BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	8

Exercice 1

Comparer deux fonctions grâce à un carré

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = 5x$.

1.

Calculer $f(x) - g(x)$, puis l'écrire sous la forme d'un carré.

INDICE

Outil : une identité remarquable. **Début :** réduis d'abord les termes en x.

CORRIGÉ

Réduction. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - g(x) \\ &= x^2 + 3x + 1 - 5x \\ &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Identité remarquable. On reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$, qui vaut $(a - b)^2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x - 1)^2$.

2.

En déduire la comparaison de f et g sur $\mathbb{R}$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : un carré est positif ou nul. Traduis ensuite ce signe en position des courbes.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Un carré est positif ou nul :

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

D'après la question 1, $f(x) - g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $g(x) \leq f(x)$.

Conclusion. On a $g \leq f$ sur $\mathbb{R}$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ (elles peuvent se toucher).

3.

Pour quelle valeur de x les deux courbes ont-elles un point commun ? Donner ses coordonnées.

INDICE

Début : un point commun correspond à une différence nulle.

CORRIGÉ

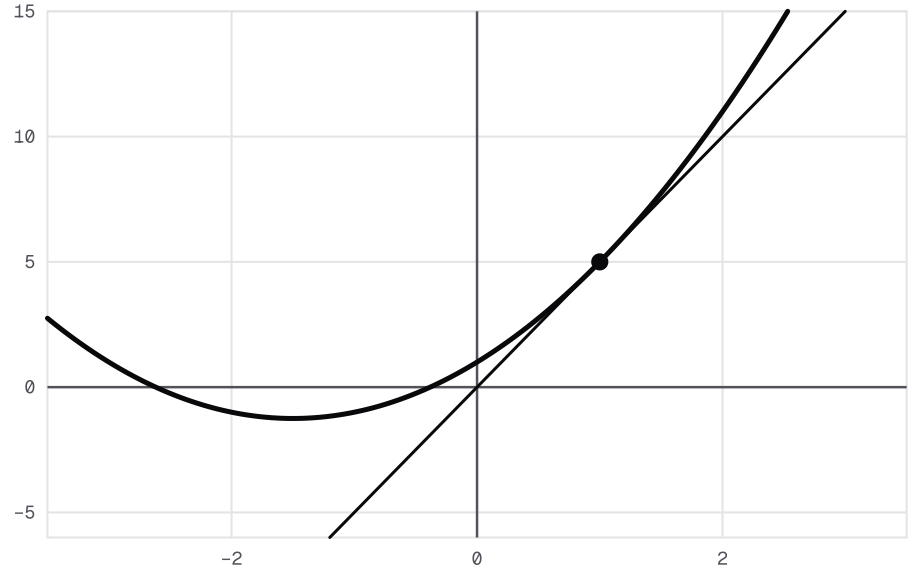
Abscisse. Un point commun a une abscisse x telle que $f(x) = g(x)$, soit $f(x) - g(x) = 0$. D'après la question 1, cela s'écrit :

$$(x-1)^2 = 0,$$

donc $x = 1$.

Ordonnée. $g(1) = 5 \times 1 = 5$. Vérification : $f(1) = 1 + 3 + 1 = 5$.

Conclusion. Les courbes ne se rencontrent que pour $x = 1$: le seul point commun est $(1, 5)$.



La droite de g(x) = 5x reste sous la parabole de f(x) = x² + 3x + 1 et ne la touche qu'au point A(1, 5).

Exercice 2

Un bénéfice lu sur un tableau de valeurs

Une entreprise fictive vend x centaines d'articles par mois, avec $x \in [0, 8]$. Son bénéfice mensuel, en milliers de dirhams, est noté $B(x)$. On sait que B est strictement croissante sur $[0, 3]$ et strictement décroissante sur $[3, 8]$, et on donne ce tableau de valeurs (données fictives) :

x	0	1	3	6	7	8
$B(x)$	1	4	7	4	0	-3

1.

Résoudre l'équation $B(x) = 4$ dans $[0, 8]$.

INDICE

Outil : sur un intervalle où B est strictement monotone, une valeur est prise au plus une fois.

CORRIGÉ

Sur $[0, 3]$. B est strictement croissante, donc elle prend chaque valeur au plus une fois. Comme $B(1) = 4$, le seul réel de cet intervalle qui convient est 1.

Sur $[3, 8]$. B est strictement décroissante et $B(6) = 4$: seul 6 convient dans cet intervalle.

Conclusion. Dans $[0, 8]$, l'ensemble des solutions de $B(x) = 4$ est $\{1; 6\}$.

2.

Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 4$, puis interpréter le résultat.

INDICE

Début : sur $[0, 3]$, compare x à 1 ; sur $[3, 8]$, compare x à 6.

CORRIGÉ

On remplace 4 par $B(1)$ sur $[0, 3]$, et par $B(6)$ sur $[3, 8]$.

Sur $[0, 3]$. B est strictement croissante, elle conserve l'ordre : $B(x) \geq B(1)$ équivaut à $x \geq 1$. On garde $[1, 3]$.

Sur $[3, 8]$. B est strictement décroissante, elle renverse l'ordre : $B(x) \geq B(6)$ équivaut à $x \leq 6$. On garde $[3, 6]$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $[1, 6]$. Sur la courbe de B, ce sont les abscisses des points situés sur la droite d'équation $y = 4$ ou au-dessus. Le bénéfice atteint au moins 4 milliers de dirhams pour des ventes de 100 à 600 articles.

3.

Pour quelles ventes l'entreprise est-elle en perte, c'est-à-dire $B(x) < 0$?

INDICE

Début : sur $[0, 3]$, $B(x) \geq B(0)$. Sur $[3, 8]$, utilise $B(7) = 0$.

CORRIGÉ

Sur $[0, 3]$**.** B est croissante, donc, pour tout x de cet intervalle, $B(x) \geq B(0) = 1 > 0$: aucune perte.

Sur $[3, 8]$**.** B est strictement décroissante et $B(7) = 0$, donc $B(x) < B(7)$ équivaut à $x > 7$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]7, 8]$: l'entreprise est en perte pour des ventes de plus de 700 articles.

Exercice 3

Une fonction bornée sur $\mathbb{R}$

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3 - \dfrac{4}{x^2+1}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 < \dfrac{4}{x^2+1} \leq 4$.

INDICE

Début : pars de $x^2 + 1 \geq 1$, puis passe aux inverses de nombres strictement positifs.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Comme $x^2 \geq 0$:

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Passage aux inverses. Pour des nombres strictement positifs, les inverses sont rangés dans l'ordre contraire :

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Multiplication par 4. Le réel 4 est strictement positif : les inégalités gardent leur sens.

Conclusion. Pour tout réel x, $0 < \dfrac{4}{x^2+1} \leq 4$.

2.

En déduire que k est bornée sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : multiplier par -1 change le sens des inégalités ; ajoute ensuite 3.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On part de l'encadrement de la question 1.

Multiplication par -1. Elle change le sens des inégalités :

$$-4 \leq -\frac{4}{x^2+1} < 0.$$

Ajout de 3. Il conserve le sens : $-1 \leq k(x) < 3$.

Conclusion. Les bornes -1 et 3 sont des constantes, indépendantes de x : -1 minore k et 3 la majore, donc k est bornée sur $\mathbb{R}$.

3.

Le réel -1 est-il le minimum de k ? Le réel 3 est-il un maximum de k ?

INDICE

Outil : un extremum est une valeur atteinte. Calcule $k(0)$, puis demande-toi si $k(x) = 3$ est possible.

CORRIGÉ

Le réel -1. On a $k(0) = 3 - 4 = -1$, et $k(x) \geq -1$ pour tout réel x (question 2). Cette valeur est atteinte : c'est le minimum de k sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Le réel 3. L'égalité $k(x) = 3$ demanderait $\dfrac{4}{x^2+1} = 0$, ce qui est impossible : ce quotient est strictement positif (question 1). Le majorant 3 n'est jamais atteint.

Conclusion. -1 est le minimum de k ; 3 est un majorant de k, mais pas un maximum.

Exercice 4

Le taux de variation d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

1.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. Montrer que $T(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2 + 2)$.

INDICE

Début : regroupe $2(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)$, puis factorise par $x_2 - x_1$.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts.

Différence des images. Avec $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$:

$$\begin{aligned} &f(x_2) - f(x_1) \\ &= 2(x_2^2 - x_1^2) \\ &\quad + 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \\ &\quad \times \big(2(x_1 + x_2) + 4\big). \end{aligned}$$

Division. Comme $x_2 - x_1 \neq 0$, on divise par $x_2 - x_1$:

$$\begin{aligned} &T(x_1, x_2) \\ &= 2(x_1 + x_2) + 4 \\ &= 2(x_1 + x_2 + 2). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tous réels distincts x_1 et x_2, $T(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2 + 2)$.

2.

En déduire le sens de variation de f sur $[-1, +\infty[$.

INDICE

Début : si $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ sont distincts, compare $x_1 + x_2$ à -2.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[-1, +\infty[$. On a $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$; comme ils sont distincts, l'un au moins est strictement supérieur à -1. En additionnant :

$$x_1 + x_2 > -2.$$

Donc $x_1 + x_2 + 2 > 0$ et, d'après la question 1, $T(x_1, x_2) > 0$.

Conclusion. Le taux de variation de f entre deux réels distincts de $[-1, +\infty[$ est toujours strictement positif : f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

3.

Étudier de même le sens de variation de f sur $]-\infty,-1]$, puis donner le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : encadre x_1 et x_2, additionne les deux encadrements et compare à -2. **Ensuite :** relis le tableau des sens obtenus.

CORRIGÉ

Sens de variation. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $]-\infty,-1]$. On a $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$, et l'un au moins est strictement inférieur à -1. Donc $x_1 + x_2 < -2$, puis $T(x_1, x_2) < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

Minimum. f décroît jusqu'en -1, puis croît : $f(x) \geq f(-1)$ pour tout réel x. On calcule :

$$f(-1) = 2 - 4 - 3 = -5.$$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$, et son minimum sur $\mathbb{R}$ vaut -5, atteint en $x = -1$.

Exercice 5

Ajouter ou multiplier sans recalculer

Une fonction f, définie sur $[-2, 4]$, est strictement décroissante sur $[-2, 1]$ et strictement croissante sur $[1, 4]$, avec $f(-2) = 5$, $f(1) = -1$ et $f(4) = 3$. On définit sur $[-2, 4]$ les fonctions $g = f - 4$ et $h = -3f$.

1.

Donner les variations de g et ses valeurs en -2, 1 et 4.

INDICE

Outil : ajouter un réel ne change pas le sens de variation. Les valeurs, elles, changent.

CORRIGÉ

On a $g = f + \lambda$ avec $\lambda = -4$. D'après les variations de $f + \lambda$, ajouter une constante ne modifie pas le sens de variation.

Variations. Comme f, la fonction g est strictement décroissante sur $[-2, 1]$ et strictement croissante sur $[1, 4]$.

Valeurs. On retranche 4 à chaque valeur de f :

- $g(-2) = 5 - 4 = 1$;
- $g(1) = -1 - 4 = -5$;
- $g(4) = 3 - 4 = -1$.

Conclusion. g a les variations de f, avec $g(-2) = 1$, $g(1) = -5$ et $g(4) = -1$.

2.

Donner les variations de h et ses valeurs en -2, 1 et 4.

INDICE

Outil : le coefficient -3 est négatif.

CORRIGÉ

On a $h = \lambda f$ avec $\lambda = -3$, réel strictement négatif. D'après les variations de λf, h a des variations contraires à celles de f.

Variations. h est strictement croissante sur $[-2, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, 4]$.

Valeurs. On multiplie chaque valeur de f par -3 :

- $h(-2) = -3 \times 5 = -15$;
- $h(1) = -3 \times (-1) = 3$;
- $h(4) = -3 \times 3 = -9$.

Conclusion. h croît sur $[-2, 1]$ puis décroît sur $[1, 4]$, avec $h(-2) = -15$, $h(1) = 3$ et $h(4) = -9$.

3.

En déduire le maximum de h et le minimum de g sur $[-2, 4]$.

INDICE

Début : relis les variations obtenues : où le sens change-t-il ?

CORRIGÉ

Maximum de h. h croît sur $[-2, 1]$ puis décroît sur $[1, 4]$: pour tout $x \in [-2, 4]$, $h(x) \leq h(1) = 3$.

Minimum de g. g décroît sur $[-2, 1]$ puis croît sur $[1, 4]$: pour tout $x \in [-2, 4]$, $g(x) \geq g(1) = -5$.

Conclusion. Sur $[-2, 4]$, le maximum de h vaut 3 et le minimum de g vaut -5, tous deux atteints en 1. Le minimum -1 de f est devenu le maximum 3 de h.

Exercice 6

Lire extremums et images sur un tableau

Une fonction p est définie sur $[-3, 6]$. Ses variations sont strictes sur chaque intervalle et résumées par ce tableau :

x	-3		0		2		6
$p(x)$	-2	croît	4	décroît	1	croît	5

1.

Donner le maximum et le minimum de p sur $[-3, 6]$, avec les abscisses où ils sont atteints.

INDICE

Outil : un extremum est une valeur placée dans le tableau ; repère-les toutes, puis compare-les.

CORRIGÉ

Sur chaque intervalle du tableau, p est strictement monotone : les extremums se trouvent parmi les valeurs écrites dans le tableau.

- $p(-3) = -2$;
- $p(0) = 4$;
- $p(2) = 1$;
- $p(6) = 5$.

Conclusion. Le maximum de p sur $[-3, 6]$ est 5, atteint en $x = 6$; le minimum est -2, atteint en $x = -3$.

2.

Donner le maximum de p sur $[-3, 2]$. Le réel $p(0)$ est-il un maximum local de p ?

INDICE

Début : ne garde que la partie du tableau entre -3 et 2.

CORRIGÉ

Maximum sur $[-3, 2]$. Sur cet intervalle, p croît de -2 à 4, puis décroît de 4 à 1. Son maximum sur $[-3, 2]$ est donc $p(0) = 4$, atteint en 0.

Maximum local. L'intervalle ouvert $J =]-3, 2[$ contient 0, et $p(0)$ est le maximum de p sur $[-3, 6] \cap J$, c'est-à-dire sur J.

Conclusion. $p(0) = 4$ est un maximum local de p. Ce n'est pas le maximum de p sur $[-3, 6]$, car $p(6) = 5 > 4$.

3.

Donner l'image de l'intervalle $[0, 2]$, puis celle de $[-3, 6]$.

INDICE

Outil : sur un tableau donné, on admet par convention que chaque flèche prend toutes les valeurs entre ses deux bouts ; l'image va donc du plus petit au plus grand nombre lu sur l'intervalle.

CORRIGÉ

Par convention de lecture d'un tableau, sur chaque flèche la fonction prend toutes les valeurs comprises entre celles de ses deux extrémités.

Image de $[0, 2]$. Sur $[0, 2]$, p décroît de 4 à 1 : l'image de $[0, 2]$ est $[1, 4]$.

Image de $[-3, 6]$. La plus petite valeur lue est -2, la plus grande 5, et chaque valeur intermédiaire est prise sur l'une des flèches : l'image de $[-3, 6]$ est $[-2, 5]$.

Conclusion. L'image de $[0, 2]$ est $[1, 4]$, celle de $[-3, 6]$ est $[-2, 5]$.

Exercice 7

Composer avec la racine carrée

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x - 7$, et r la fonction racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition de $r \circ u$ et son expression.

INDICE

Outil : x convient si $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de r.

CORRIGÉ

Un réel x convient si $u(x)$ existe et appartient à $[0, +\infty[$, ensemble de définition de r. Comme u est définie sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $u(x) \geq 0$:

$$\begin{aligned} 4x - 7 \geq 0 &\Leftrightarrow 4x \geq 7 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_{r\circ u} = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$ et, pour tout x de cet intervalle, $(r \circ u)(x) = \sqrt{4x - 7}$.

2.

Calculer $(r \circ u)(2)$, $(r \circ u)(4)$ et $(r \circ u)(8)$.

INDICE

Début : calcule d'abord $u(x)$, puis sa racine carrée.

CORRIGÉ

Les réels 2, 4 et 8 sont supérieurs à $\frac{7}{4}$. On calcule d'abord $u(x)$, puis sa racine carrée :

- $u(2) = 1$, donc $(r \circ u)(2) = \sqrt{1} = 1$;
- $u(4) = 9$, donc $(r \circ u)(4) = \sqrt{9} = 3$;
- $u(8) = 25$, donc $(r \circ u)(8) = \sqrt{25} = 5$.

Conclusion. $(r \circ u)(2) = 1$, $(r \circ u)(4) = 3$ et $(r \circ u)(8) = 5$.

3.

Déterminer $u \circ r$ (ensemble de définition et expression), puis comparer $(u \circ r)(4)$ et $(r \circ u)(4)$.

INDICE

Début : ici, on prend d'abord la racine carrée, puis on applique u.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. On applique d'abord r, définie sur $[0, +\infty[$, puis u, définie sur $\mathbb{R}$: toute valeur $\sqrt{x}$ convient. Donc $D_{u\circ r} = [0, +\infty[$.

Expression. Pour tout $x \geq 0$, on remplace x par $\sqrt{x}$ dans $4x - 7$: $u\big(\sqrt{x}\big) = 4\sqrt{x} - 7$.

Comparaison. $(u \circ r)(4) = 4 \times 2 - 7 = 1$, alors que $(r \circ u)(4) = 3$ (question 2).

Conclusion. $u \circ r$ est définie sur $[0, +\infty[$ par $(u \circ r)(x) = 4\sqrt{x} - 7$. Comme $(u \circ r)(4) \neq (r \circ u)(4)$, les deux composées sont différentes.

Exercice 8

Une racine décalée vers la droite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-7}$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition de f et son sens de variation.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, ici avec $a = -7$.

CORRIGÉ

On a $f(x) = \sqrt{x+a}$ avec $a = -7$.

Ensemble de définition. $f(x)$ existe si et seulement si $x - 7 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 7$: $D_f = [7, +\infty[$.

Sens de variation. D'après la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, f est strictement croissante sur cet intervalle, de minimum $f(7) = 0$.

Conclusion. f est définie et strictement croissante sur $[7, +\infty[$.

2.

Calculer $f(7)$, $f(8)$, $f(11)$ et $f(16)$.

INDICE

Début : pour ces valeurs, $x - 7$ est un carré parfait.

CORRIGÉ

Pour ces valeurs, $x - 7$ est un carré parfait :

- $f(7) = \sqrt{0} = 0$;
- $f(8) = \sqrt{1} = 1$;
- $f(11) = \sqrt{4} = 2$;
- $f(16) = \sqrt{9} = 3$.

x	7	8	11	16
$f(x)$	0	1	2	3

Conclusion. $f(7) = 0$, $f(8) = 1$, $f(11) = 2$ et $f(16) = 3$.

3.

Expliquer comment obtenir la courbe de f à partir de celle de la fonction racine carrée.

INDICE

Outil : la translation de vecteur $-a\,\vec{i}$.

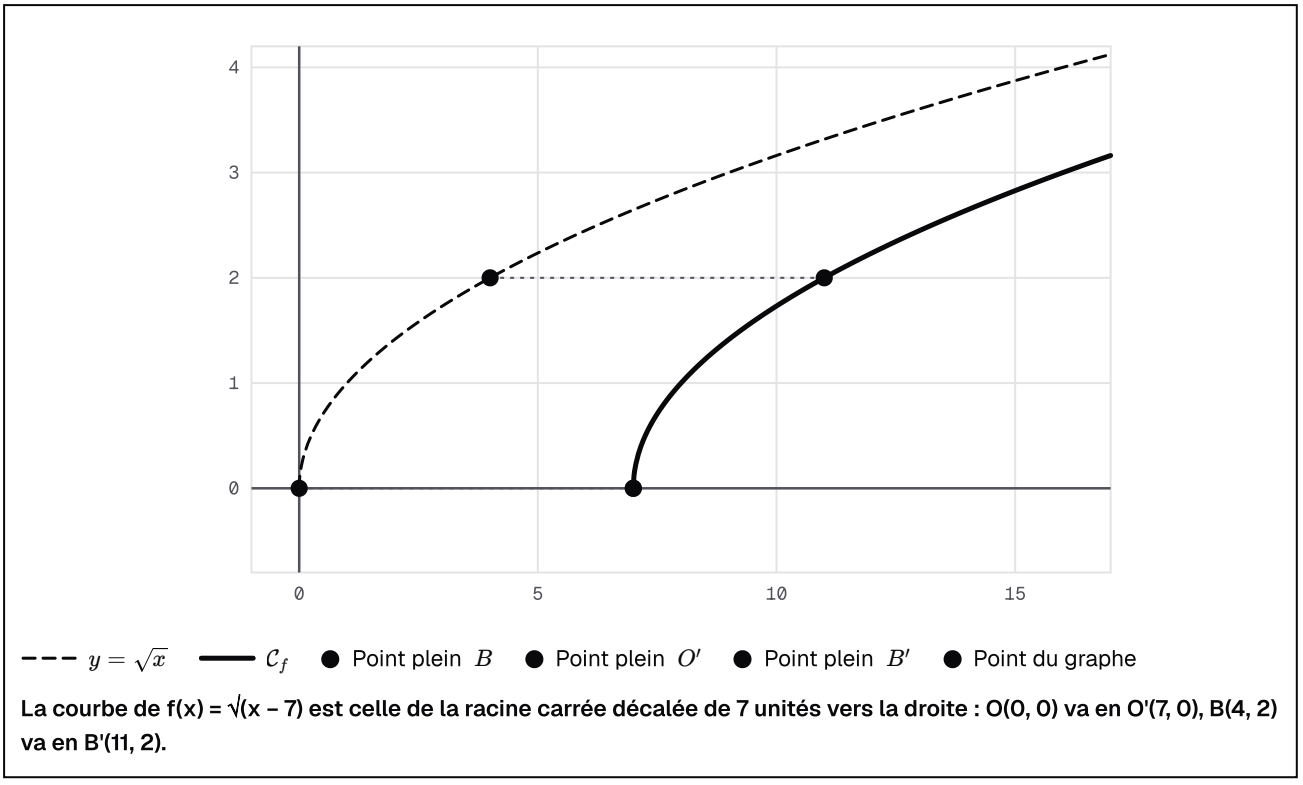
CORRIGÉ

D'après la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, sa courbe est l'image de celle de la racine carrée par la translation de vecteur $-a\,\vec{i}$. Ici $a = -7$:

$$-a\,\vec{i} = 7\,\vec{i}.$$

Chaque point glisse de 7 unités vers la droite, sans changer d'ordonnée : le point $(0, 0)$ devient $(7, 0)$ et le point $(4, 2)$ devient $(11, 2)$.

Conclusion. La courbe de f s'obtient en décalant celle de la racine carrée de 7 unités vers la droite.



La courbe de f(x) = √(x − 7) est celle de la racine carrée décalée de 7 unités vers la droite : O(0, 0) va en O'(7, 0), B(4, 2) va en B'(11, 2).