BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Position de deux courbes et inéquation

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 7$ et $g(x) = 5x - 3$.

1.

Montrer que $f(x) - g(x) = (x + 1)(x - 4)$ pour tout réel x.

INDICE

Début : réduis $f(x) - g(x)$, puis développe $(x + 1)(x - 4)$ et compare.

2.

Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$, puis en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$ et leurs points communs.

INDICE

Outil : un trinôme est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines.

3.

Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Début : $f(x) < g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) < 0$.

Exercice 2

La zone de bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fictif fabrique x centaines de sacs par semaine, avec $x \in [0, 7]$. Sa recette et son coût, en milliers de dirhams, sont $R(x) = 9x$ et $C(x) = x^2 + 3x + 8$ (données fictives).

1.

Montrer que le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ s'écrit $B(x) = -(x - 2)(x - 4)$.

INDICE

Début : calcule $R(x) - C(x)$, puis développe $-(x - 2)(x - 4)$.

2.

Pour quelles productions la recette couvre-t-elle le coût ? Interpréter avec les courbes de R et de C.

INDICE

Outil : $R(x) \geq C(x)$ équivaut à $B(x) \geq 0$; pense au signe d'un trinôme.

3.

Montrer que $B(x) = 1 - (x - 3)^2$, puis en déduire le bénéfice maximal.

INDICE

Début : développe $1 - (x - 3)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul.

Exercice 3

Encadrer un quotient : majorant et maximum

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x + 7}{x + 3}$.

1.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x + 3}$.

INDICE

Début : réduis $2 + \dfrac{1}{x + 3}$ au même dénominateur.

2.

En déduire que $2 < f(x) \leq \dfrac{7}{3}$ pour tout $x \geq 0$.

INDICE

Début : pars de $x + 3 \geq 3$ et passe aux inverses.

3.

Le réel $\dfrac{7}{3}$ est-il le maximum de f sur $[0, +\infty[$? Le réel 2 est-il un minimum ?

INDICE

Outil : un maximum ou un minimum doit être une valeur atteinte par f.

Exercice 4

Du taux de variation aux extremums

Soit g la fonction définie sur $[0,5]$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 7$.

1.

Montrer que, pour deux réels distincts x_1 et x_2 de $[0,5]$, $T(x_1, x_2) = 6 - (x_1 + x_2)$.

INDICE

Début : $g(x_2) - g(x_1) = -(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_2 - x_1)$; factorise par $x_2 - x_1$.

2.

En déduire le sens de variation de g sur $[0,3]$ et sur $[3,5]$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : encadre x_1 et x_2 dans chaque intervalle, additionne les encadrements et compare la somme à 6.

3.

Donner le maximum et le minimum de g sur $[0,5]$, puis justifier que $-7 \leq g(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0,5]$.

INDICE

Outil : compare les valeurs placées dans le tableau ; un maximum fournit un majorant, un minimum un minorant.

Exercice 5

Une composée avec la fonction inverse

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{6}{x^2 + 1}$.

1.

Écrire h comme composée $g \circ u$ de deux fonctions, en précisant u et g.

INDICE

Début : quel calcul fait-on d'abord sur x ?

2.

Montrer que h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; étudie u sur $[0, +\infty[$ et g sur $]0, +\infty[$.

3.

Étudier de même le sens de variation de h sur $]-\infty, 0]$, puis donner le maximum de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : sur $]-\infty, 0]$, la fonction carré décroît.

Exercice 6

Un cube multiplié par trois demis

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}x^3$.

1.

Donner le sens de variation de f, puis calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$; repère le signe de a.

2.

Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x, et interpréter graphiquement.

INDICE

Début : $(-x)^3 = -x^3$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 12$, puis l'inéquation $f(x) \leq 12$.

INDICE

Outil : une fonction strictement croissante prend chaque valeur au plus une fois et conserve l'ordre.

Exercice 7

Prix et demande d'un produit

Un commerçant fictif vend un produit au prix de x dirhams, avec $x \in [0, 25]$. Une étude fictive estime la demande, en centaines d'unités, par $D(x) = \sqrt{100 - 4x}$.

1.

Écrire D comme composée de deux fonctions et justifier que D est définie sur $[0, 25]$.

INDICE

Début : on calcule d'abord $100 - 4x$, puis sa racine carrée.

2.

Montrer que la demande diminue quand le prix augmente.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; regarde le coefficient de x dans $u(x)$.

3.

Calculer $D(0)$, $D(9)$ et $D(16)$, puis donner la demande maximale sur $[0, 25]$.

INDICE

Début : $100 - 4 \times 9 = 64$.

4.

Un second modèle fictif estime la demande par $E(x) = \dfrac{100 - 4x}{8}$. Montrer que $D(x)^2 - E(x)^2 = \dfrac{(100 - 4x)(x - 9)}{16}$, puis, en écrivant $D(x) - E(x) = \dfrac{D(x)^2 - E(x)^2}{D(x) + E(x)}$ pour $x \in [0, 25[$, déterminer les prix pour lesquels $D(x) \geq E(x)$.

INDICE

Début : $D(x)^2 = 100 - 4x$; mets $100 - 4x$ en facteur. **Point délicat :** pour $x < 25$, $D(x) + E(x)$ est strictement positif ; n'oublie pas $x = 25$.