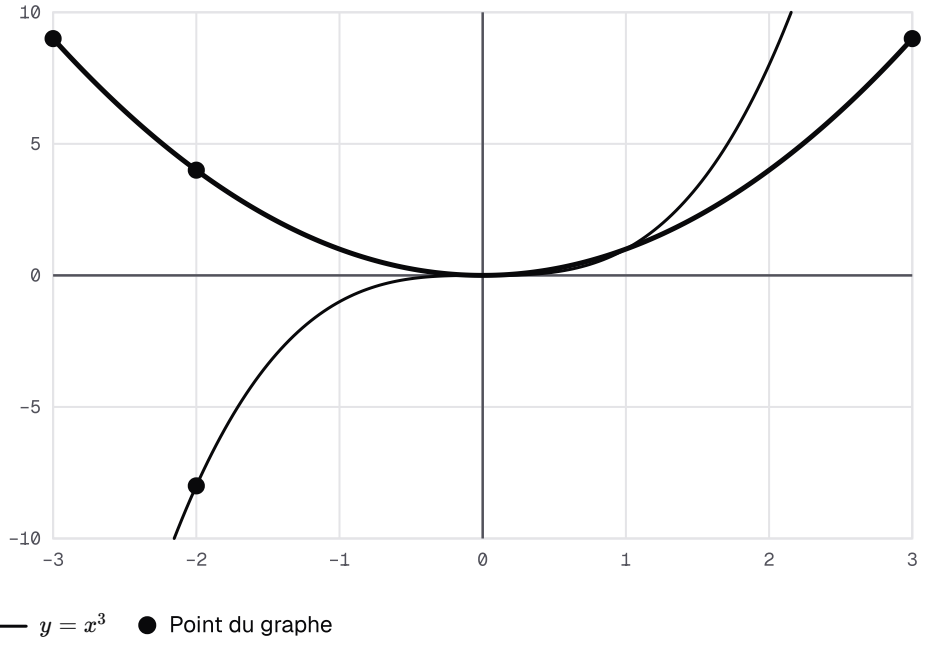
Propriété : Limites des fonctions de référence en l'infini

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, et $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarque

Ce résultat est admis.



Les courbes de x ↦ x² et de x ↦ x³ sur l'intervalle [−3, 3]. Le tableau de valeurs, plus que la courbe, montre le comportement pour de très grands x.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : En moins l'infini

Que vaut $\lim_{x \to -\infty} x^5$?

A. $+\infty$

Faux.
Une puissance d'exposant impair garde le signe de x : pour $x = -10$, $x^5 = -100\,000$.

B. 0

Faux.
x^5 ne s'approche pas de 0 : sa valeur absolue grandit sans fin.

C. -5

Faux.
Rien ne s'arrête à -5 : pour $x = -2$, x^5 vaut déjà -32.

D. $-\infty$

Juste.
Juste : 5 est impair, et x^5 est négatif pour x négatif.

Correction
L'exposant 5 est impair. D'après les limites des fonctions de référence en l'infini :

$$\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty.$$

Contrôle : $(-10)^5 = -100\,000$ et $(-100)^5 = -10\,000\,000\,000$.

Exemple : lire les limites de référence

- $\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$, car l'exposant 4 est pair. Contrôle : $(-10)^4 = 10\,000$.
- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$. Contrôle : pour $x = -10$, $\dfrac{1}{x^3} = -0{,}001$.
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Contrôle : pour $x = 10\,000$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0{,}01$.

Chaque fois, la justification est la même : d'après les limites des fonctions de référence en l'infini.

À toi : Quatre limites de référence

Donne les quatre limites suivantes :

- $\lim_{x \to +\infty} x^6$;
- $\lim_{x \to -\infty} x^6$;
- $\lim_{x \to -\infty} x^3$;
- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

Contrôle chaque réponse avec une valeur à la calculatrice. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Classe d'abord les fonctions : puissance, ou inverse d'une puissance.
Indice 2
En $-\infty$, regarde la parité de l'exposant : 6 est pair, 3 est impair.
Indice 3

Point délicat : pour la dernière, cherche si $\frac{1}{x^2}$ s'approche d'un réel ou devient grand.

Réponse

D'après les limites des fonctions de référence en l'infini :

- $\lim_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$;
- $\lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$, car 6 est pair ; contrôle : $(-10)^6 = 1\,000\,000$;
- $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, car 3 est impair ; contrôle : $(-10)^3 = -1\,000$;
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; contrôle : pour $x = -100$, $\frac{1}{x^2} = 0{,}0001$.

Limite en un réel

Une commande de tissu

L'atelier achète son tissu chez un grossiste, imaginaire lui aussi. Plus la commande est grande, plus le mètre est bon marché.

Pour une commande de q mètres, avec $0 < q \leq 100$, le prix d'un mètre vaut, en DH :

$$p(q) = 80 - 0{,}5q.$$

Le gérant hésite autour de 30 mètres.

Devine : Près de trente mètres

Quand la quantité q s'approche de 30, de quel prix $p(q)$ s'approche-t-il ?

A. De 65 DH.

Juste.

Juste : $80 - 0{,}5 \times 30 = 65$.

B. De 80 DH.

Faux.

80 DH est le prix de départ, pour une commande presque nulle.

C. De 15 DH.

Faux.

15 DH est la remise par mètre, $0{,}5 \times 30$: il faut la retrancher de 80.

D. D'aucun prix précis.

Faux.

Le prix bouge très peu quand q bouge peu : il se rapproche bien d'un nombre.

Correction

Près de 30, la remise par mètre est proche de $0{,}5 \times 30 = 15$ DH. Le prix se rapproche donc de $80 - 15 = 65$ DH.

> Le tableau qui suit le confirme, des deux côtés de 30.

Voici le prix d'un mètre pour des commandes proches de 30 mètres, sans jamais prendre $q = 30$.

q	29	$29{,}9$	$29{,}99$	$30{,}01$	$30{,}1$	31
$p(q)$	$65{,}5$	$65{,}05$	$65{,}005$	$64{,}995$	$64{,}95$	$64{,}5$

De chaque côté, $p(q)$ se colle à 65. Ce qui compte, c'est ce qui se passe **près** de 30, pas en 30.

Limite finie en un réel

Définition : Limite finie en un réel

Soit a un réel et f une fonction définie autour de a, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel.

On dit que f a pour **limite** ℓ en a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers a, lorsque $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Par exemple, $\lim_{x \to a} x = a$, et une fonction constante égale à c a pour limite c en a.

Exemple : regarder près du réel, et pas en lui

Soit r la fonction définie pour $x \neq 0$ par :

$$r(x) = \frac{x^2 - 7x}{x}.$$

En 0, ce quotient n'existe pas. Mais pour $x \neq 0$, on simplifie par x :

$$r(x) = x - 7.$$

Quand x s'approche de 0, la quantité $x - 7$ s'approche de -7 : la règle de la somme, vue plus loin, le confirmera. Par exemple, $r(0{,}01) = -6{,}99$ et $r(-0{,}01) = -7{,}01$.

Ainsi $\lim_{x \to 0} r(x) = -7$, alors que $r(0)$ n'existe pas.

Limite infinie en un réel

Regarde maintenant $\dfrac{1}{x^2}$ près de 0. Pour $x = 0{,}1$, il vaut 100 ; pour $x = 0{,}01$, il vaut $10\,000$. Pour $x = -0{,}01$, il vaut aussi $10\,000$, car un carré est positif.

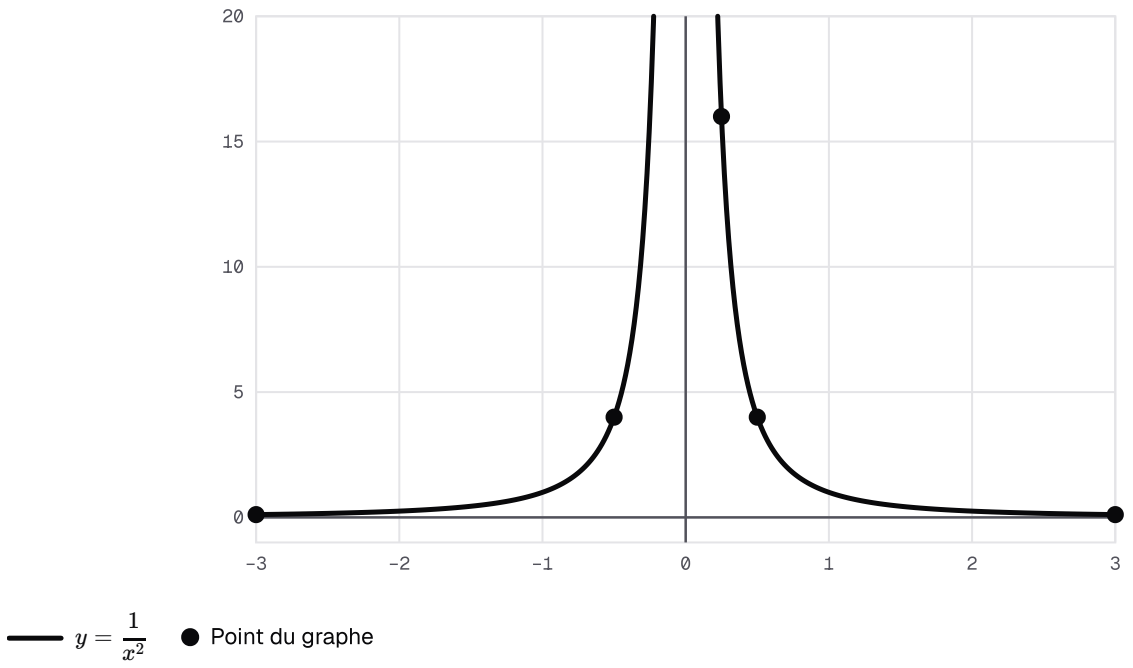
Plus x est proche de 0, plus $\dfrac{1}{x^2}$ est grand.

Définition : Limite infinie en un réel

Soit a un réel et f une fonction définie autour de a, sauf peut-être en a.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a lorsque $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.



La courbe de x ↦ 1/x² de part et d'autre de 0.

Exemple : aussi grand que l'on veut

Poursuis le calcul de $\frac{1}{x^2}$ pour des x de plus en plus proches de 0. Pour $x = 0{,}1$, il vaut 100 ; pour $x = 0{,}01$, $10\,000$. Pour $x = 0{,}001$, il vaut $1\,000\,000$; pour $x = 0{,}0001$, $100\,000\,000$.

Du côté négatif, les valeurs sont les mêmes. Plus x est proche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ dépasse n'importe quel nombre. On écrit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Un dénominateur qui s'annule

Soit k la fonction définie pour $x \neq 2$ par $k(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. Que se passe-t-il quand x s'approche de 2 ?

A. $k(x)$ s'approche de 0.

Faux.

Le dénominateur s'approche de 0, pas le quotient : par exemple, $k(2{,}1) = 100$.

B. $k(x)$ s'approche de 2.

Faux.

2 est l'endroit où l'on regarde, pas la valeur dont on s'approche.

C. $k(x)$ devient aussi grand que l'on veut.

Juste.

Juste : $(x-2)^2$ est positif et minuscule, son inverse est énorme.

D. On ne peut rien dire, car $k(2)$ n'existe pas.

Faux.

Une limite en 2 regarde les x proches de 2, distincts de 2 : $k(2)$ n'a pas besoin d'exister.

Correction

Pour $x = 2{,}01$ ou $x = 1{,}99$, $(x-2)^2 = 0{,}0001$ et $k(x) = 10\,000$.

Plus x est proche de 2, plus $k(x)$ est grand. Ainsi :

$$\lim_{x \to 2} k(x) = +\infty.$$

À toi : Deux limites en un réel

1. Avec le prix $p(q) = 80 - 0{,}5q$ du grossiste, conjecture la limite de p en 50 : calcule $p(49{,}9)$, $p(49{,}99)$ et $p(50{,}01)$.
2. Que devient $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ quand x s'approche de -1 ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour la question 1, fais un petit tableau, sans prendre $q = 50$.

Indice 2

Pour la question 1, regarde de quel nombre les trois prix se rapprochent. Pour la question 2, calcule $(x+1)^2$ pour $x = -0{,}9$, puis pour $x = -1{,}1$.

Indice 3

Point délicat : un carré reste positif des deux côtés de -1, donc son inverse aussi.

Réponse

Question 1. $p(49{,}9) = 55{,}05$, $p(49{,}99) = 55{,}005$ et $p(50{,}01) = 54{,}995$. Les valeurs se rapprochent de 55. On conjecture :

$$\lim_{q \to 50} p(q) = 55.$$

Pour une commande proche de 50 mètres, le mètre revient presque à 55 DH.

Question 2. Pour $x = -0{,}9$ ou $x = -1{,}1$, $(x+1)^2 = 0{,}01$ et le quotient vaut 100. Pour $x = -1{,}01$, il vaut $10\,000$. On conjecture :

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Limite à droite, limite à gauche

Les deux côtés de zéro

Regarde $\dfrac{1}{x}$ près de 0. Pour $x = 0{,}01$, il vaut 100. Pour $x = -0{,}01$, il vaut -100. Cette fois, les deux côtés ne racontent pas la même histoire.

Devine : À gauche de zéro

Quand x s'approche de 0 en restant négatif, que devient $\dfrac{1}{x}$?

A. Il est négatif, de plus en plus grand en valeur absolue.

Juste.

Juste : pour $x = -0{,}001$, $\dfrac{1}{x} = -1\,000$.

B. Il devient positif, et aussi grand que l'on veut.

Faux.

C'est ce qui se passe à droite de 0. À gauche, x est négatif, donc $\dfrac{1}{x}$ aussi.

C. Il s'approche de 0.

Faux.

C'est x qui s'approche de 0 ; son inverse s'en éloigne.

D. Il s'approche de -1.

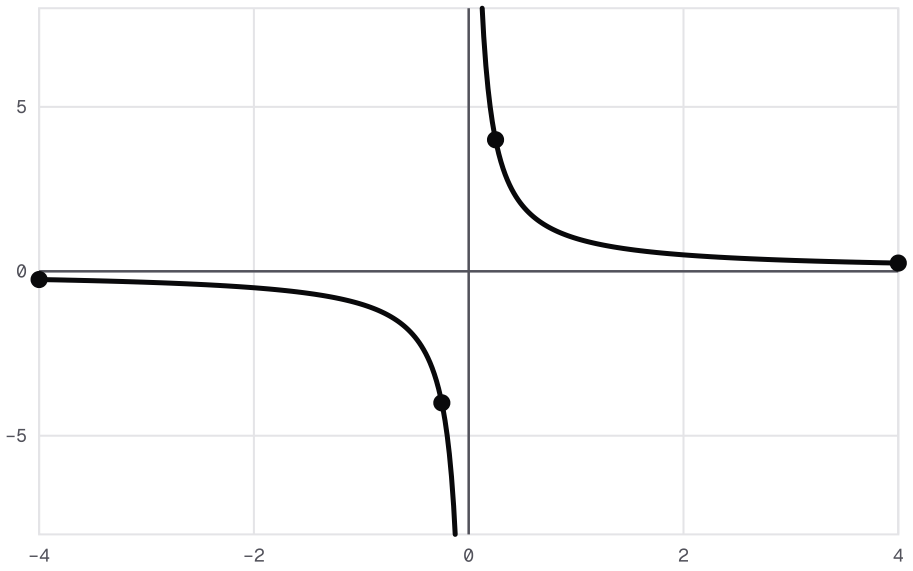
Faux.

Pour $x = -0{,}1$, $\dfrac{1}{x}$ vaut déjà -10 : il a dépassé -1 depuis longtemps.

Correction

Pour x négatif proche de 0, $\dfrac{1}{x}$ est négatif : -10 pour $x = -0{,}1$, $-1\,000$ pour $x = -0{,}001$. Sa valeur absolue grandit sans fin.

La courbe qui suit le montre : la branche de gauche plonge vers le bas.



La courbe de x ↦ 1/x de part et d'autre de 0.

À droite, à gauche

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a un réel.

- Lorsque x tend vers a en restant **strictement supérieur** à a, on parle de limite **à droite** en a. On note $\lim_{x \to a^+} f(x)$.
- Lorsque x tend vers a en restant **strictement inférieur** à a, on parle de limite **à gauche** en a. On note $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Ces limites se décrivent comme une limite en a, en ne regardant que les réels x situés d'un seul côté de a. Elles peuvent être finies ou infinies.

Exemple : un tarif par paliers

Un autre grossiste imaginaire vend la dentelle par paliers. Pour q mètres, le prix d'un mètre vaut :

$$t(q) = \begin{cases} 70 & \text{si } 0 < q < 50 \\ 60 & \text{si } q \geq 50 \end{cases}$$

- À gauche de 50, t est constante égale à 70 : $\lim_{q \to 50^-} t(q) = 70$.
- À droite de 50, elle vaut 60 : $\lim_{q \to 50^+} t(q) = 60$.

Chaque fois, on applique la limite d'une fonction constante.

Propriété : Limite en un réel et limites à droite et à gauche

Soit a un réel, f une fonction définie autour de a, sauf peut-être en a, et L un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

La fonction f a pour limite L en a si et seulement si f a pour limite L **à droite et à gauche** en a.

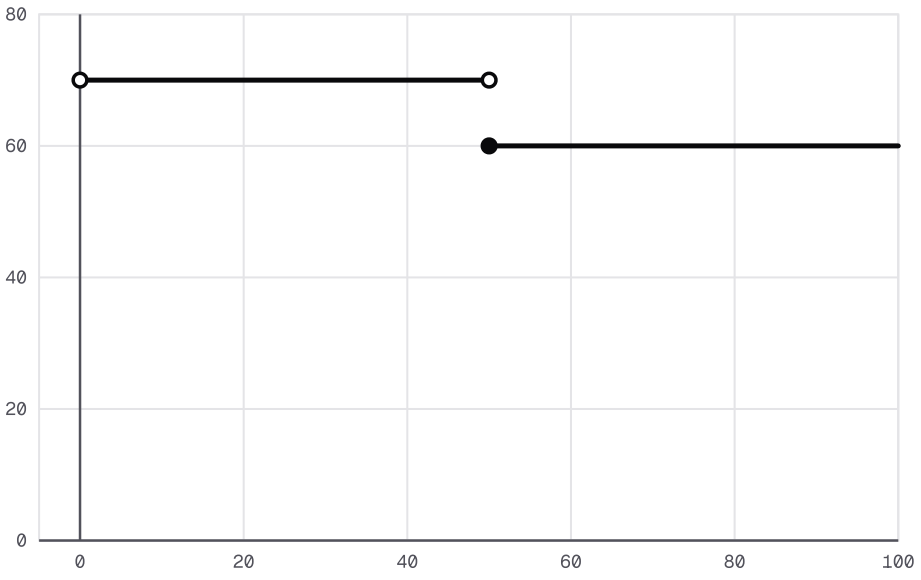
En particulier, si les limites à droite et à gauche en a sont **différentes**, la fonction f n'a pas de limite en a.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : une limite, ou pas

- Pour le tarif par paliers, les limites à gauche et à droite en 50 valent 70 et 60. Elles sont différentes : d'après le lien entre la limite et les limites à droite et à gauche, t n'a pas de limite en 50.
- Pour $\dfrac{1}{x^2}$, les deux côtés de 0 donnent $+\infty$. La fonction a donc pour limite $+\infty$ en 0.



$y = t(q)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Le tarif t de la dentelle : 70 dirhams le mètre avant 50 mètres, 60 dirhams à partir de 50. À gauche de 50, la courbe arrive à 70 ; à droite, elle part de 60 : deux limites différentes.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 70.

Borne exclue en x = 50 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 70.

Les fonctions de référence en zéro

Propriété : Limites des fonctions de référence en 0

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- Si n est pair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ a pour limite $+\infty$ en 0.
- Si n est impair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ n'a pas de limite en 0.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : deux inverses près de zéro

- D'après les limites des fonctions de référence en 0, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Contrôle : pour $x = 0{,}0001$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 100$. Seule la droite compte, car $\sqrt{x}$ n'existe pas pour $x < 0$.
- Pour $\dfrac{1}{x^3}$, l'exposant 3 est impair. D'après les mêmes limites, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$. Les deux côtés diffèrent : pas de limite en 0.

Un piège, puis à toi

Attention : regarde les deux côtés

✗ « $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5} = +\infty$. »

✓ Ce n'est vrai qu'à droite. Pour $x = -0{,}1$, $\dfrac{1}{x^5} = -100\,000$: à gauche, la limite vaut $-\infty$.

Les deux côtés diffèrent, donc $x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$ n'a pas de limite en 0. Avant de conclure en un réel, étudie la droite et la gauche.

Vérifie : Un exposant pair

Que vaut $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^4}$?

A. $-\infty$

Faux.

x est négatif, mais x^4 est positif : l'exposant 4 est pair.

B. 0

Faux.

C'est x^4 qui tend vers 0 ; son inverse devient très grand.

C. $+\infty$

Juste.

Juste : x^4 est positif et minuscule.

D. Elle n'existe pas.

Faux.

Tu penses à un exposant impair. Ici, la limite à gauche existe, et elle est égale à celle de droite.

Correction

L'exposant 4 est pair. D'après les limites des fonctions de référence en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty.$$

Contrôle : pour $x = -0{,}1$, $x^4 = 0{,}0001$ et $\dfrac{1}{x^4} = 10\,000$.

Comme la limite à droite vaut aussi $+\infty$, la fonction a pour limite $+\infty$ en 0.

À toi : Un ruban vendu par paliers

Un fournisseur imaginaire vend un ruban. Pour q mètres, le prix d'un mètre vaut :

$$v(q) = \begin{cases} 12 & \text{si } 0 < q < 100 \\ 11 & \text{si } q = 100 \\ 10 & \text{si } q > 100 \end{cases}$$

1. Donne $\lim_{q \to 100^-} v(q)$ et $\lim_{q \to 100^+} v(q)$. La fonction v a-t-elle une limite en 100 ?
2. Donne $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7}$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^8}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

De chaque côté de 100, v est constante : applique la limite d'une fonction constante.

Indice 2

Compare les deux limites en 100. Pour la question 2, regarde la parité des exposants 7 et 8.

Indice 3

Point délicat : la valeur $v(100) = 11$ ne compte pas ; seuls les q proches de 100, distincts de 100, comptent.

Réponse

Question 1. À gauche de 100, v vaut 12 ; à droite, elle vaut 10. D'après la limite d'une fonction constante :

$$\lim_{q \to 100^-} v(q) = 12,$$
$$\lim_{q \to 100^+} v(q) = 10.$$

Ces limites sont différentes : v n'a pas de limite en 100, quelle que soit la valeur $v(100)$.

Question 2. D'après les limites des fonctions de référence en 0 :

- $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7} = -\infty$, car 7 est impair ;
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^8} = +\infty$, car 8 est pair et les deux côtés donnent $+\infty$.

Opérations sur les limites

Deux quantités ensemble

Le coût moyen $M(x) = 45 + \dfrac{1\,800}{x}$ est une **somme** : une part fixe, 45, et la part des frais fixes, $\dfrac{1\,800}{x}$.

En $+\infty$, la première ne bouge pas et la seconde s'écrase vers 0. La somme s'approche donc de $45 + 0$.

Certaines sommes, en revanche, ne se devinent pas : on les appelle formes indéterminées, et tu les rencontres plus loin. Les règles qui suivent rendent ce raisonnement solide.

Devine : Une somme en plus l'infini

En $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0. Vers quoi tend $x^2 + \dfrac{1}{x}$?

A. Vers 0.

Faux.

Le terme $\dfrac{1}{x}$ devient petit, mais x^2 devient énorme : il l'emporte.

B. On ne peut pas conclure sans transformer.

Faux.

Une somme bloque seulement quand elle oppose $+\infty$ et $-\infty$. Ici, on ajoute 0 à $+\infty$.

C. Vers 1.

Faux.

Aucun terme ne s'approche de 1 : pour $x = 10$, la somme vaut déjà $100{,}1$.

D. Vers $+\infty$.

Juste.

Juste : ajouter une quantité qui tend vers 0 ne freine pas x^2.

Correction

Pour $x = 100$, $x^2 + \dfrac{1}{x} = 10\,000{,}01$: le petit terme ne compte presque pas.

D'après la règle de la somme, que tu lis juste après, un réel ajouté à $+\infty$ donne $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

Somme et produit

Propriété : Limite d'une somme et d'un produit

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Les limites sont prises **au même endroit** : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Somme. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors $\lim(f+g) = \ell + \ell'$. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$; de même avec $-\infty$. Si $\lim f = \lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$; de même avec $-\infty$.

Produit. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors $\lim(fg) = \ell\ell'$. Si l'une des limites est infinie et l'autre est infinie ou un réel non nul, alors $\lim(fg)$ est infinie, de signe donné par la règle des signes.

Les cas $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$ sont des **formes indéterminées** : on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'écriture.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : justifier le coût moyen

Le coût moyen. D'après les limites des fonctions de référence, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par produit avec la constante $1\,800$, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1\,800}{x} = 0$. Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} M(x) = 45 + 0 = 45.$$

La conjecture du début est prouvée.

Un produit. D'après les limites des fonctions de référence en l'infini, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. Par produit avec -2, qui est négatif :

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty.$$

Vérifie : Laquelle bloque ?

En $+\infty$, une seule de ces expressions mène à une forme indéterminée avec les règles de la somme et du produit. Laquelle ?

A. $x^2 + \sqrt{x}$

Faux.
$(+\infty)+(+\infty)$ donne $+\infty$: aucune indétermination.

B. $x^2-\sqrt{x}$

Juste.
Juste : x^2 tend vers $+\infty$ et $-\sqrt{x}$ vers $-\infty$.

C. $3x\sqrt{x}$

Faux.
Un produit de deux limites $+\infty$ donne $+\infty$.

D. $\dfrac{1}{x}-5$

Faux.
$0+(-5)$ donne -5 : la somme se calcule.

Correction
Pour $x^2-\sqrt{x}$, on ajoute x^2, qui tend vers $+\infty$, et $-\sqrt{x}$, qui tend vers $-\infty$. C'est la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$: la règle de la somme ne conclut pas. Il faudra transformer l'écriture.

Les trois autres expressions ont pour limites $+\infty$, $+\infty$ et -5.

Quotient

Propriété : Limite d'un quotient

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Les limites sont prises au même endroit.

- Si $\lim f=\ell$ et $\lim g=\ell'$ avec $\ell'\neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g}=\dfrac{\ell}{\ell'}$.
- Si $\lim f=\ell$ et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim \dfrac{f}{g}=0$.
- Si $\lim f$ est infinie et $\lim g=\ell'$ avec $\ell'\neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie.
- Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, et si $\lim g=0$ avec g de signe constant, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie.

Le signe d'une limite infinie est donné par la règle des signes. Les cas $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sont des **formes indéterminées**.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : trois quotients

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2+1} = 0$: le numérateur vaut 5 et, par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$. On applique la limite d'un quotient.
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{3}{2}$: par somme, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2, non nul.
- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2+x}{\sqrt{x}} = +\infty$: par somme, le numérateur tend vers 2 ; d'après les limites de référence en 0, $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant positif. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $+\infty$.

La méthode, un piège

Méthode : calculer une limite avec les règles

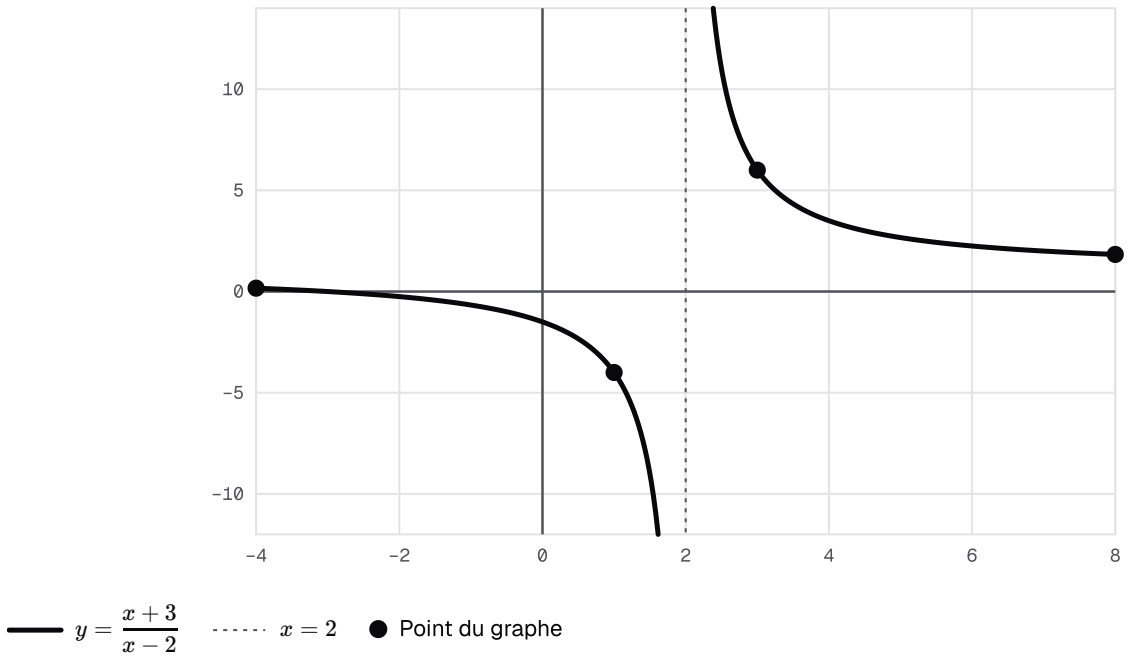
1. **Découpe** l'expression en morceaux simples : fonctions de référence, constantes.
2. **Note** la limite de chaque morceau, toujours au même endroit.
3. **Assemble** les morceaux : somme, produit ou quotient. Écris le nom de la règle employée.
4. **Surveille** les formes indéterminées : si tu en rencontres une, change d'écriture avant de conclure.

Attention : une forme indéterminée ne vaut rien d'avance

✗ « En $+\infty$, $(x+7) - x$ est de la forme $(+\infty) + (-\infty)$, donc sa limite vaut 0. »

✓ Une forme indéterminée ne donne aucun résultat. Ici, $(x+7) - x = 7$ pour tout x : la limite vaut 7. Avec $2x - x$, de la même forme, on trouve x, qui tend vers $+\infty$. Même forme, résultats différents : il faut transformer l'écriture.

Un dénominateur qui tend vers zéro



La courbe de x ↦ (x + 3)/(x − 2) de part et d'autre de 2.

Méthode : quand le dénominateur tend vers 0

1. **Calcule** la limite du numérateur : elle doit être un réel non nul.
2. **Dresse** le tableau de signes du dénominateur : il donne son signe juste avant a et juste après.
3. **Conclus** de chaque côté avec la règle des signes : la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$.
4. **Compare** les deux côtés : s'ils diffèrent, il n'y a pas de limite en a.

Signe du dénominateur x − 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		−	0	+	

Exemple : de part et d'autre de 2

Soit f la fonction définie pour $x \neq 2$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}.$$

En 2, par somme, le numérateur tend vers 5, non nul, et le dénominateur vers 0.

- À gauche de 2, $x - 2 < 0$: le quotient d'un positif par un négatif est négatif. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.
- À droite de 2, $x - 2 > 0$: le quotient est positif, donc $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

Les deux limites diffèrent : f n'a pas de limite en 2. La courbe le montrait déjà.

À toi : Un quotient de part et d'autre d'un réel

Soit g la fonction définie pour $x \neq -3$ par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

Calcule $\lim_{x \to -3^-} g(x)$ et $\lim_{x \to -3^+} g(x)$. La fonction g a-t-elle une limite en -3 ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la limite du numérateur en -3 : elle n'est pas nulle.
Indice 2
Dresse le tableau de signes de $x+3$: négatif avant -3, positif après.
Indice 3
Point délicat : le numérateur est négatif, il inverse les signes du dénominateur.

Réponse
Numérateur. Par somme, le numérateur tend vers $2 \times (-3) - 1 = -7$, non nul.

Signe du dénominateur. Le dénominateur $x+3$ tend vers 0 : il est négatif pour $x < -3$ et positif pour $x > -3$.

De chaque côté. On conclut avec la limite d'un quotient, en suivant les signes :

- $\lim_{x \to -3^-} g(x) = +\infty$, car -7 divisé par un négatif proche de 0 donne un grand positif ;
- $\lim_{x \to -3^+} g(x) = -\infty$, car -7 divisé par un positif proche de 0 donne un négatif de grande valeur absolue.

Conclusion. Les deux limites diffèrent : g n'a pas de limite en -3. Contrôle : $g(-3{,}01) = 702$ et $g(-2{,}99) = -698$.

Polynômes et fonctions rationnelles

La valeur en un réel

Près de 30, le prix $p(q) = 80 - 0{,}5q$ s'approchait de 65, qui est exactement $p(30)$.

Est-ce un hasard ? Non : un polynôme a pour limite, en chaque réel, le nombre obtenu en y remplaçant x.

Pourquoi est-ce vrai ? Un polynôme se construit avec x et des constantes, par produits et par sommes. Or tu connais déjà la limite de x et celle d'une constante.

Devine : Un polynôme près de 2

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 2x + 4$. Quand x s'approche de 2, de quel nombre $P(x)$ s'approche-t-il ?

A. De 4.

Faux.

4 est le terme constant ; il faut aussi compter x^3 et $-2x$ en 2.

B. De 16.

Faux.

Erreur de signe : -2×2 vaut -4, pas $+4$. On trouve $8 - 4 + 4$.

C. De 8.

Juste.

Juste : $P(2) = 8 - 4 + 4 = 8$.

D. De plus en plus grand.

Faux.

Près de 2, x^3 reste proche de 8 : rien n'explose.

Correction

La valeur en 2 vaut :

$$P(2) = 2^3 - 2 \times 2 + 4 = 8.$$

À la calculatrice, $P(1{,}99) = 7{,}900\,599$ et $P(2{,}01) = 8{,}100\,601$: les valeurs se rapprochent bien de 8.

Polynômes en un réel

Propriété : Limite en un réel d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

Soit a un réel.

- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si P et Q sont deux polynômes tels que $Q(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Démonstration

Étape 1. Une fonction constante égale à c a pour limite c en a, et $\lim_{x \to a} x = a$: ce sont les deux exemples de la description d'une limite finie en un réel.

Étape 2. Soit k un entier naturel non nul. Par produits successifs, $\lim_{x \to a} x^k = a^k$; par produit avec une constante, $\lim_{x \to a} c\,x^k = c\,a^k$.

Étape 3. Un polynôme est la somme d'une constante et de tels termes. Par somme, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.

Étape 4. De même, $\lim_{x \to a} Q(x) = Q(a)$, avec $Q(a) \neq 0$. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve part de deux briques : $\lim_{x \to a} x = a$ et la limite d'une constante.

Par produits, on obtient x^2, x^3, puis $c\,x^k$. Par sommes, on obtient tout polynôme. Pour un quotient, il faut en plus que le dénominateur ne s'annule pas en a.

Retiens le réflexe : **en un réel, remplace x par ce réel**, après avoir vérifié le dénominateur.

Vérifie : Le point de départ de la preuve

La preuve de la limite d'un polynôme en un réel commence par deux limites simples. Lesquelles ?

A. $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et la limite de $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Faux.

Ce sont des limites en l'infini ; ici, on travaille près d'un réel a.

B. $\lim_{x \to a} x = a$ et la limite d'une constante.

Juste.

Juste : avec ces deux briques, produits et sommes construisent tout polynôme.

C. Le fait que $P(a)$ existe et que P soit croissant.

Faux.

La croissance de P ne joue aucun rôle : la preuve n'utilise que des limites, assemblées par produits et par sommes.

D. Les limites de x^2 et de x^3 en a.

Faux.

Ces limites viennent après : on les obtient par produits, à partir de $\lim_{x \to a} x = a$.

Correction

La preuve part de $\lim_{x \to a} x = a$ et de la limite d'une constante, deux exemples de la description d'une limite finie en un réel.

Pour tout réel c et tout entier naturel k non nul, par produits, $\lim_{x \to a} c\,x^k = c\,a^k$. Par somme, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.

Enfin, la limite d'un quotient donne le cas d'une fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, lorsque $Q(a) \neq 0$.

Exemple : remplacer, puis vérifier

Un polynôme. On remplace x par -1 ; d'après la limite en un réel d'un polynôme :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x^2 - 5) \\ &= -1 + 2 - 5 \\ &= -4. \end{aligned}$$

Une fonction rationnelle. Le dénominateur vaut 2 en 3 : il n'est pas nul, et la limite en un réel d'une fonction rationnelle s'applique :

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{7}{2}.$$

L'hypothèse compte. Pour $\dfrac{x^2-9}{x-3}$, le dénominateur s'annule en 3 : la propriété ne s'applique pas. On obtient $\dfrac{0}{0}$, une forme indéterminée que la section suivante apprend à lever.

Polynômes en l'infini

En $+\infty$, remplacer x par une valeur n'a plus de sens.

Prends le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 50x^2$, et $x = 1\,000$: x^3 vaut un milliard, $50x^2$ seulement cinquante millions. Le terme de plus haut degré écrase les autres.

Pourquoi est-ce vrai ? On le met en facteur, et tout le reste devient une parenthèse proche de 1.

Propriété : Limites en l'infini d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

- Un polynôme de degré $n \geq 1$ a, en $+\infty$ et en $-\infty$, la **même limite que son terme de plus haut degré** : si $a_n \neq 0$,

  $$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n,$$

  et de même en $-\infty$.
- Une fonction rationnelle a, en $+\infty$ et en $-\infty$, la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré** de son numérateur et de son dénominateur.

Démonstration

Étape 1. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Pour $x \neq 0$, on factorise par le terme de plus haut degré :

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

Étape 2. D'après les limites des fonctions de référence en l'infini, chaque $\dfrac{1}{x^k}$ ($k \geq 1$) tend vers 0 : par produit et par somme, la parenthèse tend vers 1.

Étape 3. La limite de $a_n x^n$ est infinie (limites de référence, $a_n \neq 0$). La parenthèse tend vers 1, réel non nul : par produit, $P(x)$ a la même limite que $a_n x^n$.

Étape 4. Pour $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on factorise de même ; le quotient des parenthèses tend vers 1 (limite d'un quotient). Le quotient $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ des termes de plus haut degré vaut $\dfrac{a_n}{b_m}$ si $n = m$, $\dfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}$ (limite infinie) si $n > m$, $\dfrac{a_n}{b_m} \times \dfrac{1}{x^{m-n}}$ (limite 0) si $n < m$. Par produit, la fonction a la même limite que lui.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **factoriser par le terme de plus haut degré**, pour $x \neq 0$.

Dans la parenthèse, chaque autre terme devient une constante divisée par une puissance de x, qui tend vers 0. La parenthèse tend donc vers 1.

Pour une fonction rationnelle, on factorise en haut et en bas : seuls comptent alors les deux termes dominants, l'un divisé par l'autre. Ce réflexe ne vaut qu'en $+\infty$ et en $-\infty$.

Vérifie : Le bon facteur

Pour appliquer l'idée de la preuve au polynôme P défini par $P(x) = 4x^3 - x + 7$, par quoi factorise-t-on ?

A. Par 7.

Faux.

7 est le terme constant : il ne domine pas en l'infini.

B. Par x.

Faux.

On obtiendrait la parenthèse $4x^2 - 1 + \dfrac{7}{x}$, qui ne tend pas vers un réel : on n'a rien gagné.

C. Par $-x$.

Faux.

Ce terme est de degré 1 ; le plus haut degré est 3.

D. Par $4x^3$.

Juste.

Juste : la parenthèse devient $1 - \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{7}{4x^3}$.

Correction

Pour $x \neq 0$:

$$P(x) = 4x^3\left(1 - \frac{1}{4x^2} + \frac{7}{4x^3}\right).$$

D'après les limites des fonctions de référence en l'infini, les deux fractions tendent vers 0 ; par somme, la parenthèse tend vers 1.

Par produit, $P(x)$ a la même limite que $4x^3$: $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$.

Exemple : retour à l'atelier

Retour à l'atelier. Pour $x > 0$, le coût moyen s'écrit aussi $M(x) = \dfrac{45x + 1\,800}{x}$. D'après la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, il a la même limite que $\dfrac{45x}{x} = 45$. On retrouve 45 DH.

Un second atelier. Un second atelier imaginaire s'essouffle quand il produit beaucoup. Pour x articles, son coût total vaut, en DH :

$$C_2(x) = 0{,}01x^2 + 30x + 2\,500.$$

Son coût moyen $\dfrac{C_2(x)}{x}$ a la même limite que $\dfrac{0{,}01x^2}{x} = 0{,}01x$. Par produit, cette limite vaut $+\infty$ en $+\infty$: produire sans fin coûte de plus en plus cher par article.

Méthode, piège, à toi

Méthode : un polynôme ou un quotient de polynômes en l'infini

1. **Repère** l'endroit : la règle qui suit ne vaut qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.
2. **Garde** le terme de plus haut degré du polynôme, ou ceux du numérateur et du dénominateur.
3. **Simplifie** ce quotient de termes, comme une fraction ordinaire.
4. **Conclus** avec une limite de référence, en citant la règle employée.

Attention : le terme de plus haut degré, seulement en l'infini

✗ « En 2, $x^3 - 6x$ se comporte comme x^3, donc sa limite vaut 8. »

✓ En un réel, on remplace x par ce réel : $\lim_{x \to 2}(x^3 - 6x) = 8 - 12 = -4$, d'après la limite en un réel d'un polynôme. Le terme de plus haut degré ne sert qu'en $+\infty$ et en $-\infty$.

À toi : Trois limites de polynômes et de quotients

Calcule :

1. $\lim_{x \to -\infty}(3x^2 - 5x^3 + 1)$;
2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - x}{3x^2 + 4}$;
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère d'abord l'endroit : deux limites en l'infini, une en un réel.
Indice 2

En l'infini, garde $-5x^3$ pour la première, puis $\dfrac{6x^2}{3x^2}$ pour la deuxième.

Indice 3

Point délicat : x^3 est négatif en $-\infty$, et -5 aussi.

Réponse

Question 1. D'après la limite en l'infini d'un polynôme, la limite est celle de $-5x^3$. Or $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; par produit avec -5, qui est négatif :

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^2-5x^3+1) = +\infty.$$

Question 2. D'après la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, la limite est celle de $\dfrac{6x^2}{3x^2} = 2$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-x}{3x^2+4} = 2.$$

Question 3. Le dénominateur vaut 2 en 1 : il n'est pas nul, et la limite en un réel d'une fonction rationnelle s'applique :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

Remarque **: Coin devoir : rédiger une limite en l'infini**

En devoir, une limite en l'infini se rédige en trois temps : la règle, le quotient simplifié, la conclusion.

Écris par exemple : « D'après la limite en $-\infty$ d'une fonction rationnelle, on ne garde que les termes de plus haut degré : »

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{x^2} = -3.$$

Le correcteur cherche le nom de la règle et le quotient des termes de plus haut degré.

Formes indéterminées en un réel, racine carrée

La forme zéro sur zéro

Reprends $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ en 3. Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0 : c'est la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Pourtant, la calculatrice donne $5{,}99$ pour $x = 2{,}99$ et $6{,}01$ pour $x = 3{,}01$. Une limite se cache derrière l'indétermination.

Devine : Le facteur caché

Le numérateur $x^2 - 9$ s'annule en 3. Quel facteur commun au numérateur et au dénominateur permet de simplifier ?

A. $x + 3$

Faux.

$x + 3$ divise bien $x^2 - 9$, mais pas le dénominateur $x - 3$.

B. x

Faux.

x ne divise pas $x^2 - 9$: le terme -9 l'en empêche.

C. $x - 3$

Juste.

Juste : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

D. 9

Faux.

Diviser par 9 ne fait pas disparaître le dénominateur qui s'annule.

Correction

Comme 3 est une racine de $x^2 - 9$, ce polynôme se factorise par $x - 3$:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Pour $x \neq 3$, le facteur $x - 3$ est non nul et se simplifie :

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3.$$

D'après la limite en un réel d'un polynôme, la limite en 3 vaut $3 + 3 = 6$.

Méthode : lever la forme 0 sur 0 en un réel a

1. **Vérifie** l'indétermination : le numérateur et le dénominateur valent 0 en a.
2. **Factorise** chacun par $x - a$, avec les racines d'un trinôme ou en divisant par $x - a$.
3. **Simplifie** la fraction par $x - a$: c'est permis, car x reste distinct de a.
4. **Calcule** la limite de la fraction simplifiée, par exemple en remplaçant x par a.

Un exemple guidé

Exemple : Exemple guidé : deux trinômes

Calculons :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}.$$

Forme. En 2, numérateur et dénominateur valent 0 : forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Factorisation. Le trinôme $x^2 + x - 6$ a pour racines 2 et -3, donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. De plus, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Simplification. Pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

Conclusion. Le dénominateur $x + 2$ vaut 4 en 2. D'après la limite en un réel d'une fonction rationnelle, cette expression tend vers $\frac{5}{4}$: c'est la limite cherchée.

Vérifie : Une autre simplification

Que vaut $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$?

A. -3

Juste.
Juste : $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, puis $1 - 4 = -3$.

B. 0

Faux.
$\frac{0}{0}$ ne vaut pas 0 : c'est une forme indéterminée.

C. 3

Faux.
Erreur de signe : après simplification, il reste $x - 4$, qui vaut -3 en 1.

D. Elle n'existe pas.

Faux.
Le dénominateur s'annule, mais le numérateur aussi : après simplification, la limite existe.

Correction
Le trinôme $x^2 - 5x + 4$ a pour racines 1 et 4 :

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4).$$

Pour $x \neq 1$, le quotient vaut $x - 4$. D'après la limite en un réel d'un polynôme, la limite vaut $1 - 4 = -3$.

La racine carrée d'une fonction

Quand x s'approche de 3, $x^2 + 7$ s'approche de 16. Sa racine carrée s'approche alors de $\sqrt{16} = 4$. Pour $x = 3{,}01$, la calculatrice affiche environ $4{,}0075$.

La racine carrée suit la limite de ce qu'elle contient, pourvu que cette quantité reste positive.

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive là où l'on calcule la limite. Les limites sont prises au même endroit : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

- Si $\lim f = \ell$ avec $\ell \geq 0$, alors $\lim \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$.
- Si $\lim f = +\infty$, alors $\lim \sqrt{f} = +\infty$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : trois racines

En 1. Par somme, $2x + 7$ tend vers 9. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{2x + 7} = \sqrt{9} = 3.$$

En $+\infty$. D'après la limite en l'infini d'un polynôme, $x^2 + x$ tend vers $+\infty$. La même règle des racines donne :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty.$$

Un quotient sous la racine. D'après la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, $\dfrac{x+1}{x}$ a la même limite que $\dfrac{x}{x} = 1$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1} = 1.$$

L'expression conjuguée

Méthode : lever une indétermination avec une racine carrée

1. **Repère** une racine carrée dans une différence, comme $\sqrt{A} - B$, qui aboutit à une forme indéterminée.
2. **Multiplie** en haut et en bas par l'**expression conjuguée** $\sqrt{A} + B$.
3. **Développe** le numérateur avec l'identité $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$: la racine disparaît.
4. **Simplifie**, puis conclus avec les règles des opérations.

Exemple : deux racines en plus l'infini

Calculons $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$. Les deux racines tendent vers $+\infty$: forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$.

Pour $x \geq 0$, on multiplie et on divise par la conjuguée $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}-\sqrt{x} &= \frac{(x+5)-x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)=0.$$

Attention : la racine d'un carré

✗ « $\sqrt{x^2}=x$ pour tout réel x. »

✓ Pour $x=-3$, $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$, et non -3. En fait, $\sqrt{x^2}=|x|$: c'est $-x$ lorsque x est négatif.

En $-\infty$, $\sqrt{x^2+4}$ est donc proche de $-x$, qui est positif. Vérifie aussi que la racine existe près de l'endroit étudié.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : La bonne conjuguée

Quelle est l'expression conjuguée de $\sqrt{x+1}-2$?

A. $\sqrt{x+1}-2$

Faux.

C'est l'expression elle-même : le produit garderait une racine.

B. $\sqrt{x+1}+2$

Juste.

Juste : on change le signe devant 2.

C. $\sqrt{x-1}+2$

Faux.

On ne touche pas à ce qui est sous la racine : seul le signe du milieu change.

D. $x+1+4$

Faux.

Ce n'est pas une conjuguée : il manque la racine carrée.

Correction

On garde la racine et on change le signe du milieu : la conjuguée est $\sqrt{x+1}+2$. Le produit vaut :

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)\\&=(x+1)-4\\&=x-3.\end{aligned}$$

La racine a disparu.

À toi : Une racine près de zéro

Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

En 0, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme indéterminée. Pense à la conjuguée.

Indice 2

Multiplie en haut et en bas par $\sqrt{x+9}+3$: le numérateur devient $(x+9)-9=x$.

Indice 3

Point délicat : simplifie par x, ce qui est permis car $x\neq 0$, avant de calculer la limite.

Réponse

Forme. En 0, $\sqrt{x+9}-3$ tend vers $\sqrt{9}-3=0$, et x aussi : forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Conjuguée. Pour $x\neq 0$ et $x\geq -9$:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\\&=\frac{(x+9)-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}.\end{aligned}$$

Passage à la limite. Comme $x+9$ tend vers 9, $\sqrt{x+9}$ tend vers 3 (limite de la racine carrée d'une fonction). Par somme puis par quotient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\frac{1}{6}.$$

Contrôle : pour $x=0{,}01$, le quotient vaut environ $0{,}1666$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une forme 0 sur 0

En devoir, montre l'indétermination, puis la factorisation, puis la limite. Pour $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$, écris d'abord : « En 1, on obtient la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. »

Factorise ensuite, pour $x\neq 1$ et $x\neq -1$:

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}\\&=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}\\&=\frac{x+3}{x+1}.\end{aligned}$$

Termine par : « D'après la limite en un réel d'une fonction rationnelle, le quotient tend vers $\frac{4}{2}=2$. »

Chaque ligne de cette rédaction compte.

Limites et ordre

Une quantité coincée

Imagine une quantité $f(x)$ dont tu ne connais pas la formule. Tu sais seulement que, pour $x \geq 1$, elle reste entre $2-\frac{1}{x}$ et $2+\frac{1}{x}$.

Autrement dit, l'écart entre $f(x)$ et 2 ne dépasse jamais $\frac{1}{x}$. Pour tout $x \geq 1$:

$$|f(x)-2| \leq \frac{1}{x}.$$

Or cet écart maximal fond quand x grandit.

Devine : Coincée près de 2

Avec ces informations, que peux-tu dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

A. Elle tend vers 2.

Juste.

Juste : l'écart avec 2 est plus petit que $\frac{1}{x}$, qui tend vers 0.

B. Elle tend vers 0.

Faux.

C'est l'écart $\frac{1}{x}$ qui tend vers 0, pas $f(x)$ elle-même.

C. On ne peut rien dire sans formule.

Faux.

L'encadrement suffit : il coince $f(x)$ de plus en plus près de 2.

D. Elle tend vers $+\infty$.

Faux.

$f(x)$ reste entre 1 et 3 pour $x \geq 1$: elle ne peut pas devenir très grande.

Correction

Pour $x=100$, $f(x)$ est entre $1{,}99$ et $2{,}01$; pour $x=10\,000$, entre $1{,}9999$ et $2{,}0001$.

> Les deux bornes se resserrent autour de 2, et $f(x)$ est coincée entre elles. Elle tend donc vers 2 : c'est la limite par encadrement.

Encadrement

Propriété : Limite par encadrement

Soit f et u deux fonctions, et ℓ un réel. Si, pour tout x assez grand,

$$|f(x) - \ell| \leq u(x),$$

et si $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Le résultat reste vrai en $-\infty$ (pour tout x négatif assez grand en valeur absolue) et en un réel a (pour tout x distinct de a assez proche de a), ainsi qu'à droite ou à gauche en a.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : avec la partie entière

Note $E(x)$ la partie entière de x : le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $E(3{,}7) = 3$. Pour tout réel x :

$$x - 1 < E(x) \leq x.$$

Pour $x > 0$, on divise par x, qui est positif :

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1.$$

Donc, pour tout $x > 0$:

$$\left| \frac{E(x)}{x} - 1 \right| < \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, la limite par encadrement donne :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1.$$

Vérifie : Une fonction de contrôle

On sait que $|g(x) - 4| \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} g(x)$?

A. 3

Faux.

3 est le numérateur de la fonction de contrôle, pas la limite de g.

B. 0

Faux.

C'est $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 : l'écart entre $g(x)$ et 4 disparaît.

C. 4

Juste.

Juste : l'écart avec 4 est contrôlé par une fonction qui tend vers 0.

D. On ne peut pas conclure.

Faux.

Toutes les conditions de la limite par encadrement sont réunies.

Correction

D'après les limites des fonctions de référence en l'infini et par produit, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}} = 0$. L'écart $|g(x) - 4|$ est inférieur à cette quantité.

D'après la limite par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$.

Comparaison

Propriété : Limite infinie par comparaison

Soit f et u deux fonctions.

- Si, pour tout x assez grand, $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si, pour tout x assez grand, $f(x) \leq u(x)$, et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Ces résultats restent vrais en $-\infty$ et en un réel a, ainsi qu'à droite ou à gauche en a.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : une minoration qui suffit

L'atelier imaginaire lance des vestes. Le gérant ne connaît pas la formule de leur coût total $K(x)$, en DH. Il sait seulement que $K(x) \geq 60x + 900$ pour tout $x \geq 0$; ces chiffres sont inventés.

Par produit et par somme, $\lim_{x\to+\infty}(60x + 900) = +\infty$. D'après la limite infinie par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = +\infty.$$

Le coût reste au-dessus d'une quantité qui part vers $+\infty$: il est entraîné avec elle.

Méthode et piège

Méthode : conclure avec une inégalité

1. **Écris** l'inégalité utile : $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ pour une limite finie, ou $f(x) \geq u(x)$ pour une limite $+\infty$.
2. **Précise** les x pour lesquels elle est vraie : $x > 0$, $x \geq 1$, par exemple.
3. **Calcule** la limite de u, avec les limites de référence et les opérations.
4. **Conclus** en citant la limite par encadrement ou la limite infinie par comparaison.

Attention : le sens de l'inégalité

✗ « $f(x) \leq x^2$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. »

✓ Majorer par une fonction qui tend vers $+\infty$ ne prouve rien. La fonction constante égale à 1 vérifie aussi $1 \leq x^2$ pour $x \geq 1$, et sa limite vaut 1.

Pour une limite $+\infty$, il faut **minorer** $f(x)$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Encadrer, puis comparer

1. Pour $x > 0$, on admet que $|k(x) - 5| \leq \dfrac{2}{x^2}$. Donne $\lim_{x\to+\infty} k(x)$.
2. Un fournisseur imaginaire livre l'atelier en rouleaux de tissu. Pour x rouleaux, sa facture $F(x)$, en DH, vérifie $F(x) \geq 2x^2 - 40x$ pour $x \geq 0$ (chiffres inventés). Montre que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la question 1, cherche la limite de $\dfrac{2}{x^2}$ en $+\infty$.
Indice 2
Pour la question 2, cherche la limite de la quantité qui minore $F(x)$.
Indice 3
Point délicat : pour une limite $+\infty$, l'inégalité doit aller dans le sens « plus grand que ».

Réponse

Question 1. D'après les limites des fonctions de référence en l'infini et par produit, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$. D'après la limite par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = 5.$$

Question 2. D'après la limite en l'infini d'un polynôme, $2x^2 - 40x$ a la même limite que $2x^2$, soit $+\infty$.

Comme $F(x) \geq 2x^2 - 40x$ pour $x \geq 0$, la limite infinie par comparaison donne :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

La facture dépasse tout montant pour une très grosse livraison.

Remarque : Coin devoir : rédiger un encadrement

En devoir, l'inégalité ne suffit pas : nomme la propriété et la limite de contrôle.

Écris : « Pour tout $x \geq 1$, $|f(x) - 2| \leq \dfrac{1}{x}$. Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après la limite par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. »

Sans la phrase qui commence par « Or », la conclusion n'est pas justifiée.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : trois réflexes

- **Où regardes-tu ?** En $+\infty$, en $-\infty$, en un réel, à droite ou à gauche : la bonne règle en dépend.
- **Nomme la règle.** Chaque limite calculée cite l'opération ou la limite de référence qui la donne.
- **Surveille les formes indéterminées.** Devant l'une d'elles, transforme l'écriture avant de conclure : factorisation, terme de plus haut degré ou expression conjuguée.

Le mot du prof. Une limite, c'est ce que devient une quantité quand on pousse sa variable vers un endroit.

Avant chaque calcul, demande-toi où tu regardes, puis nomme la règle. Tu t'en serviras dès le chapitre « Dérivabilité », et chaque fois qu'une grande production fera baisser un coût moyen.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Limite d'une fonction numérique » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)