BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	8

Exercice 1

Comparer deux fonctions grâce à un carré

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = 5x$.

1.

Calculer $f(x) - g(x)$, puis l'écrire sous la forme d'un carré.

INDICE

Outil : une identité remarquable. **Début :** réduis d'abord les termes en x.

2.

En déduire la comparaison de f et g sur $\mathbb{R}$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : un carré est positif ou nul. Traduis ensuite ce signe en position des courbes.

3.

Pour quelle valeur de x les deux courbes ont-elles un point commun ? Donner ses coordonnées.

INDICE

Début : un point commun correspond à une différence nulle.

Exercice 2

Un bénéfice lu sur un tableau de valeurs

Une entreprise fictive vend x centaines d'articles par mois, avec $x \in [0, 8]$. Son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est noté $B(x)$. On sait que B est strictement croissante sur $[0, 3]$ et strictement décroissante sur $[3, 8]$, et on donne ce tableau de valeurs (données fictives) :

x	0	1	3	6	7	8
$B(x)$	1	4	7	4	0	-3

1.

Résoudre l'équation $B(x) = 4$ dans $[0, 8]$.

INDICE

Outil : sur un intervalle où B est strictement monotone, une valeur est prise au plus une fois.

2.

Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 4$, puis interpréter le résultat.

INDICE

Début : sur $[0, 3]$, compare x à 1 ; sur $[3, 8]$, compare x à 6.

3.

Pour quelles ventes l'entreprise est-elle en perte, c'est-à-dire $B(x) < 0$?

INDICE

Début : sur $[0, 3]$, $B(x) \geq B(0)$. Sur $[3, 8]$, utilise $B(7) = 0$.

Exercice 3

Une fonction bornée sur $\mathbb{R}$

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3 - \dfrac{4}{x^2+1}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 < \dfrac{4}{x^2+1} \leq 4$.

INDICE

Début : pars de $x^2 + 1 \geq 1$, puis passe aux inverses de nombres strictement positifs.

2.

En déduire que k est bornée sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : multiplier par -1 change le sens des inégalités ; ajoute ensuite 3.

3.

Le réel -1 est-il le minimum de k ? Le réel 3 est-il un maximum de k ?

INDICE

Outil : un extremum est une valeur atteinte. Calcule $k(0)$, puis demande-toi si $k(x) = 3$ est possible.

Exercice 4

Le taux de variation d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

1.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. Montrer que $T(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2 + 2)$.

INDICE

Début : regroupe $2(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)$, puis factorise par $x_2 - x_1$.

2.

En déduire le sens de variation de f sur $[-1, +\infty[$.

INDICE

Début : si $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ sont distincts, compare $x_1 + x_2$ à -2.

3.

Étudier de même le sens de variation de f sur $]-\infty, -1]$, puis donner le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : encadre x_1 et x_2, additionne les deux encadrements et compare à -2. **Ensuite :** relis le tableau des sens obtenus.

Exercice 5

Ajouter ou multiplier sans recalculer

Une fonction f, définie sur $[-2, 4]$, est strictement décroissante sur $[-2, 1]$ et strictement croissante sur $[1, 4]$, avec $f(-2) = 5$, $f(1) = -1$ et $f(4) = 3$. On définit sur $[-2, 4]$ les fonctions $g = f - 4$ et $h = -3f$.

1.

Donner les variations de g et ses valeurs en -2, 1 et 4.

INDICE

Outil : ajouter un réel ne change pas le sens de variation. Les valeurs, elles, changent.

2.

Donner les variations de h et ses valeurs en -2, 1 et 4.

INDICE

Outil : le coefficient -3 est négatif.

3.

En déduire le maximum de h et le minimum de g sur $[-2, 4]$.

INDICE

Début : relis les variations obtenues : où le sens change-t-il ?

Exercice 6

Lire extremums et images sur un tableau

Une fonction p est définie sur $[-3, 6]$. Ses variations sont strictes sur chaque intervalle et résumées par ce tableau :

x	-3		0		2		6
$p(x)$	-2	croît	4	décroît	1	croît	5

1.

Donner le maximum et le minimum de p sur $[-3, 6]$, avec les abscisses où ils sont atteints.

INDICE

Outil : un extremum est une valeur placée dans le tableau ; repère-les toutes, puis compare-les.

2.

Donner le maximum de p sur $[-3, 2]$. Le réel $p(0)$ est-il un maximum local de p ?

INDICE

Début : ne garde que la partie du tableau entre -3 et 2.

3.

Donner l'image de l'intervalle $[0, 2]$, puis celle de $[-3, 6]$.

INDICE

Outil : sur un tableau donné, on admet par convention que chaque flèche prend toutes les valeurs entre ses deux bouts ; l'image va donc du plus petit au plus grand nombre lu sur l'intervalle.

Exercice 7

Composer avec la racine carrée

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x - 7$, et r la fonction racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition de $r \circ u$ et son expression.

INDICE

Outil : x convient si $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de r.

2.

Calculer $(r \circ u)(2)$, $(r \circ u)(4)$ et $(r \circ u)(8)$.

INDICE

Début : calcule d'abord $u(x)$, puis sa racine carrée.

3.

Déterminer $u \circ r$ (ensemble de définition et expression), puis comparer $(u \circ r)(4)$ et $(r \circ u)(4)$.

INDICE

Début : ici, on prend d'abord la racine carrée, puis on applique u.

Exercice 8

Une racine décalée vers la droite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - 7}$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition de f et son sens de variation.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$, ici avec $a = -7$.

2.

Calculer $f(7)$, $f(8)$, $f(11)$ et $f(16)$.

INDICE

Début : pour ces valeurs, $x - 7$ est un carré parfait.

3.

Expliquer comment obtenir la courbe de f à partir de celle de la fonction racine carrée.

INDICE

Outil : la translation de vecteur $-a\,\vec{i}$.