BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Position de deux courbes et inéquation

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 7$ et $g(x) = 5x - 3$.

1.

Montrer que $f(x) - g(x) = (x+1)(x-4)$ pour tout réel x.

INDICE

Début : réduis $f(x) - g(x)$, puis développe $(x+1)(x-4)$ et compare.

CORRIGÉ

Réduction. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - g(x) \\ &= x^2 + 2x - 7 - 5x + 3 \\ &= x^2 - 3x - 4. \end{aligned}$$

Développement.

$$\begin{aligned} &(x+1)(x-4) \\ &= x^2 - 4x + x - 4 \\ &= x^2 - 3x - 4. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux expressions coïncident : pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x+1)(x-4)$.

2.

Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$, puis en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$ et leurs points communs.

INDICE

Outil : un trinôme est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Signe. D'après la question 1, $f(x) - g(x)$ est un trinôme de racines -1 et 4, dont le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$. Il est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Points communs. Ils ont pour abscisses -1 et 4. Or $g(-1) = -8$ et $g(4) = 17$.

Conclusion. Sur $]-\infty, -1[$ comme sur $]4, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ passe au-dessus de $\mathcal{C}_g$; sur $]-1, 4[$, elle passe en dessous. Les courbes se coupent en $(-1, -8)$ et en $(4, 17)$.

3.

Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

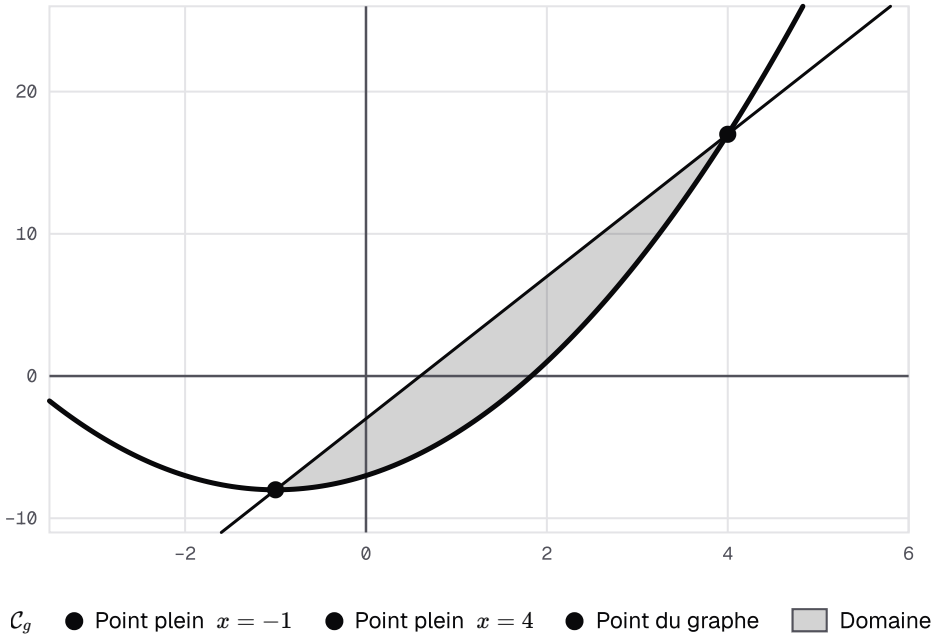
Début : $f(x) < g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) < 0$.

CORRIGÉ

L'inéquation $f(x) < g(x)$ équivaut à $f(x) - g(x) < 0$, c'est-à-dire à $(x+1)(x-4) < 0$. Le tableau de signes de la question 2 donne $x \in \,]-1, 4[$: les bornes -1 et 4 sont exclues, car l'inégalité est stricte.

Graphiquement, ce sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $]-1, 4[$.



Sur]−1, 4[, la parabole de f est strictement sous la droite de g : la bande teintée entre les deux tracés correspond aux solutions de f(x) < g(x).

Exercice 2

La zone de bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fictif fabrique x centaines de sacs par semaine, avec $x \in [0, 7]$. Sa recette et son coût, en milliers de dirhams, sont $R(x) = 9x$ et $C(x) = x^2 + 3x + 8$ (données fictives).

1.

Montrer que le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ s'écrit $B(x) = -(x - 2)(x - 4)$.

INDICE

Début : calcule $R(x) - C(x)$, puis développe $-(x - 2)(x - 4)$.

CORRIGÉ

Bénéfice. Pour tout $x \in [0, 7]$, on retranche chaque terme de $C(x)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 9x - x^2 - 3x - 8 \\ &= -x^2 + 6x - 8. \end{aligned}$$

Forme factorisée.

$$\begin{aligned} &-(x - 2)(x - 4) \\ &= -(x^2 - 6x + 8) \\ &= -x^2 + 6x - 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux expressions coïncident : pour tout $x \in [0, 7]$, $B(x) = -(x - 2)(x - 4)$.

2.

Pour quelles productions la recette couvre-t-elle le coût ? Interpréter avec les courbes de R et de C.

INDICE

Outil : $R(x) \geq C(x)$ équivaut à $B(x) \geq 0$; pense au signe d'un trinôme.

CORRIGÉ

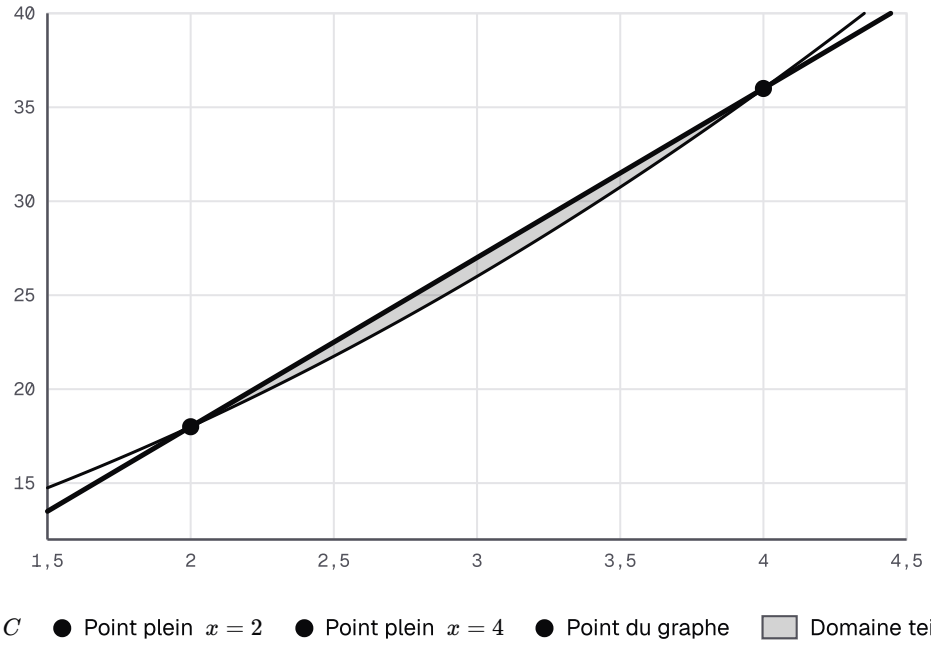
La recette couvre le coût lorsque $R(x) \geq C(x)$, c'est-à-dire $B(x) \geq 0$. D'après la question 1, cela s'écrit :

$$(x-2)(x-4) \leq 0.$$

Ce trinôme, de coefficient de x^2 positif, est négatif ou nul entre ses racines 2 et 4 : $x \in [2, 4]$.

Lecture graphique. Sur $[2, 4]$, la courbe de R est au-dessus de celle de C ou la touche ; ailleurs dans $[0, 7]$, elle est au-dessous.

Conclusion. La recette couvre le coût pour une production de 200 à 400 sacs.



Vue rapprochée, de 1,5 à 4,5 : la droite de la recette R(x) = 9x passe au-dessus de la courbe du coût C entre 2 et 4, et la zone teintée est celle où la recette couvre le coût.

3.

Montrer que $B(x) = 1 - (x-3)^2$, puis en déduire le bénéfice maximal.

INDICE

Début : développe $1 - (x-3)^2$. **Ensuite :** un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

Autre forme. Pour tout $x \in [0, 7]$:

$$\begin{aligned} & 1 - (x-3)^2 \\ & = 1 - (x^2 - 6x + 9) \\ & = -x^2 + 6x - 8 \\ & = B(x). \end{aligned}$$

Majorant. Comme $(x-3)^2 \geq 0$, on a $B(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 7]$.

Valeur atteinte. Pour $x = 3$, le carré est nul : $B(3) = 1$.

Conclusion. Le majorant 1 est atteint : le bénéfice maximal vaut 1 millier de dirhams, pour 300 sacs.

Exercice 3

Encadrer un quotient : majorant et maximum

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

1.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

INDICE

Début : réduis $2 + \dfrac{1}{x+3}$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Soit x un réel positif ou nul ; alors $x + 3 > 0$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x+3} &= \frac{2(x+3)+1}{x+3} \\ &= \frac{2x+7}{x+3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

2.

En déduire que $2 < f(x) \leq \dfrac{7}{3}$ pour tout $x \geq 0$.

INDICE

Début : pars de $x + 3 \geq 3$ et passe aux inverses.

CORRIGÉ

Soit x un réel positif ou nul.

Dénominateur. $x + 3 \geq 3 > 0$.

Passage aux inverses. Ces nombres étant strictement positifs, leurs inverses sont dans l'ordre contraire :

$$0 < \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{3}.$$

Ajout de 2. D'après la question 1, on obtient :

$$2 < f(x) \leq \frac{7}{3}.$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $2 < f(x) \leq \dfrac{7}{3}$: f est bornée sur $[0, +\infty[$.

3.

Le réel $\frac{7}{3}$ est-il le maximum de f sur $[0, +\infty[$? Le réel 2 est-il un minimum ?

INDICE

Outil : un maximum ou un minimum doit être une valeur atteinte par f.

CORRIGÉ

Le réel $\frac{7}{3}$. On a $f(0) = \frac{7}{3}$: ce majorant est atteint. C'est le maximum de f sur $[0, +\infty[$, atteint en 0.

Le réel 2. L'égalité $f(x) = 2$ exigerait $\frac{1}{x+3} = 0$, ce qui est impossible. Le minorant 2 n'est jamais atteint : ce n'est pas un minimum.

Aucun minimum. Soit $a \geq 0$. Comme $a+4 > a+3 > 0$, on a $\frac{1}{a+4} < \frac{1}{a+3}$, donc $f(a+1) < f(a)$: aucune valeur de f n'est la plus petite.

Conclusion. Oui pour $\frac{7}{3}$, atteint en 0 : c'est le maximum de f sur $[0, +\infty[$. Non pour 2 : ce minorant n'est jamais atteint, et f n'admet d'ailleurs aucun minimum.

Exercice 4

Du taux de variation aux extremums

Soit g la fonction définie sur $[0,5]$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 7$.

1.

Montrer que, pour deux réels distincts x_1 et x_2 de $[0,5]$, $T(x_1, x_2) = 6 - (x_1 + x_2)$.

INDICE

Début : $g(x_2) - g(x_1) = -(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_2 - x_1)$; factorise par $x_2 - x_1$.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0,5]$.

Différence des images. Avec $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$:

$$\begin{aligned} &g(x_2) - g(x_1) \\ &= -(x_2^2 - x_1^2) \\ &\quad + 6(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \\ &\quad \times \big(6 - (x_1 + x_2)\big). \end{aligned}$$

Division. On divise par $x_2 - x_1$, qui n'est pas nul.

Conclusion. Pour deux réels distincts x_1 et x_2 de $[0,5]$, $T(x_1, x_2) = 6 - (x_1 + x_2)$.

2.

En déduire le sens de variation de g sur $[0,3]$ et sur $[3,5]$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : encadre x_1 et x_2 dans chaque intervalle, additionne les encadrements et compare la somme à 6.

CORRIGÉ

Sur $[0,3]$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0,3]$. On a $x_1 \leq 3$ et $x_2 \leq 3$, et l'un au moins est strictement inférieur à 3, donc $x_1 + x_2 < 6$. Ainsi $T(x_1,x_2) > 0$: g est strictement croissante sur $[0,3]$.

Sur $[3,5]$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[3,5]$. On a $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 3$, et l'un au moins est strictement supérieur à 3, donc $x_1 + x_2 > 6$. Ainsi $T(x_1,x_2) < 0$: g est strictement décroissante sur $[3,5]$.

Valeurs.

- $g(0) = -7$;
- $g(3) = -9 + 18 - 7 = 2$;
- $g(5) = -25 + 30 - 7 = -2$.

x	0		3		5
$g(x)$	-7	croissante	2	décroissante	-2

Conclusion. g est strictement croissante sur $[0,3]$ et strictement décroissante sur $[3,5]$, comme le résume le tableau.

3.

Donner le maximum et le minimum de g sur $[0,5]$, puis justifier que $-7 \leq g(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0,5]$.

INDICE

Outil : compare les valeurs placées dans le tableau ; un maximum fournit un majorant, un minimum un minorant.

CORRIGÉ

Maximum. g croît sur $[0,3]$ puis décroît sur $[3,5]$: son maximum est $g(3) = 2$, atteint en 3.

Minimum. Il est atteint à l'une des bornes. Comme $-7 < -2$, le minimum est $g(0) = -7$, atteint en 0.

Encadrement. Le minimum est un minorant de g et le maximum un majorant.

Conclusion. Sur $[0,5]$, le maximum de g vaut 2 et le minimum -7, donc on a $-7 \leq g(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0,5]$.

Exercice 5

Une composée avec la fonction inverse

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$.

1.

Écrire h comme composée $g \circ u$ de deux fonctions, en précisant u et g.

INDICE

Début : quel calcul fait-on d'abord sur x ?

CORRIGÉ

On calcule d'abord x^2+1, puis on divise 6 par le résultat. On pose donc $u : x \mapsto x^2+1$, définie sur $\mathbb{R}$, et $g : t \mapsto \dfrac{6}{t}$, définie sur $]0, +\infty[$.

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $u(x) \geq 1 > 0$: $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de g.

Conclusion. Pour tout réel x, $h(x) = g\big(u(x)\big)$: on a $h = g \circ u$ sur $\mathbb{R}$.

2.

Montrer que h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; étudie u sur $[0, +\infty[$ et g sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Monotonie de u. Sur $[0, +\infty[$, la fonction carré est strictement croissante, et ajouter 1 ne change pas le sens. Donc u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$, inclus dans $]0, +\infty[$.

Monotonie de g. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après les variations de λf, avec $\lambda = 6 > 0$, g l'est aussi.

Composée. u croît et g décroît : d'après la monotonie d'une composée, $h = g \circ u$ décroît sur cet intervalle.

Conclusion. h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

3.

Étudier de même le sens de variation de h sur $]-\infty, 0]$, puis donner le maximum de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : sur $]-\infty, 0]$, la fonction carré décroît.

CORRIGÉ

Variations. Sur $]-\infty, 0]$, la fonction carré est strictement décroissante, donc u aussi, à valeurs dans $[1, +\infty[$. Comme g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, les deux sens sont les mêmes : d'après la monotonie d'une composée, h est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

Maximum. h croît jusqu'en 0, puis décroît : pour tout réel x, $h(x) \leq h(0)$, avec

$$h(0) = \frac{6}{1} = 6.$$

Conclusion. h est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, et son maximum sur $\mathbb{R}$ vaut 6, atteint en 0.

Exercice 6

Un cube multiplié par trois demis

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}x^3$.

1.

Donner le sens de variation de f, puis calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$; repère le signe de a.

CORRIGÉ

On a $f(x) = ax^3$ avec $a = \dfrac{3}{2} > 0$: d'après la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Avec $(-2)^3 = -8$, $(-1)^3 = -1$, $1^3 = 1$ et $2^3 = 8$, on obtient : $f(-2) = -12$, $f(-1) = -\dfrac{3}{2}$, $f(0) = 0$, $f(1) = \dfrac{3}{2}$, $f(2) = 12$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses valeurs en -2, -1, 0, 1 et 2 sont -12, $-\dfrac{3}{2}$, 0, $\dfrac{3}{2}$ et 12.

2.

Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x, et interpréter graphiquement.

INDICE

Début : $(-x)^3 = -x^3$.

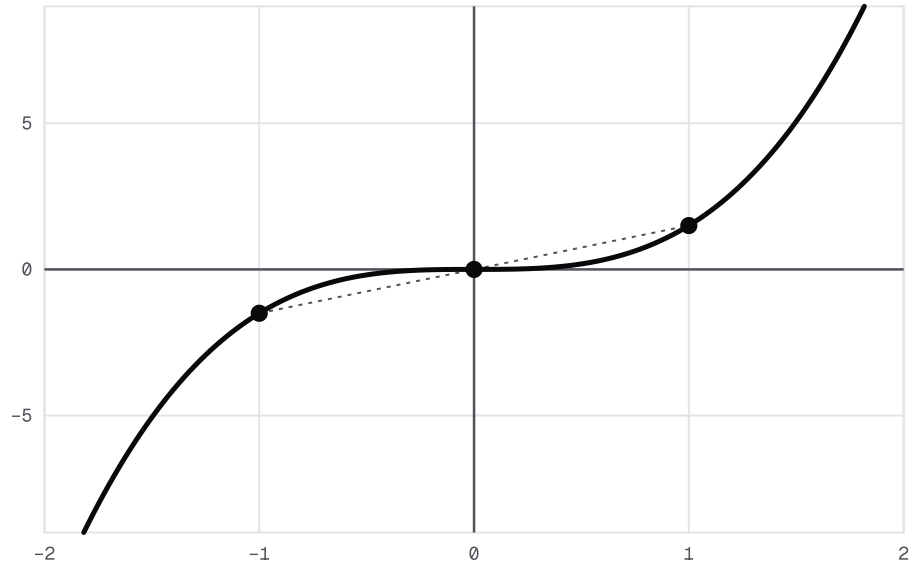
CORRIGÉ

Soit x un réel. Comme $(-x)^3 = -x^3$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3}{2}(-x)^3 \\ &= -\frac{3}{2}x^3 \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Interprétation. Les points $M\big(x, f(x)\big)$ et $M'\big(-x, -f(x)\big)$ de la courbe sont symétriques par rapport à l'origine O.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$: la courbe de f est symétrique par rapport à O.



Les points M(1, 3/2) et M'(−1, −3/2) de la courbe de f(x) = (3/2)x³ sont symétriques par rapport à O, milieu du segment qui les joint.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 12$, puis l'inéquation $f(x) \leq 12$.

INDICE

Outil : une fonction strictement croissante prend chaque valeur au plus une fois et conserve l'ordre.

CORRIGÉ

Équation. On a $f(2) = 12$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

- si $x < 2$, alors $f(x) < f(2)$, soit $f(x) < 12$;
- si $x > 2$, alors $f(x) > f(2)$, soit $f(x) > 12$.

Seul $x = 2$ vérifie $f(x) = 12$.

Inéquation. La fonction f conserve l'ordre : $f(x) \leq f(2)$ équivaut à $x \leq 2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 12$ a pour unique solution 2, et l'ensemble des solutions de $f(x) \leq 12$ est $]-\infty, 2]$.

Exercice 7

Prix et demande d'un produit

Un commerçant fictif vend un produit au prix de x dirhams, avec $x \in [0, 25]$. Une étude fictive estime la demande, en centaines d'unités, par $D(x) = \sqrt{100 - 4x}$.

1.

Écrire D comme composée de deux fonctions et justifier que D est définie sur $[0, 25]$.

INDICE

Début : on calcule d'abord $100 - 4x$, puis sa racine carrée.

CORRIGÉ

Décomposition. On calcule d'abord $100 - 4x$, puis sa racine carrée. Avec $u : x \mapsto 100 - 4x$ et r la fonction racine carrée, on a $D = r \circ u$.

Ensemble de définition. Soit $x \in [0, 25]$. Alors $4x \leq 100$, donc $u(x) \geq 0$: $u(x)$ appartient à $[0, +\infty[$, ensemble de définition de r.

Conclusion. $D = r \circ u$, et D est définie sur $[0, 25]$.

2.

Montrer que la demande diminue quand le prix augmente.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; regarde le coefficient de x dans $u(x)$.

CORRIGÉ

Monotonie de u. u est affine de coefficient $-4 < 0$: elle est strictement décroissante sur $[0, 25]$, à valeurs dans $J = [0, +\infty[$.

Monotonie de r. La racine carrée est strictement croissante sur J.

Composée. Les sens sont contraires : d'après la monotonie d'une composée, $D = r \circ u$ est strictement décroissante sur $[0, 25]$.

Conclusion. La demande diminue quand le prix augmente.

3.

Calculer $D(0)$, $D(9)$ et $D(16)$, puis donner la demande maximale sur $[0, 25]$.

INDICE

Début : $100 - 4 \times 9 = 64$.

CORRIGÉ

Valeurs.

- $D(0) = \sqrt{100} = 10$;
- $D(9) = \sqrt{64} = 8$, car $100 - 36 = 64$;
- $D(16) = \sqrt{36} = 6$, car $100 - 64 = 36$.

Demande maximale. D est décroissante sur $[0, 25]$, donc $D(x) \leq D(0) = 10$ pour tout $x \in [0, 25]$. Ce maximum correspond au prix théorique 0 : le modèle n'a de sens économique que pour un prix strictement positif.

Conclusion. La demande maximale sur $[0, 25]$ est 10 centaines d'unités. Passer de 9 à 16 dirhams fait baisser la demande de 800 à 600 unités.

4.

Un second modèle fictif estime la demande par $E(x) = \dfrac{100 - 4x}{8}$. Montrer que $D(x)^2 - E(x)^2 = \dfrac{(100 - 4x)(x - 9)}{16}$, puis, en écrivant $D(x) - E(x) = \dfrac{D(x)^2 - E(x)^2}{D(x) + E(x)}$ pour $x \in [0, 25[$, déterminer les prix pour lesquels $D(x) \geq E(x)$.

INDICE

Début : $D(x)^2 = 100 - 4x$; mets $100 - 4x$ en facteur. **Point délicat :** pour $x < 25$, $D(x) + E(x)$ est strictement positif ; n'oublie pas $x = 25$.

CORRIGÉ

Différence des carrés. Soit $x \in [0, 25]$. On a $D(x)^2 = 100 - 4x$ et $E(x)^2 = \dfrac{(100 - 4x)^2}{64}$. On met $100 - 4x$ en facteur :

$$\begin{aligned} &D(x)^2 - E(x)^2 \\ &= (100 - 4x) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{100 - 4x}{64}\right) \\ &= (100 - 4x) \times \frac{4x - 36}{64} \\ &= \frac{(100 - 4x)(x - 9)}{16}. \end{aligned}$$

Signe de la somme. Pour $x \in [0, 25[$, $100 - 4x > 0$, donc $D(x) > 0$ et $E(x) > 0$: $D(x) + E(x) > 0$.

Signe de la différence. Sur $[0, 25[$, $D(x) - E(x)$ a donc le signe de $D(x)^2 - E(x)^2$, c'est-à-dire celui de $x - 9$: négatif sur $[0, 9[$, nul en 9, positif sur $]9, 25[$. En $x = 25$, on a $D(25) = E(25) = 0$.

Conclusion. On a $D(x) \geq E(x)$ pour $x \in [9, 25]$, avec égalité en 9 (où $D(9) = E(9) = 8$) et en 25. Pour un prix inférieur à 9 dirhams, le second modèle prévoit une demande plus forte.