BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Bénéfice d'une entreprise : comparaison et maximum

Une entreprise fictive produit et vend x centaines d'appareils par mois, avec $x \in [0, 10]$. Sa recette et son coût de production, en milliers de dirhams, sont $R(x) = 12x$ et $C(x) = x^2 + 4x + 7$. On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice.

1. 0,5 pts

Montrer que $B(x) = -x^2 + 8x - 7$, puis que $B(x) = -(x - 1)(x - 7)$.

INDICE

Début : retranche chaque terme de $C(x)$. **Ensuite :** développe la forme factorisée.

CORRIGÉ

Forme développée. Pour tout $x \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} & B(x) \\ & = 12x - (x^2 + 4x + 7) \\ & = -x^2 + 8x - 7. \end{aligned}$$

Forme factorisée.

$$\begin{aligned} & -(x - 1)(x - 7) \\ & = -(x^2 - 8x + 7) \\ & = -x^2 + 8x - 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0, 10]$, $B(x) = -x^2 + 8x - 7$ et $B(x) = -(x - 1)(x - 7)$.

2. 1 pts

En déduire les productions de $[0, 10]$ pour lesquelles la recette est supérieure ou égale au coût. Interpréter à l'aide des courbes de R et de C.

INDICE

Outil : $R(x) \geq C(x)$ équivaut à $B(x) \geq 0$.

CORRIGÉ

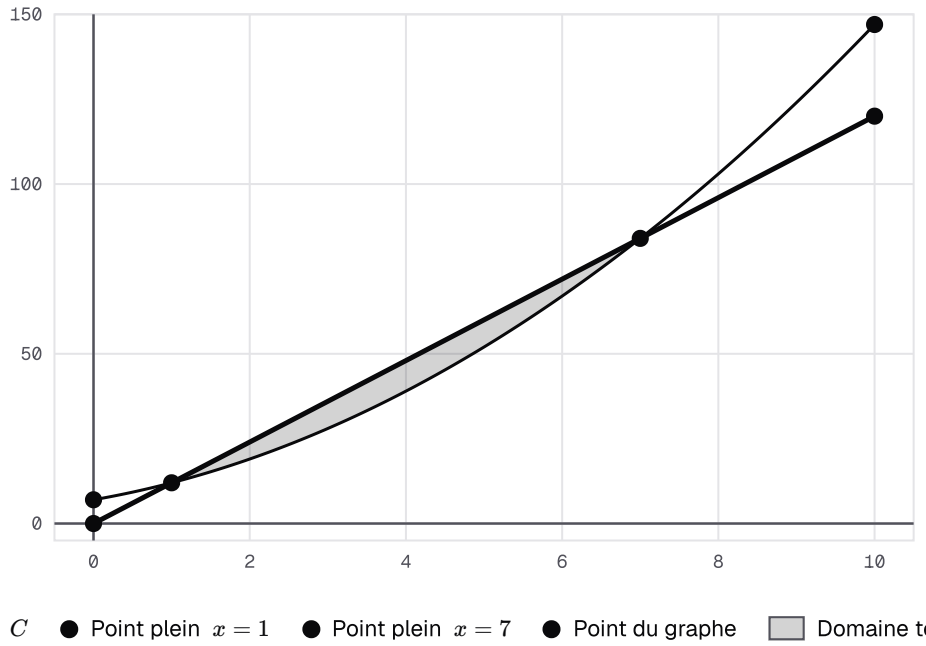
D'après la question 1, pour $x \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} & R(x) \geq C(x) \\ \Leftrightarrow\ & B(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x-7) \leq 0. \end{aligned}$$

Ce trinôme, de coefficient de x^2 positif, est négatif ou nul entre ses racines 1 et 7 : $x \in [1, 7]$.

Interprétation graphique. Sur $[1, 7]$, la courbe de R est au-dessus de celle de C, et elle la coupe en $x = 1$ et en $x = 7$. Sur $[0, 1[$ et sur $]7, 10]$, elle est au-dessous : l'entreprise perd de l'argent.

Conclusion. La recette est supérieure ou égale au coût pour une production de 100 à 700 appareils.



Sur [0, 10], la droite de R(x) = 12x est au-dessus de la parabole de C(x) = x² + 4x + 7 entre 1 et 7 : la zone teintée est celle des productions rentables.

3. 1 pts

Montrer que $B(x) = 9 - (x-4)^2$. En déduire que B est majorée par 9 sur $[0, 10]$ et que 9 est le maximum de B.

INDICE

Début : développe $(x-4)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul ; cherche où il s'annule.

CORRIGÉ

Autre forme. Pour tout $x \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} &9 - (x-4)^2 \\ &= 9 - (x^2 - 8x + 16) \\ &= -x^2 + 8x - 7 \\ &= B(x). \end{aligned}$$

Majorant. Comme $(x-4)^2 \geq 0$, on a $B(x) \leq 9$ pour tout $x \in [0, 10]$: B est majorée par 9.

Valeur atteinte. Le carré s'annule pour $x = 4$, qui appartient à $[0, 10]$, et $B(4) = 9$.

Conclusion. Le majorant 9 est atteint : c'est le maximum de B sur $[0, 10]$, pour $x = 4$, soit 400 appareils.

4. 1,5 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0, 10]$. Montrer que $T(x_1, x_2) = 8 - (x_1 + x_2)$. En déduire que B est strictement croissante sur $[0, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, 10]$.

INDICE

Début : $B(x_2) - B(x_1) = -(x_2^2 - x_1^2) + 8(x_2 - x_1)$. **Ensuite :** encadre x_1 et x_2 sur chaque intervalle et compare $x_1 + x_2$ à 8.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0, 10]$. Avec $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$:

$$\begin{aligned} &B(x_2) - B(x_1) \\ &= -(x_2^2 - x_1^2) \\ &\quad + 8(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \\ &\quad \times \big(8 - (x_1 + x_2)\big). \end{aligned}$$

On divise par $x_2 - x_1 \neq 0$: $T(x_1, x_2) = 8 - (x_1 + x_2)$.

Sur $[0, 4]$. Si x_1 et x_2 sont deux réels distincts de $[0, 4]$, l'un au moins est strictement inférieur à 4, donc $x_1 + x_2 < 8$ et $T(x_1, x_2) > 0$.

Sur $[4, 10]$. Si x_1 et x_2 sont deux réels distincts de $[4, 10]$, l'un au moins est strictement supérieur à 4, donc $x_1 + x_2 > 8$ et $T(x_1, x_2) < 0$.

Conclusion. $T(x_1, x_2) = 8 - (x_1 + x_2)$, et B est strictement croissante sur $[0, 4]$, strictement décroissante sur $[4, 10]$.

5. 1 pts

Dresser le tableau de variations de B sur $[0, 10]$ et donner le minimum de B sur cet intervalle.

INDICE

Début : calcule $B(0)$ et $B(10)$, puis compare-les.

CORRIGÉ

Valeurs. $B(0) = -7$, $B(4) = 9$ (question 3) et :

$$\begin{aligned} B(10) &= -100 + 80 - 7 \\ &= -27. \end{aligned}$$

x	0		4		10
$B(x)$	-7	croissante	9	décroissante	-27

Minimum. B croît puis décroît : son minimum est la plus petite des valeurs aux bornes. Comme $-27 < -7$, c'est $B(10)$.

Conclusion. Le minimum de B sur $[0, 10]$ vaut -27, atteint pour $x = 10$: à 1000 appareils, la perte est de 27 milliers de dirhams.

Exercice 2 4 pts

Fréquentation d'une boutique en ligne : lecture d'un tableau

Une boutique en ligne fictive étudie le nombre de visiteurs connectés, en dizaines, x heures après l'ouverture de 8 h, pour $x \in [0, 12]$. Ce nombre est noté $f(x)$. Chaque variation est stricte ; le tableau ci-dessous les résume :

x	0		4		10		12
$f(x)$	20	croît	50	décroît	14	croît	18

On donne de plus : $f(2) = 30$ et $f(7) = 30$.

1. 0,5 pts

Donner le maximum et le minimum de f sur $[0, 12]$, et les heures où ils sont atteints.

INDICE

Outil : compare $f(0)$, $f(4)$, $f(10)$ et $f(12)$.

CORRIGÉ

Sur chaque intervalle du tableau, f est strictement monotone : les extremums sont à chercher parmi $f(0) = 20$, $f(4) = 50$, $f(10) = 14$ et $f(12) = 18$.

Conclusion. Le maximum vaut 50, atteint pour $x = 4$, à 12 h : 500 visiteurs. Le minimum vaut 14, atteint pour $x = 10$, à 18 h : 140 visiteurs.

2. 0,5 pts

En déduire que $14 \leq f(x) \leq 50$ pour tout $x \in [0, 12]$, puis que f est bornée sur $[0, 12]$, en citant la propriété utilisée.

INDICE

Outil : un maximum fournit un majorant, un minimum un minorant.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $f(10) = 14$ est le minimum et $f(4) = 50$ le maximum de f sur $[0, 12]$. Un minimum est un minorant et un maximum un majorant : pour tout $x \in [0, 12]$,

$$14 \leq f(x) \leq 50.$$

Conclusion. Les nombres 14 et 50 ne dépendent pas de x. D'après la propriété « extremum et fonction bornée », f est minorée et majorée, donc bornée sur $[0, 12]$.

3. 1,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 30$ a exactement deux solutions dans $[0, 12]$: 2 et 7.

INDICE

Début : sépare les trois intervalles du tableau ; sur chacun, f est strictement monotone. **Point délicat :** sur $[10, 12]$, majore $f(x)$.

CORRIGÉ

On étudie l'équation sur chacun des trois intervalles du tableau.

Sur $[0, 4]$. f est strictement croissante, donc elle prend la valeur 30 au plus une fois ; comme $f(2) = 30$, seul 2 convient.

Sur $[4, 10]$. f est strictement décroissante et $f(7) = 30$: seul 7 convient.

Sur $[10, 12]$. f croît de 14 à 18, donc $f(x) \leq 18 < 30$: aucune solution.

Conclusion. L'équation $f(x) = 30$ a exactement deux solutions dans $[0, 12]$: 2 et 7.

4. 1 pts

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 30$ et interpréter le résultat.

INDICE

Début : sur $[0, 4]$, compare x à 2 ; sur $[4, 10]$, compare x à 7.

CORRIGÉ

Sur $[0, 4]$. f est strictement croissante : $f(x) \geq f(2)$ équivaut à $x \geq 2$. On garde $[2, 4]$.

Sur $[4, 10]$. f est strictement décroissante : $f(x) \geq f(7)$ équivaut à $x \leq 7$. On garde $[4, 7]$.

Sur $[10, 12]$. $f(x) \leq 18 < 30$: aucune solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $[2, 7]$: ce sont les abscisses des points de la courbe situés sur la droite d'équation $y = 30$ ou au-dessus. Au moins 300 visiteurs sont connectés de 10 h à 15 h.

5. 0,5 pts

Donner l'image de l'intervalle $[4, 12]$.

INDICE

Début : par convention de lecture d'un tableau donné, repère dans le tableau la valeur la plus basse et la valeur la plus haute entre $x = 4$ et $x = 12$.

CORRIGÉ

Par convention de lecture d'un tableau, sur $[4, 12]$, f prend toutes les valeurs entre 50 et 14, puis entre 14 et 18. Parmi les valeurs lues, 50, 14 et 18, la plus petite est 14 et la plus grande 50.

Conclusion. L'image de $[4, 12]$ est $[14, 50]$.

Exercice 3 5 pts

Prix et demande : une composée décroissante

Un fabricant fictif fixe le prix d'un article à x centaines de dirhams, avec $x \geq 0$. Une étude fictive modélise la demande mensuelle, en milliers d'articles, par $D(x) = 3 + \dfrac{24}{x^2+4}$. On pose, pour $x \geq 0$, $u(x) = x^2 + 4$ et, pour tout réel $t > 0$, $g(t) = 3 + \dfrac{24}{t}$.

1. 0,75 pts

Montrer que $u(x) \geq 4$ pour tout $x \geq 0$, puis que $D = g \circ u$ sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Début : vérifie que $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de g, puis calcule $g\big(u(x)\big)$.

CORRIGÉ

Soit x un réel positif ou nul.

Minoration. Comme $x^2 \geq 0$:

$$u(x) = x^2 + 4 \geq 4 > 0.$$

Composée. Ainsi $u(x)$ appartient à $]0, +\infty[$, ensemble de définition de g, et :

$$\begin{aligned} g\big(u(x)\big) &= 3 + \frac{24}{x^2+4} \\ &= D(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $u(x) \geq 4$, et $D = g \circ u$ sur $[0, +\infty[$.

2. 1 pts

Montrer que u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : le taux de variation ; montre que $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0, +\infty[$.

Taux de variation.

$$\begin{aligned} &u(x_2) - u(x_1) \\ &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1). \end{aligned}$$

On divise par $x_2 - x_1 \neq 0$: $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Signe. Les deux réels sont positifs ou nuls et distincts, donc l'un au moins est strictement positif : $T(x_1, x_2) > 0$.

Conclusion. Le taux de variation de u entre deux réels distincts de $[0, +\infty[$ est strictement positif : u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3. 0,75 pts

Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Outil : la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$; pense à λf, puis à $f + \lambda$.

CORRIGÉ

Fonction inverse. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Multiplication par 24. D'après les variations de λf, avec $\lambda = 24 > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{24}{t}$ garde ce sens : elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Ajout de 3. D'après les variations de $f + \lambda$, ajouter 3 ne change pas le sens.

Conclusion. g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. 1 pts

En déduire que D est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Interpréter.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; u envoie $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $J =]0, +\infty[$. D'après la question 3, g est strictement décroissante sur J.

Les sens sont contraires : d'après la monotonie d'une composée, $D = g \circ u$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Conclusion. D est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$: plus le prix est élevé, plus la demande est faible.

5. 1,5 pts

Montrer que $3 < D(x) \leq 9$ pour tout $x \geq 0$. Le nombre 9 est-il le maximum de D ? Le nombre 3 est-il un minimum de D ?

INDICE

Début : pars de $x^2 + 4 \geq 4$ et passe aux inverses. **Ensuite :** calcule $D(0)$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit x un réel positif ou nul. On a $x^2 + 4 \geq 4 > 0$; par passage aux inverses de nombres strictement positifs :

$$0 < \frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{4}.$$

On multiplie par $24 > 0$:

$$0 < \frac{24}{x^2+4} \leq 6,$$

puis on ajoute 3 : $3 < D(x) \leq 9$.

Le nombre 9. $D(0) = 3 + 6 = 9$: le majorant 9 est atteint. C'est le maximum de D, pour le prix théorique 0 (le modèle n'a de sens économique que pour un prix strictement positif).

Le nombre 3. L'égalité $D(x) = 3$ demanderait $\frac{24}{x^2+4} = 0$, ce qui est impossible : 3 n'est jamais atteint, ce n'est pas un minimum.

Aucun minimum. D est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (question 4) : pour tout $a \geq 0$, $D(a+1) < D(a)$. Aucune valeur de D n'est donc la plus petite. Par exemple, $D(2) = 6$ et $D(4) = 4{,}2$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $3 < D(x) \leq 9$; 9 est le maximum de D, tandis que 3 n'est pas un minimum, et D n'en admet aucun.

Exercice 4 5 pts

Coût moyen de production d'une coopérative

Une coopérative fictive produit x centaines de pots de miel, avec $x \in [1, 12]$. Le coût moyen de production d'un pot, en dirhams, est $M(x) = x + 2 + \dfrac{16}{x}$ (données fictives).

1. 1,25 pts

Montrer que $M(x) - 10 = \dfrac{(x-4)^2}{x}$ pour tout $x \in [1, 12]$. En déduire que $M(x) \geq 10$ et que 10 est le minimum de M sur $[1, 12]$.

INDICE

Début : écris $M(x) - 10$ comme un seul quotient, de dénominateur x. **Ensuite :** reconnais un carré au numérateur, puis regarde le signe du dénominateur.

CORRIGÉ

Réduction. Soit $x \in [1, 12]$; alors $x > 0$ et :

$$\begin{aligned} & M(x) - 10 \\ &= x - 8 + \frac{16}{x} \\ &= \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \\ &= \frac{(x-4)^2}{x}. \end{aligned}$$

Signe. $(x-4)^2 \geq 0$ et $x > 0$, donc $M(x) - 10 \geq 0$, soit $M(x) \geq 10$.

Valeur atteinte. $4 \in [1, 12]$ et $M(4) = 4 + 2 + 4 = 10$.

Conclusion. Pour tout $x \in [1, 12]$, $M(x) \geq 10$, et cette valeur est atteinte : 10 est le minimum de M sur $[1, 12]$, pour 400 pots.

2. 1 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[1, 12]$. Montrer que $T(x_1, x_2) = 1 - \dfrac{16}{x_1 x_2}$.

INDICE

Début : $\dfrac{16}{x_2} - \dfrac{16}{x_1} = \dfrac{16(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[1, 12]$; ils sont strictement positifs.

Différence des quotients.

$$\begin{aligned}\frac{16}{x_2} - \frac{16}{x_1} &= \frac{16x_1 - 16x_2}{x_1 x_2} \\ &= -\frac{16(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}.\end{aligned}$$

Différence des images.

$$\begin{aligned}&M(x_2) - M(x_1) \\ &= (x_2 - x_1) + \frac{16}{x_2} - \frac{16}{x_1} \\ &= (x_2 - x_1) \\ &\quad - \frac{16(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} \\ &= (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{16}{x_1 x_2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion. En divisant par $x_2 - x_1 \neq 0$, on obtient $T(x_1, x_2) = 1 - \dfrac{16}{x_1 x_2}$.

3. 1 pts

Montrer que, si x_1 et x_2 sont deux réels distincts de $[1, 4]$, alors $0 < x_1 x_2 < 16$. En déduire que M est strictement décroissante sur $[1, 4]$.

INDICE

Outil : multiplie les encadrements de x_1 et de x_2 (nombres positifs) et compare à 16. **Ensuite :** compare $\dfrac{16}{x_1 x_2}$ à 1.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[1, 4]$.

Produit. On a $1 \leq x_1 \leq 4$ et $1 \leq x_2 \leq 4$, et l'un au moins est strictement inférieur à 4. Ces nombres sont positifs : en multipliant membre à membre, $0 < x_1 x_2 < 16$.

Signe du taux. Il en résulte $\dfrac{16}{x_1 x_2} > 1$, donc, d'après la question 2, $T(x_1, x_2) < 0$.

Conclusion. On a $0 < x_1 x_2 < 16$, et le taux de variation de M entre deux réels distincts de $[1, 4]$ est strictement négatif : M est strictement décroissante sur $[1, 4]$.

4. 1 pts

Montrer de même que M est strictement croissante sur $[4, 12]$.

INDICE

Outil : même démarche ; cette fois, compare $x_1 x_2$ à 16 par l'autre côté.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[4, 12]$. On a $x_1 \geq 4$ et $x_2 \geq 4$, et l'un au moins est strictement supérieur à 4 : donc $x_1 x_2 > 16$.

Alors $0 < \dfrac{16}{x_1 x_2} < 1$ et, d'après la question 2, $T(x_1, x_2) > 0$.

Conclusion. Le taux de variation de M entre deux réels distincts de $[4, 12]$ est strictement positif : M est strictement croissante sur $[4, 12]$.

5. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de M sur $[1, 12]$, puis montrer que le coût moyen le plus élevé sur $[1, 12]$ vaut 19 dirhams.

INDICE

Début : calcule $M(1)$ et $M(12)$, puis compare-les.

CORRIGÉ

Valeurs.

- $M(1) = 1 + 2 + 16 = 19$;
- $M(4) = 10$ (question 1) ;
- $M(12) = 12 + 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{46}{3}$.

x	1		4		12
$M(x)$	19	décroissante	10	croissante	$\dfrac{46}{3}$

Maximum. M décroît puis croît : son maximum sur $[1, 12]$ est la plus grande des valeurs aux bornes. Or $19 = \dfrac{57}{3}$ et $46 < 57$, donc $\dfrac{46}{3} < 19$.

Conclusion. Le maximum de M sur $[1, 12]$ vaut 19 : le coût moyen le plus élevé est de 19 dirhams, pour 100 pots.

Exercice 5 5 pts

Une racine décalée et une droite

On considère les fonctions f et g définies sur $[-25, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+25}$ et $g(x) = \dfrac{x+25}{10}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère orthonormé.

1. 1 pts

Justifier que f est strictement croissante sur $[-25, +\infty[$, et préciser la translation qui transforme la courbe de la racine carrée en $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 25$.

CORRIGÉ

On a $f(x) = \sqrt{x+a}$ avec $a = 25$.

Variations. D'après la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, f est définie et strictement croissante sur $[-25, +\infty[$, de minimum $f(-25) = 0$.

Translation. $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de la racine carrée par la translation de vecteur $-a\,\vec{i}$, c'est-à-dire la translation de vecteur $-25\,\vec{i}$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $[-25, +\infty[$, et $\mathcal{C}_f$ s'obtient en décalant la courbe de la racine carrée de 25 unités vers la gauche.

2. 0,5 pts

Calculer $f(-24)$, $f(0)$, $f(11)$ et $f(75)$, puis $g(-25)$ et $g(75)$.

INDICE

Début : pour f, calcule d'abord $x+25$: c'est un carré parfait.

CORRIGÉ

Valeurs de f. Pour ces valeurs, $x+25$ est un carré parfait :

- $f(-24) = \sqrt{1} = 1$;
- $f(0) = \sqrt{25} = 5$;
- $f(11) = \sqrt{36} = 6$;
- $f(75) = \sqrt{100} = 10$.

Valeurs de g. $g(-25) = \dfrac{0}{10} = 0$ et $g(75) = \dfrac{100}{10} = 10$.

Conclusion. $f(-24) = 1$, $f(0) = 5$, $f(11) = 6$, $f(75) = 10$, $g(-25) = 0$ et $g(75) = 10$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in [-25, +\infty[$, $f(x)^2 - g(x)^2 = \dfrac{(x+25)(75-x)}{100}$.

INDICE

Début : $g(x)^2 = \dfrac{(x+25)^2}{100}$; mets $x+25$ en facteur.

CORRIGÉ

Soit $x \in [-25, +\infty[$. On a $f(x)^2 = x+25$ et $g(x)^2 = \dfrac{(x+25)^2}{100}$. On met $x+25$ en facteur :

$$\begin{aligned} & f(x)^2 - g(x)^2 \\ &= (x+25)\left(1 - \frac{x+25}{100}\right) \\ &= (x+25) \times \frac{100 - x - 25}{100} \\ &= \frac{(x+25)(75-x)}{100}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [-25, +\infty[$, $f(x)^2 - g(x)^2 = \dfrac{(x+25)(75-x)}{100}$.

4. 0,5 pts

Justifier que $f(x) + g(x) > 0$ pour tout $x > -25$.

INDICE

Début : pour $x > -25$, quel est le signe de $x+25$?

CORRIGÉ

Soit $x > -25$. Alors $x + 25 > 0$, donc :

- $f(x) = \sqrt{x+25} > 0$, car la racine carrée d'un réel strictement positif est strictement positive ;
- $g(x) = \dfrac{x+25}{10} > 0$.

Conclusion. Somme de deux nombres strictement positifs, $f(x) + g(x)$ est strictement positif : $f(x) + g(x) > 0$ pour tout $x > -25$.

5. 1 pts

On admet que, pour $x > -25$, $f(x) - g(x) = \dfrac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) + g(x)}$. Montrer que, sur $]-25, +\infty[$, $f(x) - g(x)$ a le signe de $(x + 25)(75 - x)$.

INDICE

Outil : l'égalité vient de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. **Ensuite :** utilise les questions 3 et 4.

CORRIGÉ

Soit $x > -25$.

Origine de l'égalité. Elle vient de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = f(x)$ et $b = g(x)$, où $a + b \neq 0$ d'après la question 4.

Signe. Le dénominateur $f(x) + g(x)$ est strictement positif (question 4). Donc $f(x) - g(x)$ a le signe de son numérateur $f(x)^2 - g(x)^2$, qui vaut $\dfrac{(x + 25)(75 - x)}{100}$ d'après la question 3.

Conclusion. Sur $]-25, +\infty[$, $f(x) - g(x)$ a le signe de $(x + 25)(75 - x)$.

6. 1 pts

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$, leurs points communs, et l'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$.

INDICE

Début : pour $x > -25$, le facteur $x + 25$ est positif : seul le signe de $75 - x$ compte. N'oublie pas $x = -25$.

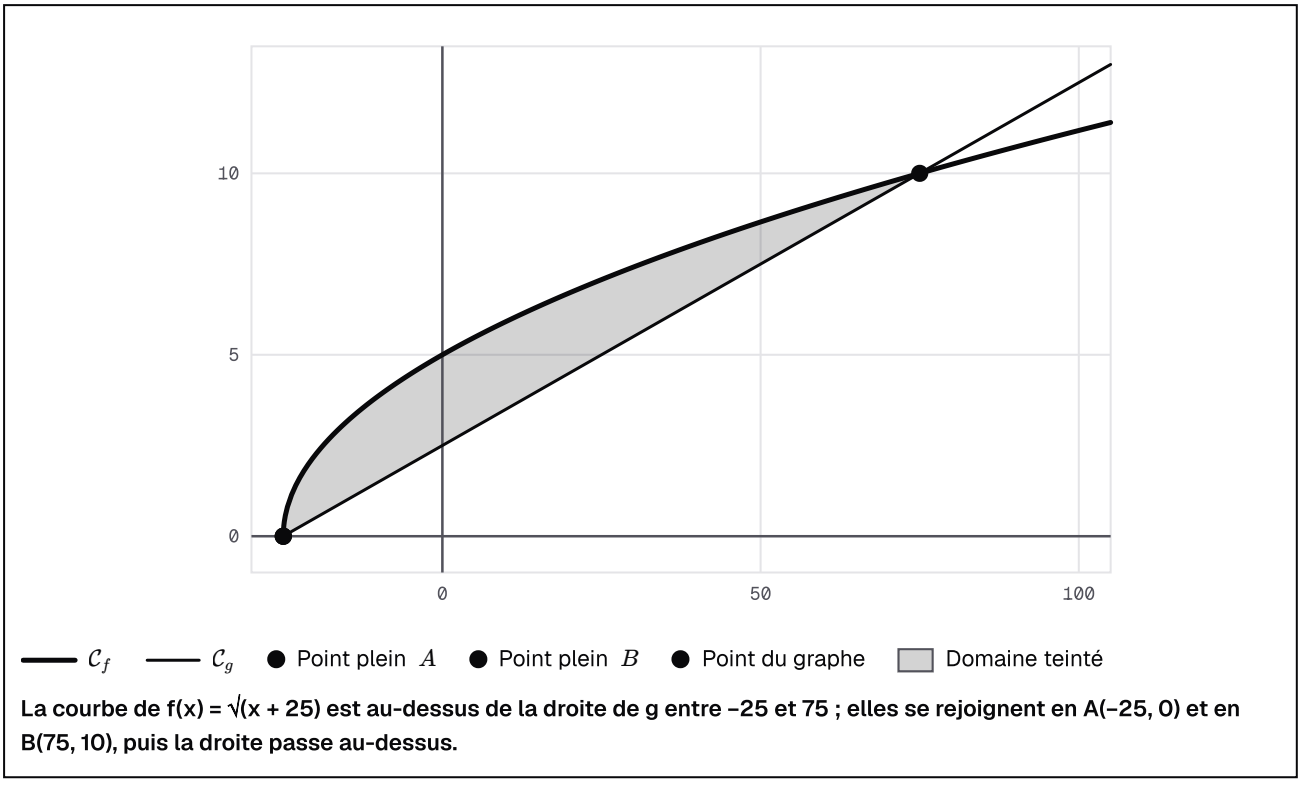
CORRIGÉ

Pour $x > -25$. Le facteur $x + 25$ est strictement positif, donc $f(x) - g(x)$ a le signe de $75 - x$: positif sur $]-25, 75[$, nul en 75, négatif sur $]75, +\infty[$.

Pour $x = -25$. $f(-25) = g(-25) = 0$.

Position et points communs. Sur $]-25, 75[$, $\mathcal{C}_f$ passe au-dessus de $\mathcal{C}_g$; sur $]75, +\infty[$, elle passe en dessous. Les deux courbes se rencontrent en $x = -25$ et en $x = 75$; comme $f(75) = 10$, ces points sont $(-25, 0)$ et $(75, 10)$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ est $[-25, 75]$.



La courbe de f(x) = √(x + 25) est au-dessus de la droite de g entre −25 et 75 ; elles se rejoignent en A(−25, 0) et en B(75, 10), puis la droite passe au-dessus.