BURHAN

Résumé : Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

Comparer deux fonctions

> **À retenir : Comparer, c'est regarder chaque abscisse**
>
> Pour comparer f et g sur un intervalle I, tu compares $f(x)$ et $g(x)$ pour chaque réel x de I. Sur un dessin, tu regardes quelle courbe passe au-dessus de l'autre.
>
> En gestion, la question devient concrète : pour quelles quantités la recette dépasse-t-elle le coût ?

Définition : Comparaison de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

- On dit que f est **inférieure** à g sur I, et on écrit $f \leq g$ sur I, si pour tout réel x de I : $f(x) \leq g(x)$.
- On dit que f est **strictement inférieure** à g sur I si pour tout réel x de I : $f(x) < g(x)$.
- Les fonctions f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de définition D et si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x de D.

Interprétation graphique. Dans un repère, $f \leq g$ sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}_g$ (les points de même abscisse x ont pour ordonnées $f(x) \leq g(x)$).

Méthode : le signe de la différence

1. **Forme** la différence $f(x) - g(x)$ et réduis-la.
2. **Factorise**, puis dresse le tableau de signes (produit de facteurs, trinôme).
3. **Traduis** chaque signe : différence négative ou nulle, $f(x) \leq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$; différence nulle, point commun aux deux courbes.

Exemple

Situation (données fictives). Un atelier fabrique x centaines d'objets, avec $x \in [0, 6]$. En milliers de dirhams, sa recette vaut $R(x) = 6x$ et son coût $C(x) = x^2 + x + 6$.

Différence. Pour tout x de $[0, 6]$:

$$\begin{aligned} & R(x) - C(x) \\ & = -x^2 + 5x - 6 \\ & = -(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

Signe. Le produit $(x-2)(x-3)$ est négatif entre ses racines 2 et 3. Donc $R(x) - C(x) \geq 0$ pour $x \in [2, 3]$, et $R(x) - C(x) < 0$ ailleurs sur $[0, 6]$.

Lecture. Sur $[2, 3]$, la courbe de la recette passe au-dessus de celle du coût : l'atelier ne perd pas d'argent.

Signe de la différence entre recette et coût sur [0, 6]

x	0		2		3		6
$R(x) - C(x)$		−	0	+	0	−	

Propriété : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère, et c un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = c$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = c$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq c$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de cette droite ou sur elle.
- Pour x commun aux ensembles de définition de f et g : les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$ ou sur elle (respectivement strictement au-dessous).

Méthode : résoudre sur un graphique

1. **Repère** la droite horizontale d'équation $y = c$, ou la seconde courbe.
2. **Marque** les points d'intersection, puis la partie de $\mathcal{C}_f$ placée du bon côté.
3. **Projette** ces points sur l'axe horizontal : la réponse est un ensemble de valeurs de x.
4. **Rédige** l'ensemble des solutions et choisis chaque crochet. Là où les courbes se coupent : fermé pour $\leq$ ou $\geq$, ouvert pour $<$ ou $>$. Au bord de l'intervalle étudié : fermé si ce bord en fait partie et que l'inégalité y est vraie. Vers $-\infty$ ou $+\infty$: crochet toujours ouvert. Une valeur lue entre deux graduations est approchée : dis-le.

Exemple

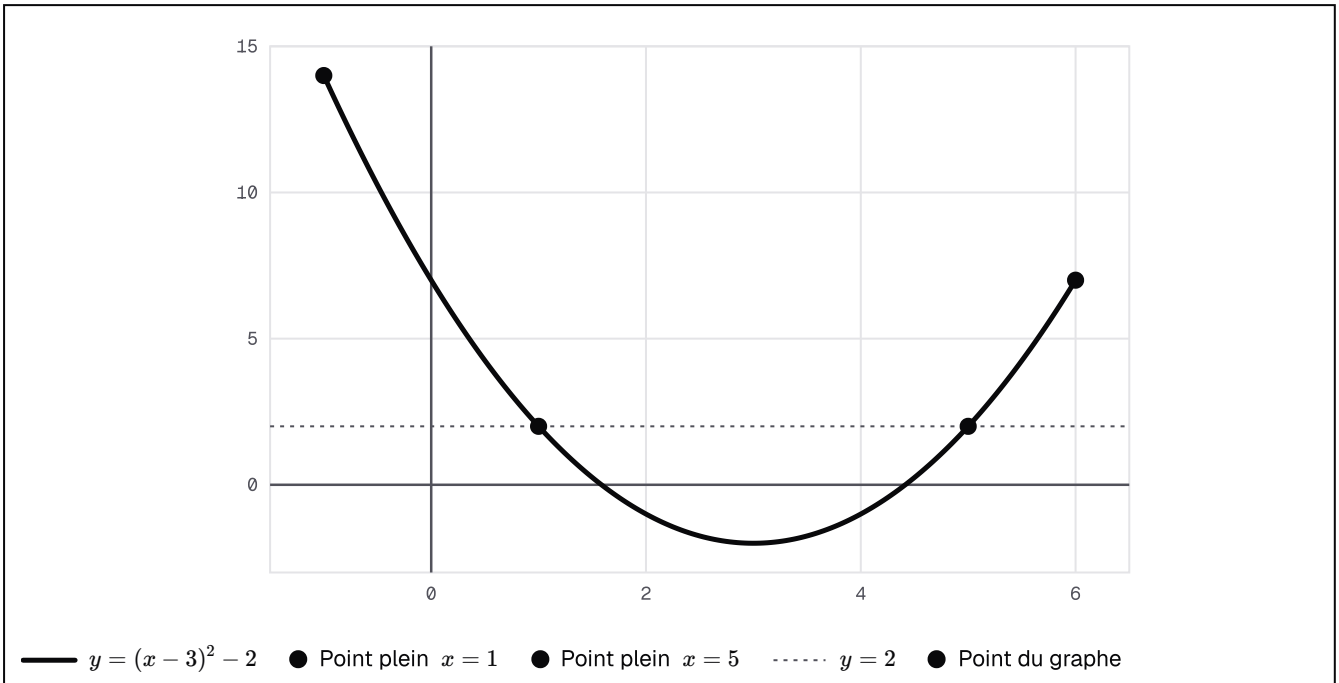
Énoncé. Sur $[-1, 6]$, on trace la courbe de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 2$ et la droite d'équation $y = 2$. Résous $f(x) = 2$, $f(x) \leq 2$, $f(x) < 2$ et $f(x) > 2$.

Intersections. La courbe coupe la droite aux points d'abscisses 1 et 5. Le calcul le confirme : $f(1) = 4 - 2 = 2$ et $f(5) = 4 - 2 = 2$. Les solutions de $f(x) = 2$ sont 1 et 5.

Lecture. Entre 1 et 5, la courbe est sous la droite ; ailleurs sur $[-1, 6]$, elle est au-dessus. Le calcul le confirme : $(x-3)^2 \leq 4$ équivaut à $-2 \leq x - 3 \leq 2$, soit $1 \leq x \leq 5$.

Crochets. On choisit chaque crochet :

- $f(x) \leq 2$ donne $[1, 5]$: l'inégalité est large ;
- $f(x) < 2$ donne $]1, 5[$: en 1 et en 5, il y a égalité ;
- $f(x) > 2$ donne $[-1, 1[\cup]5, 6]$: les bornes -1 et 6 sont dans l'intervalle d'étude et vérifient l'inégalité, car $f(-1) = 14$ et $f(6) = 7$.



Sur [–1, 6], la courbe de f(x) = (x – 3)² – 2 passe sous la droite d'équation y = 2 entre les abscisses 1 et 5, et au-dessus de part et d'autre.

Attention : On répond par des abscisses

Pour $f(x) \leq c$, répondre par des valeurs de $f(x)$ est faux : ce sont des ordonnées. On cherche des réels x, donc on lit l'axe horizontal.

Une lecture sur un dessin reste approchée ; quand c'est possible, un calcul la confirme.

Fonction majorée, minorée, bornée

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de I, $f(x) \leq M$. Un tel réel M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de I, $f(x) \geq m$. Un tel réel m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I : il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I, $m \leq f(x) \leq M$.

En symboles, f est majorée sur I si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M.$$

Méthode : encadrer f(x)

1. **Écris** l'hypothèse sur x sous forme d'encadrement.
2. **Remonte** jusqu'à $f(x)$, une règle à la fois : ajouter un nombre ; multiplier par un réel positif (même sens) ou négatif (sens contraire) ; passer aux inverses de nombres strictement positifs (sens contraire).
3. **Vérifie** que les deux bornes obtenues sont des nombres fixes, sans x.
4. **Autre piste** : un tableau de variations qui montre un maximum ou un minimum fournit directement un majorant ou un minorant.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{12}{x+2}$. Montre que f est bornée.

Inverses. Pour $x \geq 0$, on a $x + 2 \geq 2 > 0$. Le passage aux inverses change le sens :

$$0 < \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}.$$

Produit. On multiplie par 12, réel positif :

$$0 < \frac{12}{x+2} \leq 6.$$

Somme. On ajoute 2 : pour tout $x \geq 0$,

$$2 < f(x) \leq 8.$$

Conclusion. La fonction f est minorée par 2 et majorée par 8 : elle est bornée sur $[0, +\infty[$.

Remarque : Un majorant n'est jamais seul

Si 8 majore f sur I, alors 9 ou 100 la majorent aussi. Pour dire que f est majorée, un seul majorant suffit, même s'il n'est pas le plus petit.

Attention : Une borne qui dépend de x ne prouve rien

L'inégalité $f(x) \leq f(x) + 3$ est vraie, mais elle ne montre pas que f est majorée : la borne $f(x) + 3$ bouge avec x.

Un majorant est un nombre fixé **une fois pour toutes**, valable pour tous les x de I. Dans l'écriture en symboles, « il existe M » précède « pour tout x ».

Monotonie et taux de variation

Définition : Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$).
- f est **constante** sur I si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous réels x_1 et x_2 de I.

f est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur I si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.

Propriété : Monotonie et taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour deux réels distincts x_1 et x_2 de I, on appelle **taux de variation** de f entre x_1 et x_2 le réel :

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) \geq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) > 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- De même, f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) \leq 0$ (respectivement $T(x_1, x_2) < 0$) pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

Méthode : le signe du taux de variation

1. **Choisis** deux réels distincts x_1 et x_2 dans I.
2. **Développe** $f(x_2) - f(x_1)$ et mets $x_2 - x_1$ en facteur ; après division, il reste $T(x_1, x_2)$.
3. **Étudie** le signe de $T(x_1, x_2)$ avec les inégalités que vérifient x_1 et x_2 dans I.
4. **Conclus** : taux strictement positif pour tous ces couples, f strictement croissante sur I ; taux strictement négatif, f strictement décroissante.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$. Étudie son sens de variation sur $[4, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 4]$.

Taux. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. On factorise :

$$\begin{aligned} & f(x_2) - f(x_1) \\ & = (x_2^2 - x_1^2) - 8(x_2 - x_1) \\ & = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 8). \end{aligned}$$

On divise par $x_2 - x_1$, non nul : $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 8$.

Premier intervalle. Si $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 4$ et $x_1 \neq x_2$, l'un au moins est strictement supérieur à 4, donc $x_1 + x_2 > 8$ et $T(x_1, x_2) > 0$: f est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.

Second intervalle. Si $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 4$ et $x_1 \neq x_2$, l'un au moins est strictement inférieur à 4, donc $x_1 + x_2 < 8$ et $T(x_1, x_2) < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$.

Valeur en 4. On calcule $f(4) = 16 - 32 + 3 = -13$.

Variations de la fonction de l'exemple, de minimum −13 en 4

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		↘	-13	↗	

Propriété : Variations de f + λ et de λf

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. On note $f + \lambda$ la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ et λf la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$.

- Les fonctions $f + \lambda$ et f ont le **même sens de variation** sur I.
- Si $\lambda > 0$, les fonctions λf et f ont le **même sens de variation** sur I.
- Si $\lambda < 0$, les fonctions λf et f ont des **sens de variation contraires** sur I.

Ces règles restent vraies pour une monotonie stricte.

Exemple

Énoncé. Avec la fonction f précédente, étudie $g = f + 13$ et $h = -3f$ sur $[4, +\infty[$.

Fonction g. Ajouter 13 ne change pas le sens : g est strictement croissante sur $[4, +\infty[$. Sa valeur en 4 devient $-13 + 13 = 0$, son minimum.

Fonction h. On multiplie par -3, réel négatif : le sens s'inverse, et h est strictement décroissante sur $[4, +\infty[$. Sa valeur en 4 vaut $-3 \times (-13) = 39$: c'est le maximum de h sur cet intervalle.

Attention : Un sens de variation se donne sur un intervalle

La fonction inverse décroît sur $]-\infty, 0[$ et décroît sur $]0, +\infty[$. Elle n'est pourtant pas décroissante sur la réunion de ces deux intervalles : $-2 < 2$ et $\frac{1}{-2} < \frac{1}{2}$, l'ordre est conservé.

Donne toujours le sens de variation intervalle par intervalle.

Attention : Un facteur négatif change les flèches et les valeurs

Pour $h = -3f$ ci-dessus, le minimum -13 de f devient un **maximum** de h, égal à 39 et non à -13.

Pour $f + \lambda$, les flèches restent les mêmes, mais chaque valeur du tableau est décalée de λ.

Extremums et image d'un intervalle

Définition : Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si, pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$. On dit que f atteint son maximum en a.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si, pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.
- $f(a)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur l'intervalle $I \cap J$.

Propriété : Extremum et fonction bornée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f admet un maximum $f(a)$ sur I, alors f est majorée sur I et $f(a)$ est le plus petit de ses majorants.
- Si f admet un minimum $f(b)$ sur I, alors f est minorée sur I et $f(b)$ est le plus grand de ses minorants.
- Si f admet un maximum et un minimum sur I, alors f est bornée sur I.

La réciproque est fausse : une fonction majorée sur I n'admet pas toujours de maximum sur I (un majorant n'est pas toujours une valeur prise par f).

Méthode : lire un extremum ou une image

1. **Sur une courbe**, ne garde que la portion dont les abscisses sont dans I : son point le plus haut donne le maximum, son point le plus bas le minimum. Note l'abscisse où chacun est atteint.
2. **Sur un tableau de variations**, compare les valeurs placées aux bornes et aux changements de sens.
3. **Image de I** : c'est l'ensemble des valeurs $f(x)$ quand x parcourt I. Sur un tableau de variations **donné**, on convient que chaque flèche passe par tous les nombres situés entre ceux de ses deux bouts (convention de lecture, admise). L'image s'écrit donc avec la plus petite et la plus grande valeur lues sur I. Ce n'est pas le résultat d'un calcul.
4. **Vérifie** qu'une valeur annoncée comme maximum est bien atteinte : un majorant jamais atteint n'est pas un maximum.

Tableau de variations d'une fonction f sur [−1, 5]

x	-1		1		4		5
$f(x)$	2	↗	6	↘	-3	↗	0

Exemple

Énoncé. Une fonction f a le tableau de variations ci-dessus sur $[-1, 5]$. Donne ses extremums, puis l'image de $[-1, 5]$ et celle de $[4, 5]$.

Maximum. Les valeurs candidates sont $f(1) = 6$ et $f(5) = 0$: le maximum vaut 6, atteint en $x = 1$.

Minimum. Les candidates sont $f(-1) = 2$ et $f(4) = -3$: le minimum vaut -3, atteint en $x = 4$.

Maximum local. Sur $[4, 5]$, f croît jusqu'à $f(5) = 0$: c'est un maximum local. Ce n'est pas le maximum sur $[-1, 5]$, qui vaut 6.

Images. L'image de $[-1, 5]$ est $[-3, 6]$. Sur $[4, 5]$, f croît de -3 à 0 : l'image de $[4, 5]$ est $[-3, 0]$.

Attention : Majorant ou maximum : la valeur doit être atteinte

Sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\frac{6x}{x+2} = 6 - \frac{12}{x+2} < 6.$$

Le nombre 6 est donc un majorant. Mais l'égalité $\dfrac{6x}{x+2} = 6$ donnerait $6x = 6x + 12$, ce qui est impossible. Le majorant 6 n'est jamais atteint : ce n'est pas un maximum.

Cela ne suffit pas à dire qu'il n'y a **aucun** maximum. Ici, pour tout $a \geq 0$:

$$6 - \frac{12}{a+3} > 6 - \frac{12}{a+2}.$$

La valeur en $a+1$ dépasse toujours la valeur en a : aucune valeur n'est la plus grande, et la fonction n'a pas de maximum sur $[0, +\infty[$.

Composée de deux fonctions

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et g une fonction définie sur un ensemble D_g. La **composée** de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ (lire « g rond f ») définie par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

pour tout réel x tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. Son ensemble de définition est donc :

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ ; \ f(x) \in D_g\}.$$

En général, $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales.

Méthode : décomposer et définir une composée

1. **Décompose** : cherche l'opération faite d'abord sur x (c'est u), puis celle faite sur le résultat (c'est g). Alors $h = g \circ u$.
2. **Ensemble de définition** : x doit être dans D_u et $u(x)$ dans D_g ; résous cette condition.
3. **Expression** : remplace la variable de g par $u(x)$.
4. **Contrôle** : calcule une valeur dans les deux ordres pour vérifier lequel est le bon.

Exemple

Énoncé. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x$, et g la fonction racine carrée. Détermine $g \circ u$.

Ensemble de définition. La fonction g est définie sur $[0, +\infty[$. On veut $4 - x \geq 0$, soit $x \leq 4$: $D_{g\circ u} =]-\infty, 4]$.

Expression. Pour tout $x \leq 4$, $(g \circ u)(x) = \sqrt{4 - x}$.

Contrôle. On a $(g \circ u)(0) = \sqrt{4} = 2$, alors que $(u \circ g)(0) = 4 - \sqrt{0} = 4$: l'ordre compte.

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I, et g une fonction définie et monotone sur un intervalle J, telles que $f(x) \in J$ pour tout réel x de I.

- Si f et g ont le **même sens de variation** (toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des **sens de variation contraires**, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Ces règles restent vraies lorsque f et g sont strictement monotones, en remplaçant « croissante » et « décroissante » par « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

Méthode : des variations sans nouveau calcul

1. **Reconnais** la forme : $f + \lambda$, λf ou $g \circ u$, avec des fonctions déjà étudiées.
2. **Pour f + λ**, garde les flèches de f. **Pour λf**, garde-les si $\lambda > 0$, inverse-les si $\lambda < 0$.
3. **Pour une composée** $g \circ u$ sur I, vérifie d'abord que $u(x)$ reste dans un intervalle J où g est monotone. Mêmes sens : la composée croît. Sens contraires : elle décroît.
4. **Recalcule** les valeurs du tableau : seules les flèches se déduisent sans calcul.

Exemple

Énoncé. Étudie le sens de variation de $x \mapsto \sqrt{4 - x}$ sur $]-\infty, 4]$.

Fonction intérieure. La fonction $u : x \mapsto 4 - x$ est affine de coefficient -1 : elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$, et $u(x) \geq 0$ pour $x \leq 4$.

Fonction extérieure. La racine carrée est strictement croissante sur $J = [0, +\infty[$.

Conclusion. Les sens sont contraires : $x \mapsto \sqrt{4 - x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$. Une demande de cette forme, fonction d'un prix x, baisse donc quand le prix monte.

Attention : D'abord u, ensuite g

$g \circ u$ se lit de droite à gauche : on applique u, puis g.

Avec $u(x) = 3x$ et $g(x) = x + 2$, on trouve $(g \circ u)(x) = 3x + 2$ mais $(u \circ g)(x) = 3x + 6$. En $x = 0$, cela donne 2 et 6.

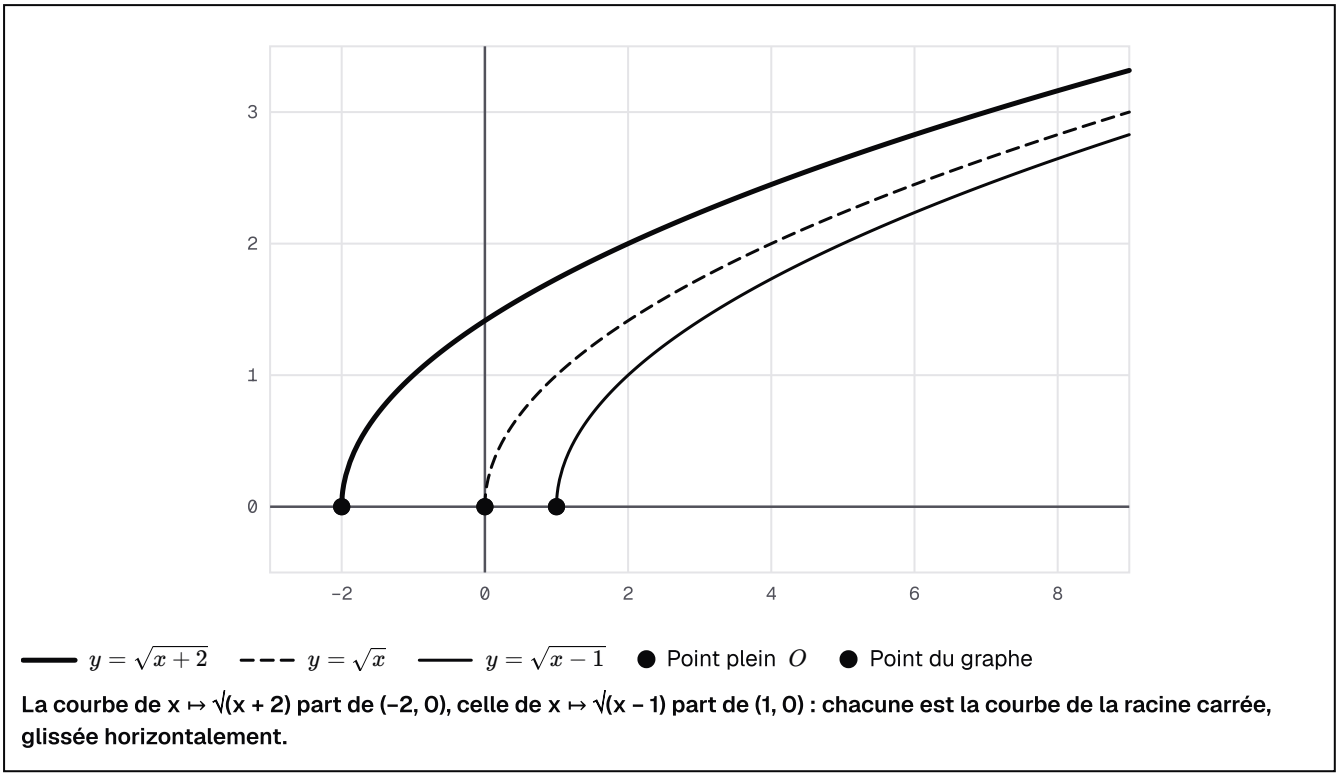
Pour l'ensemble de définition, n'oublie pas la condition $u(x) \in D_g$.

Les fonctions x ↦ √(x + a) et x ↦ ax³

Propriété : La fonction x ↦ √(x + a)

Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + a}$.

- f est définie sur l'intervalle $[-a, +\infty[$.
- f est **strictement croissante** sur $[-a, +\infty[$ et $f(-a) = 0$ est son minimum.
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de f est l'image de la courbe de la fonction racine carrée par la **translation de vecteur** $-a\,\vec{i}$: on la décale horizontalement de $|a|$ unités, vers la gauche si $a > 0$, vers la droite si $a < 0$.

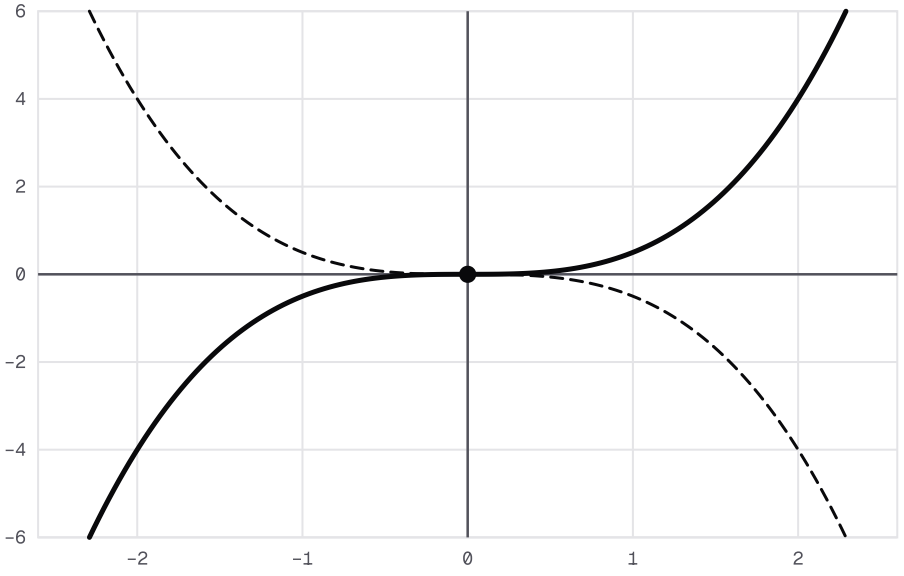


La courbe de x ↦ √(x + 2) part de (−2, 0), celle de x ↦ √(x − 1) part de (1, 0) : chacune est la courbe de la racine carrée, glissée horizontalement.

Propriété : La fonction x ↦ ax³

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$.

- Si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$: la courbe de f est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère, et elle passe par O.



Pour a = 1/2, la courbe de x ↦ ax³ monte ; pour a = −1/2, elle descend. Toutes deux passent par O, leur centre de symétrie.

Méthode : tracer une de ces deux courbes

1. **Ensemble de définition** : $[-a, +\infty[$ pour $x \mapsto \sqrt{x+a}$, $\mathbb{R}$ pour $x \mapsto ax^3$.
2. **Variations** : la racine décalée croît toujours ; $x \mapsto ax^3$ croît si $a > 0$ et décroît si $a < 0$.
3. **Valeurs simples** : pour la racine, choisis x tel que $x + a$ vaille 0, 1, 4 ou 9 ; pour le cube, prends x entier entre -2 et 2.
4. **Trace** une courbe régulière qui passe par ces points et suit le tableau. Pour $x \mapsto ax^3$, contrôle la symétrie par rapport à l'origine.

Exemple

Énoncé. Étudie la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

Domaine. La condition $x + 3 \geq 0$ donne $D_f = [-3, +\infty[$.

Variations. La fonction f est strictement croissante sur $[-3, +\infty[$, de minimum $f(-3) = 0$.

Valeurs. On trouve $f(-2) = 1$, $f(1) = 2$, $f(6) = 3$.

Courbe. C'est la courbe de la racine carrée décalée de 3 unités vers la gauche.

Variations de la racine décalée de l'exemple

x	-3	$+\infty$
$\sqrt{x+3}$	0	↗

Exemple

Énoncé. Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3$.

Variations. Le coefficient -2 est négatif : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Valeurs. On trouve $f(-2) = 16$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = -16$.

Symétrie. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -2(-x)^3 \\ &= 2x^3 \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Comparer deux fonctions** : signe de $f(x) - g(x)$, puis position des courbes.
- **Résoudre sur un graphique** : droite $y = c$ ou seconde courbe, lecture des abscisses.
- **Montrer qu'une fonction est bornée** : encadrement de $f(x)$ à partir de $x \in I$.
- **Trouver un sens de variation** : signe du taux $T(x_1, x_2)$, ou forme $f + \lambda$, λf, $g \circ u$.
- **Donner un extremum ou une image** : lecture du tableau de variations ou de la courbe.
- **Étudier une composée** : décomposition, ensemble de définition, puis règle des sens.
- **Tracer une racine décalée ou un cube** : domaine, variations, valeurs simples.

Taux de variation, x_1 et x_2 distincts

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonction majorée sur I

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M$$

Fonction f + λ

$$(f + \lambda)(x) = f(x) + \lambda$$

Fonction λf

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Composée

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Ensemble de définition d'une composée

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f\ ;\ f(x) \in D_g\}$$

Domaine de la racine décalée

$$x + a \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-a, +\infty[$$

Symétrie de la courbe d'un cube

$$a(-x)^3 = -ax^3$$

À retenir : Rédiger en devoir surveillé

Chaque conclusion cite son outil : « d'après le signe du taux de variation », « par composée de deux fonctions de sens contraires ».

Pour un extremum, donne la valeur **et** l'abscisse où elle est atteinte.

Pour une lecture graphique, écris l'ensemble des solutions avec ses crochets, et précise si les valeurs sont approchées.