BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Bénéfice d'une entreprise : comparaison et maximum

Une entreprise fictive produit et vend x centaines d'appareils par mois, avec $x \in [0, 10]$. Sa recette et son coût de production, en milliers de dirhams, sont $R(x) = 12x$ et $C(x) = x^2 + 4x + 7$. On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice.

1. 0,5 pts

Montrer que $B(x) = -x^2 + 8x - 7$, puis que $B(x) = -(x - 1)(x - 7)$.

INDICE

Début : retranche chaque terme de $C(x)$. **Ensuite :** développe la forme factorisée.

2. 1 pts

En déduire les productions de $[0, 10]$ pour lesquelles la recette est supérieure ou égale au coût. Interpréter à l'aide des courbes de R et de C.

INDICE

Outil : $R(x) \geq C(x)$ équivaut à $B(x) \geq 0$.

3. 1 pts

Montrer que $B(x) = 9 - (x - 4)^2$. En déduire que B est majorée par 9 sur $[0, 10]$ et que 9 est le maximum de B.

INDICE

Début : développe $(x - 4)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul ; cherche où il s'annule.

4. 1,5 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0, 10]$. Montrer que $T(x_1, x_2) = 8 - (x_1 + x_2)$. En déduire que B est strictement croissante sur $[0, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, 10]$.

INDICE

Début : $B(x_2) - B(x_1) = -(x_2^2 - x_1^2) + 8(x_2 - x_1)$. **Ensuite :** encadre x_1 et x_2 sur chaque intervalle et compare $x_1 + x_2$ à 8.

5. 1 pts

Dresser le tableau de variations de B sur $[0, 10]$ et donner le minimum de B sur cet intervalle.

INDICE

Début : calcule $B(0)$ et $B(10)$, puis compare-les.

Exercice 2 — 4 pts

Fréquentation d'une boutique en ligne : lecture d'un tableau

Une boutique en ligne fictive étudie le nombre de visiteurs connectés, en dizaines, x heures après l'ouverture de 8 h, pour $x \in [0, 12]$. Ce nombre est noté $f(x)$. Chaque variation est stricte ; le tableau ci-dessous les résume :

x	0		4		10		12
$f(x)$	20	croît	50	décroît	14	croît	18

On donne de plus : $f(2) = 30$ et $f(7) = 30$.

1. — 0,5 pts

Donner le maximum et le minimum de f sur $[0, 12]$, et les heures où ils sont atteints.

INDICE

Outil : compare $f(0)$, $f(4)$, $f(10)$ et $f(12)$.

2. — 0,5 pts

En déduire que $14 \leq f(x) \leq 50$ pour tout $x \in [0, 12]$, puis que f est bornée sur $[0, 12]$, en citant la propriété utilisée.

INDICE

Outil : un maximum fournit un majorant, un minimum un minorant.

3. — 1,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 30$ a exactement deux solutions dans $[0, 12]$: 2 et 7.

INDICE

Début : sépare les trois intervalles du tableau ; sur chacun, f est strictement monotone. **Point délicat :** sur $[10, 12]$, majore $f(x)$.

4. — 1 pts

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 30$ et interpréter le résultat.

INDICE

Début : sur $[0, 4]$, compare x à 2 ; sur $[4, 10]$, compare x à 7.

5. — 0,5 pts

Donner l'image de l'intervalle $[4, 12]$.

INDICE

Début : par convention de lecture d'un tableau donné, repère dans le tableau la valeur la plus basse et la valeur la plus haute entre $x = 4$ et $x = 12$.

Exercice 3 — 5 pts

Prix et demande : une composée décroissante

Un fabricant fictif fixe le prix d'un article à x centaines de dirhams, avec $x \geq 0$. Une étude fictive modélise la demande mensuelle, en milliers d'articles, par $D(x) = 3 + \dfrac{24}{x^2+4}$. On pose, pour $x \geq 0$, $u(x) = x^2 + 4$ et, pour tout réel $t > 0$, $g(t) = 3 + \dfrac{24}{t}$.

1. — 0,75 pts

Montrer que $u(x) \geq 4$ pour tout $x \geq 0$, puis que $D = g \circ u$ sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Début : vérifie que $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de g, puis calcule $g\big(u(x)\big)$.

2. — 1 pts

Montrer que u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : le taux de variation ; montre que $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

3. — 0,75 pts

Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Outil : la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$; pense à λf, puis à $f + \lambda$.

4. — 1 pts

En déduire que D est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Interpréter.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; u envoie $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

5. — 1,5 pts

Montrer que $3 < D(x) \leq 9$ pour tout $x \geq 0$. Le nombre 9 est-il le maximum de D ? Le nombre 3 est-il un minimum de D ?

INDICE

Début : pars de $x^2 + 4 \geq 4$ et passe aux inverses. **Ensuite :** calcule $D(0)$.

Exercice 4 5 pts

Coût moyen de production d'une coopérative

Une coopérative fictive produit x centaines de pots de miel, avec $x \in [1, 12]$. Le coût moyen de production d'un pot, en dirhams, est $M(x) = x + 2 + \dfrac{16}{x}$ (données fictives).

1. 1,25 pts

Montrer que $M(x) - 10 = \dfrac{(x-4)^2}{x}$ pour tout $x \in [1, 12]$. En déduire que $M(x) \geq 10$ et que 10 est le minimum de M sur $[1, 12]$.

INDICE

Début : écris $M(x) - 10$ comme un seul quotient, de dénominateur x. **Ensuite :** reconnais un carré au numérateur, puis regarde le signe du dénominateur.

2. 1 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[1, 12]$. Montrer que $T(x_1, x_2) = 1 - \dfrac{16}{x_1 x_2}$.

INDICE

Début : $\dfrac{16}{x_2} - \dfrac{16}{x_1} = \dfrac{16(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$.

3. 1 pts

Montrer que, si x_1 et x_2 sont deux réels distincts de $[1, 4]$, alors $0 < x_1 x_2 < 16$. En déduire que M est strictement décroissante sur $[1, 4]$.

INDICE

Outil : multiplie les encadrements de x_1 et de x_2 (nombres positifs) et compare à 16. **Ensuite :** compare $\dfrac{16}{x_1 x_2}$ à 1.

4. 1 pts

Montrer de même que M est strictement croissante sur $[4, 12]$.

INDICE

Outil : même démarche ; cette fois, compare $x_1 x_2$ à 16 par l'autre côté.

5. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de M sur $[1, 12]$, puis montrer que le coût moyen le plus élevé sur $[1, 12]$ vaut 19 dirhams.

INDICE

Début : calcule $M(1)$ et $M(12)$, puis compare-les.

Exercice 5 5 pts

Une racine décalée et une droite

On considère les fonctions f et g définies sur $[-25, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+25}$ et $g(x) = \dfrac{x+25}{10}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère orthonormé.

1. 1 pts

Justifier que f est strictement croissante sur $[-25, +\infty[$, et préciser la translation qui transforme la courbe de la racine carrée en $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 25$.

2. 0,5 pts

Calculer $f(-24)$, $f(0)$, $f(11)$ et $f(75)$, puis $g(-25)$ et $g(75)$.

INDICE

Début : pour f, calcule d'abord $x + 25$: c'est un carré parfait.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in [-25, +\infty[$, $f(x)^2 - g(x)^2 = \dfrac{(x+25)(75-x)}{100}$.

INDICE

Début : $g(x)^2 = \dfrac{(x+25)^2}{100}$; mets $x + 25$ en facteur.

4. 0,5 pts

Justifier que $f(x) + g(x) > 0$ pour tout $x > -25$.

INDICE

Début : pour $x > -25$, quel est le signe de $x + 25$?

5. 1 pts

On admet que, pour $x > -25$, $f(x) - g(x) = \dfrac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) + g(x)}$. Montrer que, sur $]-25, +\infty[$, $f(x) - g(x)$ a le signe de $(x+25)(75-x)$.

INDICE

Outil : l'égalité vient de $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. **Ensuite :** utilise les questions 3 et 4.

6. 1 pts

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$, leurs points communs, et l'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$.

INDICE

Début : pour $x > -25$, le facteur $x + 25$ est positif : seul le signe de $75 - x$ compte. N'oublie pas $x = -25$.