BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

Un atelier qui veut gagner de l'argent

Un atelier fictif fabrique des tables. Il en produit x dizaines par semaine, avec $0 \leq x \leq 10$. Les montants sont en milliers de dirhams, et toutes les données sont fictives.

La recette et le coût de production valent :

$$R(x) = 12x$$
$$C(x) = x^2 + 2x + 16$$

Le nombre 16 est le coût fixe : l'atelier le paie même sans rien produire.

Devine : Une prédiction

L'atelier produit une seule dizaine de tables, soit $x = 1$. Gagne-t-il de l'argent ?

A. Oui, il gagne 12 milliers de dirhams.

Faux.

12 est la recette $R(1)$, pas le bénéfice : il faut retirer le coût.

B. Non, il perd 7 milliers de dirhams.

Juste.

Juste : la recette ne couvre pas le coût.

C. Non, il perd 19 milliers de dirhams.

Faux.

19 est le coût $C(1)$; une partie est couverte par la recette.

Correction

Recette et coût. Pour $x = 1$, on calcule $R(1) = 12$ et $C(1) = 1 + 2 + 16 = 19$.

Bénéfice. On retire le coût de la recette :

$$\begin{aligned} R(1) - C(1) &= 12 - 19 \\ &= -7. \end{aligned}$$

Conclusion. Non : pour une seule dizaine de tables, l'atelier perd 7 milliers de dirhams.

Pour $x = 5$, en revanche, $R(5) = 60$ et $C(5) = 51$: l'atelier gagne 9 milliers de dirhams.

Dans ce chapitre, tu apprends à **comparer** deux fonctions et à lire où une courbe passe au-dessus d'une autre. Tu cherches ainsi le **meilleur** niveau de production.

Tu étudies aussi le **sens de variation** d'une fonction, ses **bornes**, ses **extremums** et la **composée** de deux fonctions.

Tu termines par deux nouvelles courbes : celles de $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et de $x \mapsto ax^3$.

Petit rappel. Tes outils du tronc commun suffisent : les fonctions de référence, la factorisation et le signe d'un trinôme ; chacun est rappelé au moment où il sert.

Comparer deux fonctions

Recette contre coût

Reprends l'atelier. Il gagne de l'argent quand la recette dépasse le coût, c'est-à-dire quand $R(x) \geq C(x)$.

Comparer R et C, c'est donc chercher la **zone de bénéfice**. Commence par une seule valeur de x.

Devine : Une valeur test

Pour $x = 3$ dizaines, comment se comparent $R(3)$ et $C(3)$?

A. $R(3) > C(3)$

Juste.

Juste : $36 > 31$, l'atelier gagne 5 milliers de dirhams.

B. $R(3) < C(3)$

Faux.

Calcule les deux : $R(3) = 36$ et $C(3) = 9 + 6 + 16 = 31$.

C. $R(3) = C(3)$

Faux.

Les deux valeurs diffèrent : 36 et 31.

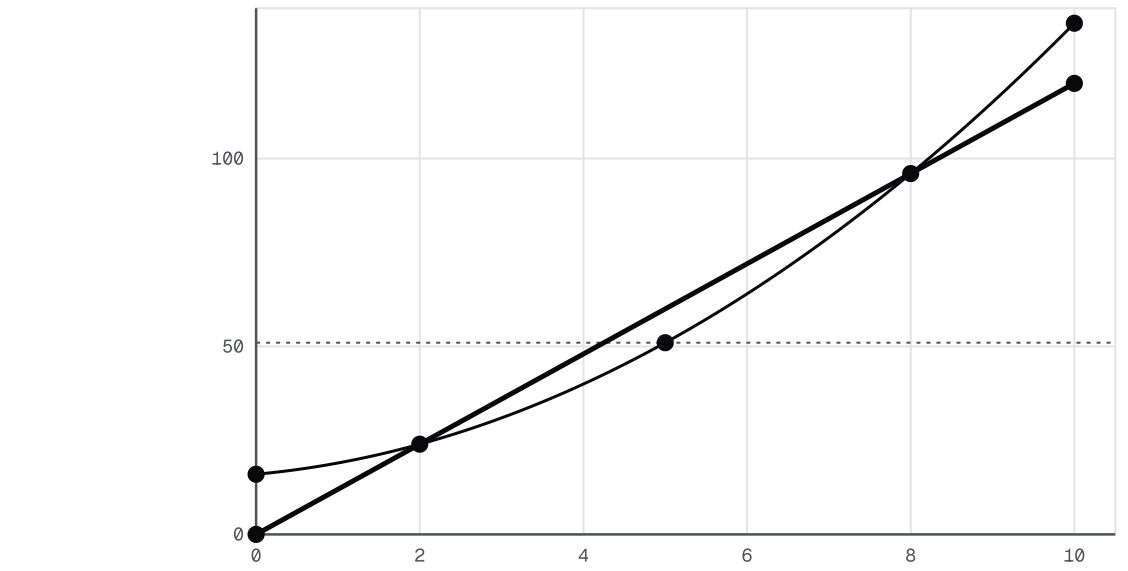
Correction

On calcule les deux valeurs :

$$\begin{aligned} R(3) &= 12 \times 3 = 36 \\ C(3) &= 3^2 + 2 \times 3 + 16 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Donc $R(3) > C(3)$: pour 3 dizaines, la recette dépasse le coût de 5 milliers de dirhams.

Sur la figure qui suit, le point de la courbe de R d'abscisse 3 est au-dessus de celui de la courbe de C.



Recette R et coût C de l'atelier, données fictives

Comparer deux fonctions sur un intervalle

En clair. Sur $[2, 8]$, chaque point de la courbe de R est au-dessus du point de la courbe de C qui a la même abscisse, ou confondu avec lui (en 2 et en 8).

Pour comparer deux fonctions, on compare donc leurs valeurs **en chaque** x de l'intervalle. Une seule valeur ne suffit pas.

Définition : Comparaison de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

- On dit que f est **inférieure** à g sur I, et on écrit $f \leq g$ sur I, si pour tout réel x de I : $f(x) \leq g(x)$.
- On dit que f est **strictement inférieure** à g sur I si pour tout réel x de I : $f(x) < g(x)$.
- Les fonctions f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de définition D et si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x de D.

Interprétation graphique. Dans un repère, $f \leq g$ sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}_g$ (les points de même abscisse x ont pour ordonnées $f(x) \leq g(x)$).

Exemple : comparer par la différence

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 5$ et $g(x) = x^2 + 6x + 6$.

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ &= (x+1)^2. \end{aligned}$$

Signe. Un carré est positif ou nul, donc $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel x : $f \leq g$ sur $\mathbb{R}$.

Position. La courbe de f est au-dessous de celle de g. Elles se touchent seulement en $x = -1$, où $f(-1) = g(-1) = 1$.

Le signe de la différence

Méthode : comparer deux fonctions par le signe de leur différence

1. **Calcule** $f(x) - g(x)$ pour x dans l'intervalle I, puis simplifie.
2. **Factorise** si tu peux, puis **étudie le signe** : tableau de signes ou signe d'un trinôme.
3. **Conclus** : là où la différence est négative, $f(x) \leq g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Là où elle s'annule, les deux courbes se coupent.

Rappel : un trinôme est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines, et du signe contraire entre elles.

Exemple : la zone de bénéfice

Pour l'atelier, on calcule la différence pour tout x de $[0, 10]$:

$$\begin{aligned} &R(x) - C(x) \\ &= 12x - x^2 - 2x - 16 \\ &= -x^2 + 10x - 16 \\ &= -(x-2)(x-8). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines 2 et 8. Son coefficient de x^2 est négatif : il est positif entre les racines. Donc $R(x) \geq C(x)$ pour x dans $[2, 8]$.

Lecture. De 2 à 8 dizaines, l'atelier ne perd rien ; ailleurs dans $[0, 10]$, il perd de l'argent.

Inégalité stricte. De même, $R(x) > C(x)$ équivaut à $x \in \,]2, 8[$: les bornes sont exclues, car en 2 et en 8 la recette est égale au coût.

Exemple : comparer une racine et une fonction affine

Soit f et g les fonctions définies sur $[-11, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+11}$ et $g(x) = \dfrac{x+11}{5}$.

Idée. La différence contient une racine : on passe par les carrés. Pour $x > -11$, on a $f(x) + g(x) > 0$, et l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donne :

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) + g(x)}.$$

Numérateur. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} & f(x)^2 - g(x)^2 \\ &= (x+11) - \frac{(x+11)^2}{25} \\ &= \frac{(x+11)\big(25 - (x+11)\big)}{25} \\ &= \frac{(x+11)(14-x)}{25}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur $f(x) + g(x)$ est strictement positif : $f(x) - g(x)$ a le signe de $(x+11)(14-x)$.

Conclusion. On obtient $f \geq g$ sur $[-11, 14]$ et $f < g$ sur $]14, +\infty[$. Contrôle : $f(14) = g(14) = 5$, et $f(-11) = g(-11) = 0$.

Résoudre avec une courbe

Le directeur fixe un budget : le coût ne doit pas dépasser 51 milliers de dirhams. Sur la figure, la droite d'équation $y = 51$ est tracée.

Les productions permises sont les abscisses des points de la courbe de C situés sous cette droite, ou sur elle.

Pourquoi est-ce vrai ? Le point de la courbe d'abscisse x est à la hauteur $C(x)$: comparer $C(x)$ à 51, c'est comparer deux hauteurs.

Propriété : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère, et c un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = c$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = c$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq c$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de cette droite ou sur elle.
- Pour x commun aux ensembles de définition de f et g : les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$) sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$ ou sur elle (respectivement strictement au-dessous).

Démonstration

Étape 1. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si x appartient à l'ensemble de définition de f et $y = f(x)$. De même pour $\mathcal{C}_g$, et un point $M(x, y)$ appartient à la droite d'équation $y = c$ si et seulement si $y = c$.

Étape 2. Ainsi un réel x vérifie $f(x) = c$ si et seulement si le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ appartient à la droite d'équation $y = c$; il vérifie $f(x) \leq c$ si et seulement si ce point a une ordonnée inférieure ou égale à c.

Étape 3. Un réel x, commun aux deux ensembles de définition, vérifie $f(x) = g(x)$ si et seulement si les points $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et $N(x, g(x))$ de $\mathcal{C}_g$, qui ont la même abscisse, sont confondus ; il vérifie $f(x) \leq g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$) si et seulement si M est au-dessous de N ou confondu avec lui (respectivement strictement au-dessous).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : traduire chaque inégalité en position de points. Au-dessus d'un réel x, le point de la courbe est à la hauteur $f(x)$.

Comparer deux nombres revient alors à comparer deux hauteurs au-dessus du même x. Voilà pourquoi on lit les solutions sur l'axe horizontal.

Vérifie : Une lecture sur la figure

Sur la figure de l'atelier, le point de la droite de R d'abscisse 8 est à la hauteur 96. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $R(x) \geq 96$ sur $[0, 10]$?

A. $[96, 120]$

Faux.
Ce sont des hauteurs, donc des valeurs $R(x)$: on cherche des abscisses.

B. $[0, 8]$

Faux.
À gauche de 8, la droite de R est sous la hauteur 96 : c'est le mauvais côté.

C. $[8, 10]$

Juste.
Juste : à partir de l'abscisse 8, la droite est à la hauteur 96 ou plus haut.

D. $]8, 10]$

Faux.
L'inégalité est large et $R(8) = 96$: le réel 8 est solution, le crochet est fermé.

Correction
Le point de la droite de R d'abscisse x est à la hauteur $R(x)$. Il est à la hauteur 96 ou plus haut pour x de 8 à 10.

Le crochet est fermé en 8, car l'inégalité est large, et en 10, borne de l'intervalle d'étude.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $R(x) \geq 96$ sur $[0, 10]$ est $[8, 10]$. Calcul : $12x \geq 96$ équivaut à $x \geq 8$.

Exemple : un budget à respecter

On résout $C(x) \leq 51$ sur $[0, 10]$.

Lecture. Sur la figure, la droite d'équation $y = 51$ coupe la courbe de C au point d'abscisse 5. À gauche de ce point, la courbe est sous la droite : on lit $x \in [0, 5]$.

Calcul. On retranche 51 aux deux membres : l'inéquation $C(x) \leq 51$ équivaut à

$$x^2 + 2x - 35 \leq 0,$$

soit, en factorisant :

$$(x + 7)(x - 5) \leq 0.$$

Sur $[0, 10]$, le facteur $x + 7$ est strictement positif : il reste $x - 5 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 5$.

Conclusion. Le calcul confirme la lecture : les productions permises sont les $x \in [0, 5]$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Repère** la droite d'équation $y = c$, ou la seconde courbe.
2. **Cherche** les points d'intersection, puis les morceaux de courbe situés au-dessus ou au-dessous.
3. **Lis** les abscisses de ces points, sur l'axe horizontal.
4. **Écris** l'ensemble des solutions. Aux abscisses où les courbes se coupent, le crochet est fermé pour une inégalité large, ouvert pour une stricte. Aux extrémités de l'intervalle de travail, ferme le crochet quand l'extrémité fait partie de cet intervalle et satisfait l'inégalité. Du côté de $-\infty$ ou de $+\infty$, le crochet reste ouvert. Si la lecture tombe entre deux graduations, dis que la valeur est approchée.

Attention : on cherche des abscisses

✗ « L'inéquation $C(x) \leq 51$ a pour solutions les ordonnées entre 16 et 51. »

✓ On cherche des valeurs de x, donc des **abscisses**. Les ordonnées ne sont que les valeurs $C(x)$. Ici, l'ensemble des solutions est $[0, 5]$. Une lecture sur la courbe donne une valeur approchée : confirme-la par un calcul quand c'est possible.

À toi : Deux fonctions face à face

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 14$ et $g(x) = 5x - 6$. Compare f et g sur $\mathbb{R}$. Donne ensuite les points d'intersection de leurs courbes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.
Indice 2
La différence vaut $2x^2 - 14x + 20$: mets 2 en facteur, puis cherche les racines.
Indice 3
Point délicat : un trinôme dont le coefficient de x^2 est positif est négatif **entre** ses racines, pas à l'extérieur.

Réponse
Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) \\ & = 2x^2 - 14x + 20 \\ & = 2(x - 2)(x - 5). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines 2 et 5, et son coefficient de x^2 est positif : il est négatif ou nul sur $[2, 5]$, strictement positif ailleurs.

Position. Donc $f \leq g$ sur $[2, 5]$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Sur $]-\infty, 2[$ et sur $]5, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.

Intersections. On a $f(2) = g(2) = 4$ et $f(5) = g(5) = 19$.

Conclusion. La fonction f est inférieure ou égale à g sur $[2, 5]$, strictement supérieure en dehors ; les courbes se coupent aux points $(2, 4)$ et $(5, 19)$.

Fonction majorée, minorée, bornée

Un prix qui ne descend pas sous un seuil

Une coopérative fictive fabrique des paniers en osier. Pour x paniers fabriqués dans la journée, avec $x \geq 1$, le prix de revient d'un panier vaut, en dirhams :

$$U(x) = 5 + \frac{12}{x}.$$

Les 5 dirhams paient l'osier du panier. Les 12 dirhams de frais fixes de la journée se partagent entre ces x paniers.

Ainsi $U(1) = 17$, $U(4) = 8$ et $U(12) = 6$.

Devine : Un seuil

En fabriquant beaucoup de paniers, la coopérative peut-elle obtenir un prix de revient inférieur à 5 dirhams ?

A. Oui, pour un nombre de paniers assez grand.
Faux.
Les frais fixes partagés diminuent, mais l'osier coûte toujours 5 dirhams.

B. Non, jamais, quel que soit le nombre de paniers.
Juste.
Juste : $\dfrac{12}{x}$ est strictement positif, donc $U(x) > 5$.

C. Oui, dès 12 paniers, le prix de revient passe sous 5.
Faux.
Pour 12 paniers, $U(12) = 6$, qui dépasse 5.

Correction
Soit $x \geq 1$. Le quotient $\dfrac{12}{x}$ est strictement positif, donc :

$$U(x) = 5 + \frac{12}{x} > 5.$$

De plus, $x \geq 1$ donne $\dfrac{12}{x} \leq 12$, donc $U(x) \leq 17$.

Conclusion. Non : quel que soit le nombre de paniers, le prix de revient reste au-dessus de 5 dirhams. Il reste même entre deux seuils fixes, 5 et 17.

En clair. Le nombre 5 est un **plancher** : aucune valeur $U(x)$ ne passe dessous. On dit que U est **minorée** par 5.

Le nombre 17 est un **plafond** : on dit que U est **majorée** par 17.

Un plancher et un plafond qui ne dépendent pas de x : voilà toute l'idée.

Majorée, minorée, bornée

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de I, $f(x) \leq M$. Un tel réel M est un **majorant** de f sur I.

- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de I, $f(x) \geq m$. Un tel réel m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I : il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I, $m \leq f(x) \leq M$.

En symboles, f est majorée sur I si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M$.

Exemple : le prix de revient est borné

Pour tout $x \geq 1$, on a montré que :

$$5 < U(x) \leq 17.$$

Donc U est minorée par 5 et majorée par 17 : elle est **bornée** sur $[1, +\infty[$.

Un majorant n'est pas unique : 20 et 100 sont aussi des majorants de U, puisque $U(x) \leq 17$. De même, 0 est un autre minorant.

Vérifie : Un intrus

Lequel de ces réels n'est **pas** un majorant de U sur $[1, +\infty[$?

A. 17

Faux.
Pour tout $x \geq 1$, $U(x) \leq 17$: c'est un majorant, atteint en $x = 1$.

B. 25

Faux.
On a $U(x) \leq 17 \leq 25$: c'est un majorant.

C. 16

Juste.
Juste : $U(1) = 17$ dépasse 16, donc 16 ne majore pas toutes les valeurs.

D. 1000

Faux.
Un majorant peut être très grand : $U(x) \leq 1000$ pour tout $x \geq 1$.

Correction
Un majorant M doit vérifier $U(x) \leq M$ pour **tous** les x de $[1, +\infty[$.

Or $U(1) = 17 > 16$: le réel 16 ne convient pas, même s'il dépasse toutes les valeurs $U(x)$ pour $x \geq 2$.

Les réels 17, 25 et 1000 conviennent, puisque $U(x) \leq 17$ pour tout $x \geq 1$.

Exemple : une fonction non majorée

Sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto 3x$ n'est pas majorée.

Soit M un réel quelconque. Le réel $x = |M| + 1$ est dans $[0, +\infty[$, et, comme $3|M| \geq M$:

$$3x = 3|M| + 3 > M.$$

Aucun réel M ne dépasse donc toutes les valeurs. En revanche, cette fonction est minorée par 0.

Le majorant vient avant x

Vérifie : La bonne phrase

Laquelle de ces phrases dit que f est majorée sur I ?

A. Un même réel M dépasse ou égale les valeurs $f(x)$ de tous les x de I.

Juste.

Juste : un même réel M sert pour tous les x.

B. À chaque réel x de I, on peut associer un réel M tel que $f(x) \leq M$.

Faux.

Ici M peut changer avec x : $M = f(x)$ convient toujours. La phrase est vraie pour toute fonction.

C. Chaque valeur $f(x)$, pour x dans I, est inférieure ou égale à $f(x) + 1$.

Faux.

Cette inégalité est toujours vraie et ne fixe aucun plafond.

D. L'une des valeurs $f(x)$, pour x dans I, est inférieure ou égale à tous les réels.

Faux.

Aucun réel $f(x)$ n'est inférieur à tous les réels : cette phrase est toujours fausse.

Correction

« f est majorée sur I » signifie : il existe un réel M, choisi **avant** x, tel que $f(x) \leq M$ pour tout x de I. En symboles :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M.$$

Si l'on échange les quantificateurs, on peut prendre $M = f(x)$: la phrase devient vraie pour n'importe quelle fonction.

Attention : un majorant ne dépend pas de x

✗ « Pour tout $x \geq 1$, $U(x) \leq U(x) + 3$, donc U est majorée par $U(x) + 3$. »

✓ Le nombre $U(x)+3$ change avec x : ce n'est pas un majorant. Un majorant est **un seul** réel, le même pour tous les x. Ici, 17 convient, car $U(x) \leq 17$ pour tout $x \geq 1$.

Encadrer pas à pas

Méthode : montrer qu'une fonction est majorée, minorée ou bornée

1. **Pars de** x : écris l'appartenance $x \in I$ comme un encadrement, par exemple $1 \leq x \leq 4$.
2. **Construis** l'encadrement de $f(x)$, une opération à la fois : ajouter un réel, multiplier par un réel positif ou négatif, prendre la racine, le carré ou l'inverse quand le signe est connu.
3. **Conclus** avec deux réels qui ne contiennent pas x : $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de I.
4. **Autre voie** : un maximum ou un minimum lu sur un tableau de variations donne un majorant ou un minorant.

Exemple : encadrer pas à pas

Soit k la fonction définie sur $[1,4]$ par $k(x) = 7 - 2\sqrt{x}$, et soit $x \in [1,4]$.

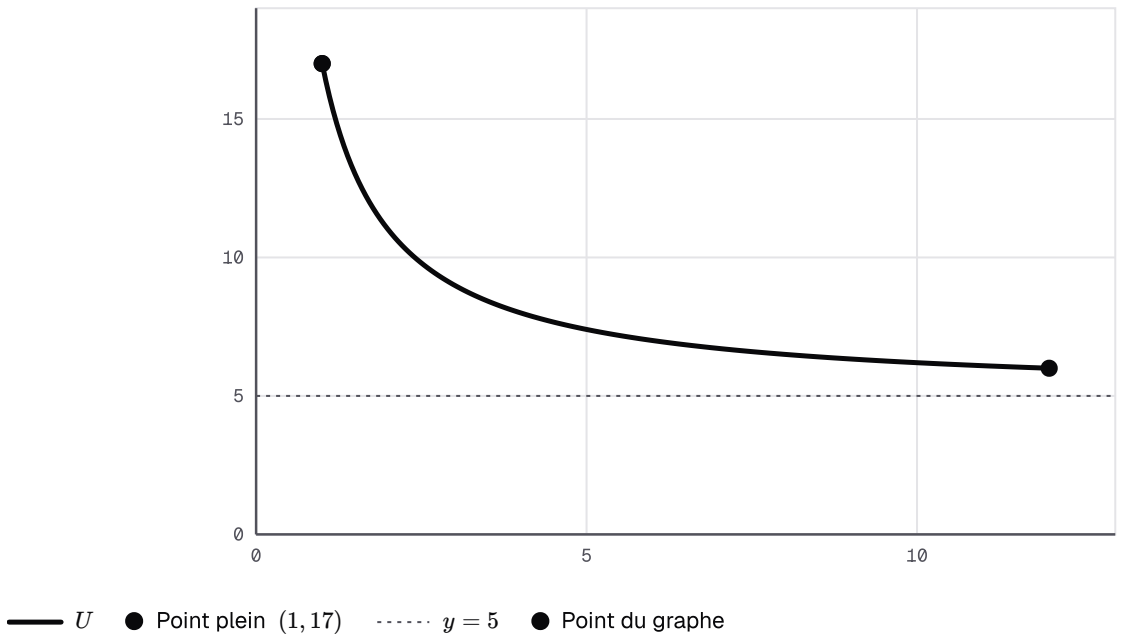
Racine. On part de $1 \leq x \leq 4$. La racine carrée est croissante sur $[0,+\infty[$, donc $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$.

Produit. On multiplie par -2, négatif : l'ordre s'inverse, et $-4 \leq -2\sqrt{x} \leq -2$.

Somme. On ajoute 7 : $3 \leq k(x) \leq 5$.

Conclusion. La fonction k est bornée sur $[1,4]$: minorée par 3, majorée par 5.

Lire des bornes sur une courbe, puis à toi



Prix de revient U d'un panier, données fictives

Sur la figure. Le point le plus haut de la courbe est $(1, 17)$: on lit le majorant 17. La courbe reste au-dessus de la droite d'équation $y = 5$: on lit le minorant 5.

Une figure ne montre qu'une partie de la courbe. La preuve par le calcul reste donc nécessaire.

À toi : Encadrer une fonction

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 4 + \dfrac{6}{x^2 + 2}$. Montre que v est bornée sur $\mathbb{R}$, en donnant un minorant et un majorant. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pars de $x^2 \geq 0$, vrai pour tout réel x.
Indice 2
Ajoute 2 : $x^2 + 2 \geq 2$. Passe ensuite à l'inverse de ces deux réels positifs.
Indice 3
Point délicat : passer à l'inverse de deux réels strictement positifs renverse l'inégalité.

Réponse
Dénominateur. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 2 \geq 2 > 0$.

Inverse. Les deux membres sont strictement positifs : en passant à l'inverse, l'inégalité change de sens :

$$0 < \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}.$$

Produit et somme. On multiplie par 6, positif :

$$0 < \frac{6}{x^2 + 2} \leq 3.$$

On ajoute ensuite 4 :

$$4 < v(x) \leq 7.$$

Conclusion. La fonction v est minorée par 4 et majorée par 7 : elle est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, $v(0) = 7$.

Sens de variation d'une fonction

Le coût augmente-t-il toujours ?

Quand l'atelier produit plus, son coût augmente-t-il à chaque fois ?

On connaît deux valeurs : $C(2) = 24$ et $C(5) = 51$. Entre 2 et 5 dizaines, le coût monte. Mesurons cette hausse pour une dizaine.

Devine : Une hausse moyenne

Entre 2 et 5 dizaines, de combien le coût augmente-t-il **en moyenne par dizaine** ?

A. De 27 milliers de dirhams.

Faux.

27 est la hausse totale, pour 3 dizaines : il reste à diviser.

B. De 9 milliers de dirhams.

Juste.

Juste : $\dfrac{51 - 24}{5 - 2} = \dfrac{27}{3} = 9$.

C. De 17 milliers de dirhams.

Faux.

$\dfrac{51}{3} = 17$ divise le coût final, pas la hausse.

Correction

Hausse totale. Le coût augmente de $C(5) - C(2) = 51 - 24 = 27$, pour $5 - 2 = 3$ dizaines de plus.

Hausse moyenne. On divise par le nombre de dizaines :

$$\frac{C(5) - C(2)}{5 - 2} = \frac{27}{3} = 9.$$

Conclusion. Entre 2 et 5 dizaines, le coût augmente en moyenne de 9 milliers de dirhams par dizaine.

Ce quotient est positif : de 2 à 5 dizaines, le coût monte. On dit que C est **croissante** si cela reste vrai pour toutes les productions comparées.

Croissante, décroissante

Définition : Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I si, pour tous réels x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$).
- f est **constante** sur I si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous réels x_1 et x_2 de I.

f est **monotone** (respectivement **strictement monotone**) sur I si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.

Exemple : une demande qui baisse

Une boutique fictive vend $D(p) = 900 - 30p$ articles par mois au prix de p dirhams, avec $0 \leq p \leq 30$.

Soit p_1 et p_2 deux réels de $[0, 30]$ tels que $p_1 < p_2$.

Produit. En multipliant par -30, négatif, l'ordre s'inverse : $-30p_1 > -30p_2$.

Somme. On ajoute 900 : $D(p_1) > D(p_2)$.

Conclusion. La fonction D est strictement décroissante sur $[0, 30]$. Par exemple, $D(10) = 600$ et $D(20) = 300$.

Attention : un sens de variation se donne sur un intervalle

✗ « La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. »

✓ Elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, et aussi sur $]0, +\infty[$. Mais pas sur leur réunion : $-2 < 4$ et pourtant $\frac{1}{-2} < \frac{1}{4}$.

Donne toujours le sens de variation intervalle par intervalle.

Le taux de variation

En clair. Le quotient calculé plus haut s'appelle un **taux de variation** :

$$\frac{C(5) - C(2)}{5 - 2} = 9.$$

Il est positif quand la fonction monte entre les deux valeurs.

Pourquoi est-ce vrai ? Si l'on range $x_1 < x_2$, le dénominateur est positif. Le taux a alors le signe de la hausse $f(x_2) - f(x_1)$.

Propriété : Monotonie et taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour deux réels distincts x_1 et x_2 de I, on appelle **taux de variation** de f entre x_1 et x_2 le réel

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) \geq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) > 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- De même, f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T(x_1, x_2) \leq 0$ (respectivement $T(x_1, x_2) < 0$) pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

Démonstration

Étape 1. Le taux ne change pas quand on échange x_1 et x_2 : $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. On peut donc toujours supposer $x_1 < x_2$, et alors $x_2 - x_1 > 0$.

Étape 2. Pour $x_1 < x_2$, le quotient $T(x_1, x_2)$ a le signe de son numérateur $f(x_2) - f(x_1)$, puisque son dénominateur est strictement positif. Ainsi $T(x_1, x_2) \geq 0$ équivaut à $f(x_1) \leq f(x_2)$, et $T(x_1, x_2) > 0$ équivaut à $f(x_1) < f(x_2)$.

Étape 3. D'après la définition du sens de variation, f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si et seulement si $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) < f(x_2)$) pour tous $x_1 < x_2$ de I, c'est-à-dire si et seulement si le taux est positif (respectivement strictement positif). Le cas décroissant se traite de même en renversant les inégalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : écrire les deux réels dans l'ordre, $x_1 < x_2$. Le dénominateur $x_2 - x_1$ devient positif, et le taux prend le signe de son numérateur.

Étudier un sens de variation revient donc à étudier **un signe** : celui du taux, pour tous les couples de l'intervalle.

Vérifie : Un taux à calculer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7 - 4x$. Que vaut le taux $T(x_1, x_2)$ pour $x_1 \neq x_2$, et que dit-il du sens de variation de f ?

A. $T(x_1, x_2) = -4$: f est strictement décroissante.

Juste.

Juste : $f(x_2) - f(x_1) = -4(x_2 - x_1)$, et le taux est strictement négatif.

B. $T(x_1, x_2) = 4$: f est strictement croissante.

Faux.

Le signe est perdu : $f(x_2) - f(x_1) = -4x_2 + 4x_1 = -4(x_2 - x_1)$.

C. $T(x_1, x_2) = 7$: f est strictement croissante.

Faux.

7 est la valeur $f(0)$; il disparaît dans la différence $f(x_2) - f(x_1)$.

D. $T(x_1, x_2) = -4$: f est strictement croissante.

Faux.

Le taux est juste, mais un taux strictement négatif donne une fonction strictement décroissante.

Correction

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. On calcule la différence :

$$\begin{aligned} & f(x_2) - f(x_1) \\ & = (7 - 4x_2) - (7 - 4x_1) \\ & = -4(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

On divise par $x_2 - x_1$, non nul : $T(x_1, x_2) = -4$.

Conclusion. Ce taux est strictement négatif pour tous les couples : d'après la propriété qui relie monotonie et taux de variation, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : le coût de l'atelier est croissant

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0, 10]$. On factorise la différence :

$$\begin{aligned} & C(x_2) - C(x_1) \\ & = (x_2^2 - x_1^2) + 2(x_2 - x_1) \\ & = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2). \end{aligned}$$

On divise par $x_2 - x_1$, non nul :

$$T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2.$$

Signe. Comme $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, ce taux vaut au moins 2 : il est strictement positif.

Conclusion. D'après la propriété qui relie monotonie et taux de variation, C est strictement croissante sur $[0, 10]$. Contrôle : $T(2, 5) = 2 + 5 + 2 = 9$.

Ajouter ou multiplier par un réel

L'atelier signe un loyer de 4 milliers de dirhams : son coût devient $C(x)+4$. Toutes les valeurs montent de 4, mais le sens de variation ne change pas.

Multiplier par un réel négatif, en revanche, retourne la courbe.

Pourquoi est-ce vrai ? Ajouter λ ne touche à aucun taux ; multiplier par λ multiplie chaque taux par λ.

Propriété : Variations de f + λ et de λf

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. On note $f+\lambda$ la fonction $x \mapsto f(x)+\lambda$ et λf la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$.

- Les fonctions $f+\lambda$ et f ont le **même sens de variation** sur I.
- Si $\lambda > 0$, les fonctions λf et f ont le **même sens de variation** sur I.
- Si $\lambda < 0$, les fonctions λf et f ont des **sens de variation contraires** sur I.

Ces règles restent vraies pour une monotonie stricte.

Démonstration

Étape 1. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de I. Le taux de variation de $f+\lambda$ entre x_1 et x_2 vaut $\dfrac{(f(x_2)+\lambda)-(f(x_1)+\lambda)}{x_2-x_1} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$: c'est le taux de variation de f.

Étape 2. Le taux de variation de λf entre x_1 et x_2 vaut $\dfrac{\lambda f(x_2)-\lambda f(x_1)}{x_2-x_1} = \lambda \times \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$: c'est λ fois le taux de variation de f. Il a donc le signe de celui de f si $\lambda > 0$, le signe contraire si $\lambda < 0$.

Étape 3. D'après la propriété « monotonie et taux de variation », le sens de variation d'une fonction sur I se lit sur le signe de ses taux de variation : on conclut pour $f+\lambda$, puis pour λf selon le signe de λ. Les inégalités strictes se conservent de la même façon.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Encore une fois, tout passe par le **taux**. Pour $f+\lambda$, les deux λ s'éliminent dans la différence : le taux ne bouge pas.

Pour λf, on met λ en facteur : le taux est multiplié par λ. Son signe change seulement si $\lambda < 0$.

Vérifie : Un coût retourné

Sur $[0,10]$, le coût C de l'atelier est strictement croissant. Que dire de la fonction $x \mapsto 30-\dfrac{1}{4}C(x)$ sur $[0,10]$?

A. Elle est strictement croissante, comme C.

Faux.
Le facteur $-\dfrac{1}{4}$ est négatif : il renverse le sens.

B. Elle est constante, égale à 30.

Faux.
Le terme $-\dfrac{1}{4}C(x)$ change avec x : la fonction n'est pas constante.

C. On ne peut rien dire sans nouveau calcul.

Faux.
Les variations de C suffisent : la propriété sert justement à cela.

D. Elle est strictement décroissante.

Juste.
Juste : multiplier par $-\dfrac{1}{4}$ renverse le sens, ajouter 30 ne le change pas.

Correction

Facteur négatif. On multiplie C par $-\dfrac{1}{4}$, qui est négatif : la fonction $-\dfrac{1}{4}C$ est strictement décroissante sur $[0, 10]$.

Constante. On ajoute ensuite 30, ce qui ne change pas le sens.

Conclusion. La fonction $x \mapsto 30 - \dfrac{1}{4}C(x)$ est strictement décroissante sur $[0, 10]$.

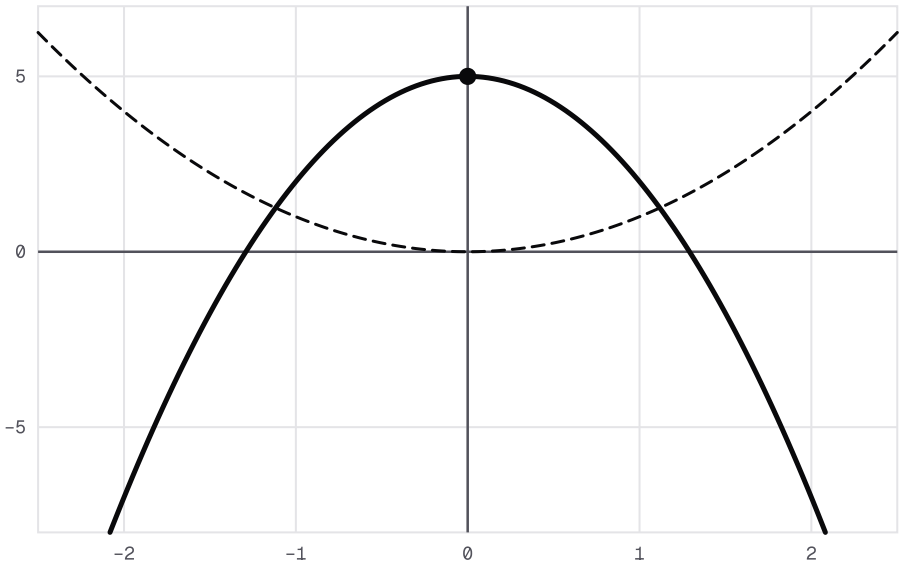
Exemple : retourner une parabole

La fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5 - 3x^2$: on multiplie le carré par -3, puis on ajoute 5.

Comme $-3 < 0$, les sens se renversent : h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Ajouter 5 ne change aucun sens.

Ainsi $h(0) = 5$ est la plus grande valeur de h.



La parabole de h(x) = 5 − 3x² est celle du carré, étirée, retournée puis montée de 5 : elle monte jusqu'à 5 en 0, puis redescend, à l'inverse de la courbe du carré.

La méthode, puis à toi

Méthode : étudier la monotonie par le taux de variation

1. **Prends** deux réels distincts x_1 et x_2 de l'intervalle I.
2. **Factorise** $f(x_2) - f(x_1)$ par $x_2 - x_1$, puis simplifie le taux $T(x_1, x_2)$.
3. **Trouve** le signe du taux, en utilisant que x_1 et x_2 sont dans I.
4. **Conclus** : taux strictement positif, f strictement croissante sur I ; taux strictement négatif, f strictement décroissante sur I.

À toi : Une étude complète

Si tu bloques sur la factorisation, relis l'exemple du coût : c'est exactement le même geste. Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^2 - 6x + 11$. Montre, avec le taux de variation, que q est strictement croissante sur $[3, +\infty[$. Déduis-en, sans nouveau calcul, le sens de variation de la fonction $-2q + 10$ sur $[3, +\infty[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $q(x_2) - q(x_1)$ et factorise par $x_2 - x_1$.
Indice 2
Tu dois trouver $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6$. Cherche son signe quand $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 3$.
Indice 3

Point délicat : x_1 et x_2 sont distincts ; peuvent-ils valoir tous les deux 3 ? Que devient alors leur somme ?

Réponse

Taux de variation. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[3, +\infty[$. On factorise :

$$\begin{aligned} q(x_2) - q(x_1) &= (x_2^2 - x_1^2) \\ &\quad - 6(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 6). \end{aligned}$$

Donc $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6$.

Signe. Les deux réels valent au moins 3 et, comme ils sont distincts, l'un au moins dépasse strictement 3 : $x_1 + x_2 > 6$. Le taux est strictement positif.

Monotonie. D'après la propriété qui relie monotonie et taux de variation, q est strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

Fonction déduite. La fonction $-2q + 10$ s'obtient en multipliant q par -2, négatif, puis en ajoutant 10 : le sens se renverse une fois.

Conclusion. Sur $[3, +\infty[$, q est strictement croissante et $-2q + 10$ est strictement décroissante.

Maximum et minimum

Le meilleur niveau de production

Le bénéfice de l'atelier vaut, pour x dans $[0, 10]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -x^2 + 10x - 16. \end{aligned}$$

Le directeur veut savoir quelle production rapporte le plus. Il veut aussi connaître la pire perte possible.

Devine : Le plus grand bénéfice

Quel est le plus grand bénéfice de l'atelier sur $[0, 10]$, et pour quelle production ?

A. 9 milliers de dirhams, pour 5 dizaines.

Juste.

Juste : $B(5) = 9$, et aucune production ne fait mieux.

B. 5 milliers de dirhams, pour 9 dizaines.

Faux.

Tu as échangé l'abscisse et la valeur : $B(9) = -7$.

C. 16 milliers de dirhams, pour 0 dizaine.

Faux.

$B(0) = -16$: sans production, l'atelier perd son coût fixe.

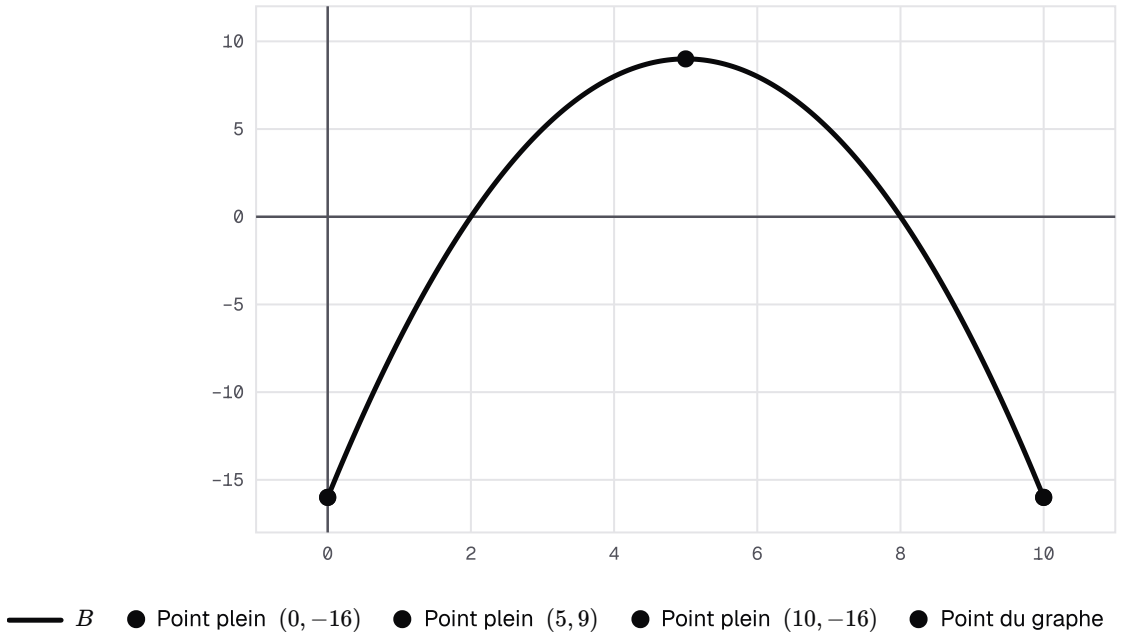
Correction

Forme utile. Pour tout x de $[0, 10]$, on a $B(x) = 9 - (x - 5)^2$. En effet :

$$\begin{aligned} & 9 - (x-5)^2 \\ & = 9 - (x^2 - 10x + 25) \\ & = -x^2 + 10x - 16. \end{aligned}$$

Majoration. Un carré est positif ou nul, donc $B(x) \leq 9$ pour tout x de $[0, 10]$. Et l'on a $B(5) = 9$.

Conclusion. Le plus grand bénéfice vaut 9 milliers de dirhams, pour 5 dizaines de tables.



Bénéfice B de l'atelier, données fictives

Maximum, minimum, extremum

Définition : Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si, pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$. On dit que f atteint son maximum en a.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si, pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.
- $f(a)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur l'intervalle $I \cap J$.

Exemple : le maximum et le minimum du bénéfice

Maximum. Pour tout x de $[0, 10]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 9 - (x-5)^2 \\ &\leq 9 = B(5). \end{aligned}$$

Donc $B(5) = 9$ est le **maximum** de B sur $[0, 10]$, atteint en 5.

Minimum. De $0 \leq x \leq 10$, on tire $-5 \leq x - 5 \leq 5$, donc $|x-5| \leq 5$ et $(x-5)^2 \leq 25$. Par suite, $B(x) \geq 9 - 25 = -16$.

Or $B(0) = B(10) = -16$: le **minimum** vaut -16, atteint en 0 et en 10.

Lire sur un tableau de variations

Méthode : lire des extremums et l'image d'un intervalle

1. **Sur la courbe** : le maximum sur I est l'ordonnée du point le plus haut de la partie de courbe au-dessus de I ; le minimum, celle du point le plus bas. Note aussi l'abscisse où il est atteint.
2. **Sur le tableau de variations** : repère les valeurs écrites aux bornes et là où le sens change, puis range-les.
3. **Image d'un intervalle** : c'est l'ensemble des valeurs $f(x)$ pour x dans I. Pour un tableau de variations **donné**, on convient qu'une flèche fait passer f par chaque nombre situé entre ses deux extrémités. Les bornes de l'image sont alors la plus petite et la plus grande des valeurs repérées. Aucun calcul ne le démontre ici.
4. **Vérifie** que la valeur est atteinte : sinon, ce n'est pas un maximum.

Tableau de variations d'une fonction φ définie sur l'intervalle de -2 à 5

x	-2		0		3		5
$\varphi(x)$	1	↗	4	↘	-2	↗	6

Exemple : lire le tableau

On lit le tableau de la fonction φ, définie sur $[-2, 5]$.

Extremums. Les valeurs à comparer sont 1, 4, -2 et 6. Le **maximum** de φ sur $[-2, 5]$ est 6, atteint en 5 ; le **minimum** est -2, atteint en 3.

Maximum local. La valeur 4, atteinte en 0, est un **maximum local** : près de 0, aucune valeur ne la dépasse. Ce n'est pas le maximum sur $[-2, 5]$.

Image. L'image de $[0, 5]$ est $[-2, 6]$, par la convention de lecture du tableau.

Vérifie : Une image à lire

D'après le tableau de φ, quelle est l'image de l'intervalle $[-2, 3]$?

A. $[-2, 1]$
Faux.
Tu n'as gardé que les valeurs aux bornes, $\varphi(-2) = 1$ et $\varphi(3) = -2$: tu oublies le sommet 4.

B. $[-2, 3]$
Faux.
C'est l'intervalle de départ : l'image se lit sur la ligne des valeurs.

C. $[-2, 4]$
Juste.
Juste : sur $[-2, 3]$, la plus petite valeur lue est -2 et la plus grande 4.

D. $[1, 4]$
Faux.
Sur $[0, 3]$, φ descend jusqu'à -2 : il faut garder cette valeur.

Correction
Sur $[-2, 0]$, φ monte de 1 à 4 ; sur $[0, 3]$, elle descend de 4 à -2. Les valeurs lues vont donc de -2 à 4.

Conclusion. Par la convention de lecture du tableau, l'image de $[-2, 3]$ est $[-2, 4]$.

Le maximum de φ sur $[-2, 3]$ est 4, atteint en 0.

Maximum et majorant

Le maximum du bénéfice, 9, est aussi un plafond : $B(x) \leq 9$ pour tout x de $[0, 10]$. C'est donc un majorant de B.

Les réels 10 ou 50 en sont aussi, mais 9 est le plus petit.

Pourquoi est-ce vrai ? Un majorant doit dominer toutes les valeurs, donc aussi la valeur $B(5) = 9$.

Propriété : Extremum et fonction bornée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f admet un maximum $f(a)$ sur I, alors f est majorée sur I et $f(a)$ est le plus petit de ses majorants.

- Si f admet un minimum $f(b)$ sur I, alors f est minorée sur I et $f(b)$ est le plus grand de ses minorants.
- Si f admet un maximum et un minimum sur I, alors f est bornée sur I.

La réciproque est fausse : une fonction majorée sur I n'admet pas toujours de maximum sur I (un majorant n'est pas toujours une valeur prise par f).

Démonstration

Étape 1. Si $f(a)$ est le maximum de f sur I, alors $f(x) \leq f(a)$ pour tout réel x de I : par définition, le réel $f(a)$ est un majorant de f sur I, donc f est majorée sur I.

Étape 2. Soit M un majorant quelconque de f sur I. Comme a appartient à I, on a en particulier $f(a) \leq M$. Le majorant $f(a)$ est donc inférieur ou égal à tous les majorants : c'est le plus petit.

Étape 3. Le cas du minimum se traite de même en renversant les inégalités. Si f admet un maximum et un minimum, elle est majorée et minorée, donc bornée par définition.

Étape 4. Pour la réciproque, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est majorée par 0, car $-\dfrac{1}{x} < 0$ pour tout $x > 0$. Elle n'a pas de maximum : pour tout $a > 0$, le réel $2a$ appartient à l'intervalle et $-\dfrac{1}{2a} > -\dfrac{1}{a}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'argument clé : un majorant domine **toutes** les valeurs de f, donc en particulier la valeur atteinte au point où se trouve le maximum. Il ne peut pas être plus petit que ce maximum.

Le sens inverse est faux : un plafond n'est pas forcément touché par la courbe.

Vérifie : Un majorant du coût

Sur $[0, 10]$, le coût C est strictement croissant et $C(10) = 136$. Un réel M vérifie $C(x) \leq M$ pour tout x de $[0, 10]$. Que peut-on affirmer à coup sûr ?

A. $M = 136$

Faux.
Un majorant peut dépasser le maximum : $M = 200$ convient aussi.

B. $M \geq 136$

Juste.
Juste : 136 est une valeur de C, donc M la domine.

C. $M \leq 136$

Faux.
C'est le sens contraire : un majorant domine toutes les valeurs, donc aussi 136.

D. $M > 136$

Faux.

Le réel 136 lui-même convient, car $C(x) \leq 136$ pour tout x de $[0, 10]$.

Correction

Comme C est strictement croissante sur $[0, 10]$, $C(10) = 136$ est son maximum sur $[0, 10]$, atteint en 10.

D'après la propriété « extremum et fonction bornée », 136 est le plus petit majorant de C.

Conclusion. Tout majorant M vérifie $M \geq 136$. Le réel M peut être plus grand, par exemple 200.

Exemple : un minorant qui n'est pas un minimum

Reprends le prix de revient U, défini sur $[1, +\infty[$ par $U(x) = 5 + \dfrac{12}{x}$.

Maximum. La valeur $U(1) = 17$ est le maximum de U : d'après la propriété « extremum et fonction bornée », 17 est son plus petit majorant.

Pas de minimum. La fonction U est minorée par 5, mais n'a pas de minimum. Pour tout $a \geq 1$, le réel $2a$ est aussi dans $[1, +\infty[$, et :

$$U(2a) = 5 + \frac{6}{a} < U(a).$$

Aucune valeur n'est la plus petite : la réciproque de la propriété est fausse.

Deux pièges, puis à toi

Attention : un majorant n'est pas forcément atteint

✗ « Sur $[0, +\infty[$, la fonction $r : x \mapsto \dfrac{8x}{x+2}$ est majorée par 8, donc 8 est son maximum. »

✓ Pour tout $x \geq 0$, on a bien :

$$r(x) = 8 - \frac{16}{x+2} < 8.$$

Mais l'égalité $r(x) = 8$ demanderait $\dfrac{16}{x+2} = 0$, ce qui est impossible. La valeur 8 n'est jamais atteinte : ce n'est pas un maximum.

Et r n'en a aucun : pour tout $a \geq 0$,

$$\begin{aligned} r(a+1) &= 8 - \frac{16}{a+3} \\ &> 8 - \frac{16}{a+2} = r(a). \end{aligned}$$

Aucune valeur n'est donc la plus grande.

Attention : multiplier par un réel négatif renverse tout

✗ « B a pour maximum 9, donc $-2B$ a pour maximum -18. »

✓ Comme $-2 < 0$, les variations de $-2B$ sont contraires à celles de B : -18, atteint en 5, est le **minimum** de $-2B$.

Son maximum vaut $-2 \times (-16) = 32$, atteint en 0 et en 10.

Pour $B + 4$, rien ne se retourne, mais chaque valeur monte de 4 : le maximum devient 13.

À toi : Maximum et minimum par encadrement

Prends ton temps : chaque inégalité se justifie en une ligne. Soit w la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 3]$ par $w(x) = (x-2)^2 - 3$. Montre que -3 est le minimum de w sur $[-1, 3]$. Montre ensuite que 6 en est le maximum. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque question, établis une inégalité vraie pour tout x de $[-1, 3]$, puis cherche où elle devient une égalité.
Indice 2
De $-1 \leq x \leq 3$, tire un encadrement de $x - 2$, puis de son carré.
Indice 3
Point délicat : $x - 2$ va de -3 à 1 en passant par 0 ; son carré va de 0 à 9, et non de 1 à 9.

Réponse
Minimum. Un carré est positif ou nul, donc $w(x) \geq -3$ pour tout x de $[-1, 3]$. Et $w(2) = -3$, avec $2 \in [-1, 3]$: -3 est le minimum, atteint en 2.

Encadrement du carré. Soit $x \in [-1, 3]$. Alors $-3 \leq x - 2 \leq 1$, et l'on distingue deux cas :

- si $-3 \leq x - 2 \leq 0$, alors $0 \leq 2 - x \leq 3$ et $(x-2)^2 \leq 9$;
- si $0 \leq x - 2 \leq 1$, alors $(x-2)^2 \leq 1 \leq 9$.

Dans les deux cas, $0 \leq (x-2)^2 \leq 9$, donc $w(x) \leq 9 - 3 = 6$.

Valeur atteinte. On a $w(-1) = 9 - 3 = 6$, avec $-1 \in [-1, 3]$.

Conclusion. Sur $[-1, 3]$, le minimum de w est -3, atteint en 2, et son maximum est 6, atteint en -1.

Composée de deux fonctions

Du coût au prix, du prix aux ventes

Une coopérative fictive vend du miel en pots. Si la matière d'un pot coûte x dirhams, le prix de vente est $p = x + 20$ dirhams.

Au prix p, elle vend $N(p) = \dfrac{1200}{p}$ pots par semaine.

Le nombre de pots vendus dépend donc de x en **deux temps** : d'abord le prix, puis les ventes.

Devine : Si la matière augmente

La matière passe de 10 à 40 dirhams par pot. Que deviennent les ventes de la semaine ?

A. Elles montent, de 20 à 40 pots.

Faux.

Un prix plus élevé fait vendre moins : l'ordre est inversé.

B. Elles baissent, de 40 à 20 pots.

Juste.

Juste : le prix passe de 30 à 60 dirhams, et $N(30) = 40$, $N(60) = 20$.

C. Elles ne changent pas et restent à 40 pots.

Faux.

Le prix change, donc les ventes aussi : calcule $N(60)$.

Correction

Pour $x = 10$, le prix vaut $p = 30$ et $N(30) = \dfrac{1200}{30} = 40$ pots.

Pour $x = 40$, le prix vaut $p = 60$ et $N(60) = \dfrac{1200}{60} = 20$ pots.

Conclusion. Les ventes baissent, de 40 à 20 pots par semaine.

Le nombre de pots s'écrit directement $\dfrac{1200}{x + 20}$: c'est une **composée**.

Enchaîner deux fonctions

En clair. Composer, c'est enchaîner deux calculs : on applique une première fonction à x, puis une seconde au résultat.

Ici, $x \mapsto x + 20$ donne le prix, puis N donne les ventes.

Une condition s'ajoute : le résultat du premier calcul doit être une valeur permise pour le second.

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et g une fonction définie sur un ensemble D_g. La **composée** de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ (lire « g rond f ») définie par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

pour tout réel x tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. Son ensemble de définition est donc $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ ; \ f(x) \in D_g\}$.

En général, $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales.

Exemple : domaine et ordre

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 6 - 2x$, et g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \sqrt{t}$.

Composée $g \circ u$. Le réel $(g \circ u)(x) = \sqrt{6 - 2x}$ existe si $6 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 3$. Donc $D_{g \circ u} =]-\infty, 3]$.

Composée $u \circ g$. Le réel $(u \circ g)(x) = 6 - 2\sqrt{x}$ existe si $x \geq 0$: $D_{u \circ g} = [0, +\infty[$.

Comparaison. En $x = 1$: $(g \circ u)(1) = \sqrt{4} = 2$, mais $(u \circ g)(1) = 4$. Les deux composées sont différentes.

Décomposer une fonction

Méthode : étudier une composée

1. **Décompose** : repère le calcul fait en premier sur x, la fonction u, puis le calcul fait sur le résultat, la fonction g. Ainsi $h = g \circ u$.
2. **Cherche le domaine** : garde les x de D_u tels que $u(x)$ soit dans D_g, puis résous cette condition.
3. **Écris l'expression** : remplace la variable de g par $u(x)$.
4. **Contrôle l'ordre** sur une valeur numérique : $g \circ u$ applique d'abord u, ensuite g.

Exemple : décomposer un inverse

Soit j la fonction définie par $j(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.

Décomposition. Le premier calcul est $u(x) = x^2 + 3$; le second est $g(t) = \dfrac{1}{t}$, défini pour $t \neq 0$. Donc $j = g \circ u$.

Domaine. Pour tout réel x, $x^2 + 3 \geq 3$, donc $u(x) \neq 0$: j est définie sur $\mathbb{R}$.

Contrôle. On trouve $u(1) = 4$, puis $g(4) = \dfrac{1}{4}$, et l'on a bien $j(1) = \dfrac{1}{4}$.

Vérifie : Dans quel ordre ?

Soit $u(x) = 2x - 3$ et $g(t) = t^2$. Que vaut $(g \circ u)(3)$?

A. 3

Faux.
C'est $u(3)$: il reste à appliquer g.

B. 15

Faux.
C'est $(u \circ g)(3) = 2 \times 9 - 3$: l'ordre est inversé.

C. 36

Faux.
Tu as calculé $(2 \times 3)^2$ en oubliant le -3.

D. 9

Juste.
Juste : $u(3) = 3$, puis $g(3) = 9$.

Correction
La composée $g \circ u$ applique d'abord u : $u(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$. Puis g : $g(3) = 3^2 = 9$.

Conclusion. On obtient $(g \circ u)(3) = 9$.

Dans l'autre ordre, $(u \circ g)(3) = u(9) = 15$.

Attention : l'ordre compte dans une composée

✗ « $g \circ u$ et $u \circ g$, c'est pareil. »

✓ Avec $u(x) = 2x - 3$ et $g(t) = t^2$, on obtient, pour tout réel x :

$$(g \circ u)(x) = (2x - 3)^2$$
$$(u \circ g)(x) = 2x^2 - 3$$

En $x = 1$, on trouve 1 et -1. Pense aussi au domaine : $u(x)$ doit appartenir à D_g.

Monotonie d'une composée

Reviens au miel. La fonction $x \mapsto x + 20$ est croissante : une matière plus chère donne un prix plus élevé.

La fonction N est décroissante sur $]0, +\infty[$: un prix plus élevé fait vendre moins. Le bilan est décroissant.

Pourquoi est-ce vrai ? Une fonction croissante garde l'ordre, une fonction décroissante le renverse. Ici, un seul renversement : la composée est décroissante. Deux renversements rétabliraient l'ordre.

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I, et g une fonction définie et monotone sur un intervalle J, telles que $f(x) \in J$ pour tout réel x de I.

- Si f et g ont le **même sens de variation** (toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des **sens de variation contraires**, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Ces règles restent vraies lorsque f et g sont strictement monotones, en remplaçant « croissante » et « décroissante » par « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

Démonstration

Soit x_1 et x_2 deux réels de I tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à J.

Étape 1. Cas f croissante sur I et g croissante sur J : $f(x_1) \leq f(x_2)$, puis, g étant croissante sur J, $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Donc $g \circ f$ est croissante sur I.

Étape 2. Cas f décroissante sur I et g décroissante sur J : $f(x_1) \geq f(x_2)$, puis, g étant décroissante sur J, l'ordre est renversé une seconde fois : $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Donc $g \circ f$ est croissante sur I.

Étape 3. Cas f croissante et g décroissante : $f(x_1) \leq f(x_2)$, donc $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$. Cas f décroissante et g croissante : $f(x_1) \geq f(x_2)$, donc $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$. Dans les deux cas, $g \circ f$ est décroissante sur I.

Étape 4. Si f et g sont strictement monotones, chaque inégalité de ces calculs est stricte, d'après la définition du sens de variation.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : suivre l'ordre de $x_1 < x_2$ à travers les deux fonctions. La première garde ou renverse cet ordre ; la seconde aussi.

Compte les renversements : zéro ou deux, la composée est croissante ; un seul, elle est décroissante.

La condition sur les valeurs de la première fonction permet d'appliquer la seconde là où elle est monotone.

Vérifie : Deux fonctions qui descendent

Soit $h(x) = \dfrac{1}{9-x}$ sur $]-\infty, 9[$, composée de $u(x) = 9 - x$ puis de la fonction inverse. Quel est le sens de variation de h sur $]-\infty, 9[$?

A. Strictement décroissante, comme u et l'inverse.

Faux.

Deux fonctions décroissantes renversent deux fois l'ordre : il est rétabli.

B. Ni croissante ni décroissante sur cet intervalle.

Faux.

Ici, $u(x) > 0$: l'inverse est monotone sur $]0, +\infty[$.

C. Strictement croissante sur cet intervalle.

Juste.
Juste : deux renversements de l'ordre le rétablissent.

D. On ne peut pas conclure : l'inverse n'est pas monotone.
Faux.
Elle l'est sur $]0, +\infty[$, où se trouvent toutes les valeurs $u(x)$.

Correction
La fonction u est strictement décroissante, et pour $x < 9$, $u(x) = 9 - x > 0$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Conclusion. Deux renversements rétablissent l'ordre : d'après la monotonie d'une composée, h est strictement croissante sur $]-\infty, 9[$.

Contrôle : $h(5) = \dfrac{1}{4} < h(7) = \dfrac{1}{2}$.

Exemple : le miel, puis un contre-exemple

Le miel. Sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto x + 20$ est strictement croissante, à valeurs dans $[20, +\infty[$. Sur cet intervalle, N est strictement décroissante.

D'après la monotonie d'une composée, $x \mapsto \dfrac{1200}{x + 20}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Un contre-exemple. L'hypothèse sur J compte. Sur $[0, 6]$, $x \mapsto x - 3$ est croissante, à valeurs dans $[-3, 3]$, où le carré n'est pas monotone.

Et $x \mapsto (x - 3)^2$ vaut 9, 0, puis 9 en 0, 3 et 6 : elle n'est pas monotone sur $[0, 6]$.

Sans nouveau calcul, puis à toi

Méthode : déduire des variations sans nouveau calcul

1. **Reconnais** la forme : $f + \lambda$, λf, ou une composée $g \circ u$ de deux fonctions aux variations connues.
2. Pour $f + \lambda$, **recopie** les variations de f. Pour λf, recopie-les si $\lambda > 0$, renverse-les si $\lambda < 0$.
3. Pour $g \circ u$ sur I, **vérifie** que $u(x)$ reste dans un intervalle où g est monotone, puis compte les renversements.
4. **Recalcule** les valeurs du tableau : elles changent, même quand les flèches restent.

À toi : Une racine composée

Deux fonctions, deux calculs : écris-les dans l'ordre. Soit H la fonction définie par $H(x) = \sqrt{12 - 3x}$. Donne l'ensemble de définition de H, puis écris H comme une composée. Déduis-en le sens de variation de H, et calcule $H(1)$ et $H(-8)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le premier calcul fait sur x est $12 - 3x$; le second est la racine carrée.
Indice 2
La racine exige $12 - 3x \geq 0$. Étudie ensuite le sens de $x \mapsto 12 - 3x$, puis celui de la racine carrée.
Indice 3
Point délicat : pour résoudre $-3x \geq -12$, on divise par -3, négatif, et l'inégalité change de sens.

Réponse
Ensemble de définition. Le réel $H(x)$ existe si $12 - 3x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 4$ (on divise par -3, négatif). Donc $D_H =]-\infty, 4]$.

Décomposition. On a $H = g \circ u$, avec $u(x) = 12 - 3x$ et $g(t) = \sqrt{t}$.

Sens de variation. La fonction u est strictement décroissante, et pour $x \leq 4$, $u(x) \geq 0$. La racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Les sens sont contraires : d'après la monotonie d'une composée, H est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$.

Valeurs. On calcule $H(1) = \sqrt{9} = 3$ et $H(-8) = \sqrt{36} = 6$.

Conclusion. La fonction H est définie et strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$, avec $H(1) = 3$ et $H(-8) = 6$.

Deux nouvelles courbes : racine décalée et cube

Une production qui ralentit

Dans une coopérative fictive, 4 ouvriers produisent 2 tonnes d'huile par mois. Avec x ouvriers de plus, la production vaut $Q(x) = \sqrt{x + 4}$ tonnes.

Ainsi $Q(0) = 2$ et $Q(5) = 3$: cinq ouvriers de plus n'ajoutent qu'une tonne.

Devine : Encore plus d'ouvriers

Avec 21 ouvriers de plus, quelle est la production mensuelle ?

A. $\sqrt{21} + 2$ tonnes
Faux.
La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : $\sqrt{21 + 4} \neq \sqrt{21} + \sqrt{4}$.

B. 25 tonnes
Faux.
25 est la valeur de $x + 4$: il reste à prendre la racine carrée.

C. 5 tonnes

Juste.
Juste : $Q(21) = \sqrt{25} = 5$.

Correction
On calcule :

$$Q(21) = \sqrt{21 + 4} = \sqrt{25} = 5.$$

Conclusion. Avec 21 ouvriers de plus, la production vaut 5 tonnes par mois.

La production augmente avec x. Sur ces valeurs, les gains ralentissent : de 0 à 5 ouvriers en plus, 1 tonne ; de 5 à 21, 2 tonnes seulement.

La racine décalée

La fonction Q se calcule en deux temps : on ajoute 4 à x, puis on prend la racine carrée. Elle existe dès que $x + 4 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq -4$.

Sa courbe ressemble à celle de la racine carrée, décalée de 4 unités vers la gauche.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux calculs sont croissants, et $Q(x)$ est la racine carrée lue au point $x + 4$.

Propriété : La fonction x ↦ √(x + a)

Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + a}$.

- f est définie sur l'intervalle $[-a, +\infty[$.
- f est **strictement croissante** sur $[-a, +\infty[$ et $f(-a) = 0$ est son minimum.
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de f est l'image de la courbe de la fonction racine carrée par la **translation de vecteur** $-a\,\vec{i}$: on la décale horizontalement de $|a|$ unités, vers la gauche si $a > 0$, vers la droite si $a < 0$.

Démonstration
Étape 1. Le réel $\sqrt{x + a}$ existe si et seulement si $x + a \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -a$: l'ensemble de définition est $[-a, +\infty[$.

Étape 2. On a $f = r \circ u$, avec $u(x) = x + a$ et $r(t) = \sqrt{t}$. La fonction affine u est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$ et, pour $x \geq -a$, $u(x) \geq 0$ appartient à $[0, +\infty[$. La fonction racine carrée r est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence). D'après la monotonie d'une composée, f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$. Pour tout $x \geq -a$, $f(x) \geq 0 = f(-a)$: $f(-a)$ est le minimum.

Étape 3. Un point $M(x, y)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $x \geq -a$ et $y = \sqrt{x+a}$, c'est-à-dire si et seulement si le point $M'(x+a, y)$, d'abscisse $x + a \geq 0$, appartient à la courbe de la racine carrée. Or M est l'image de M' par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois gestes à retenir. Le domaine vient d'une seule condition : ce qui est sous la racine est positif ou nul.

Le sens de variation vient de la **composée** de deux fonctions croissantes.

La courbe vient d'un simple **décalage horizontal** de celle de la racine carrée, sans aucun nouveau calcul.

Vérifie : Domaine et plus petite valeur

Pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x+6}$, quel est l'ensemble de définition, et quelle est la plus petite valeur ?

A. Définie sur $[6, +\infty[$; minimum 0, atteint en 6.
Faux.
Le décalage est vers la gauche : $x + 6 \geq 0$ donne $x \geq -6$.

B. Définie sur $[-6, +\infty[$; minimum $\sqrt{6}$, atteint en 0.
Faux.
$\sqrt{6}$ est la valeur en 0 ; en -6, la fonction vaut 0, qui est plus petit.

C. Définie sur $[-6, +\infty[$; minimum 0, atteint en -6.
Juste.
Juste : la fonction est strictement croissante sur $[-6, +\infty[$ et vaut 0 en -6.

D. Définie sur $[0, +\infty[$; minimum $\sqrt{6}$, atteint en 0.
Faux.
Tu as gardé le domaine de la racine carrée : il faut $x + 6 \geq 0$.

Correction
La fonction existe si $x + 6 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -6$: elle est définie sur $[-6, +\infty[$.

D'après la propriété de $x \mapsto \sqrt{x+a}$ avec $a = 6$, elle y est strictement croissante.

Conclusion. Sa plus petite valeur est donc la valeur en -6, soit $\sqrt{0} = 0$.

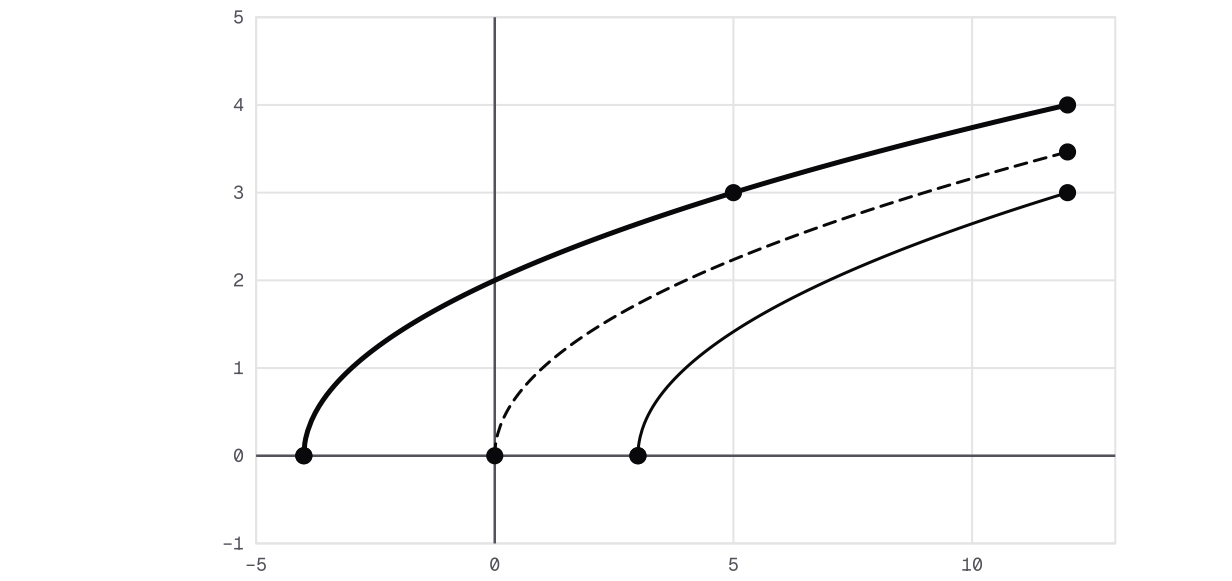
Exemple : une racine décalée vers la droite

Soit la fonction $x \mapsto \sqrt{x-3}$. Ici $a = -3$.

- Elle est définie sur $[3, +\infty[$, strictement croissante, de minimum 0 atteint en 3.

- Sa courbe est celle de la racine carrée, décalée de 3 unités **vers la droite**.
- Valeurs simples : en 3, 4, 7 et 12, elle vaut 0, 1, 2 et 3.

Tracer la courbe



Racine carrée et deux racines décalées

Méthode : tracer une racine décalée ou un cube

1. **Donne** l'ensemble de définition : $[-a, +\infty[$ pour $\sqrt{x+a}$, $\mathbb{R}$ pour ax^3.
2. **Dresse** le tableau de variations, grâce aux propriétés du cours.
3. **Calcule** quelques valeurs simples. Pour $\sqrt{x+a}$, choisis x pour que $x+a$ vaille 0, 1, 4 ou 9. Pour ax^3, prends $x = -2, -1, 0, 1$ et 2.
4. **Place** les points, puis trace une courbe régulière qui suit le tableau. Pour ax^3, contrôle la symétrie par rapport à l'origine.

La fonction cube et ses multiples

Un cube plein de cire d'arête x décimètres coûte $M(x) = 2x^3$ dirhams de matière (données fictives). Ainsi $M(1) = 2$ et $M(2) = 16$: doubler l'arête multiplie le coût par 8.

Pour l'étude mathématique, on prend x dans tout $\mathbb{R}$; par exemple, $M(-2) = -16 = -M(2)$.

Pourquoi est-ce vrai ? La différence de deux cubes se factorise, et le facteur restant est strictement positif.

Propriété : La fonction x ↦ ax³

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$.

- Si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$: la courbe de f est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère, et elle passe par O.

Démonstration

Étape 1. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. On factorise : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$.

Étape 2. On a $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_2 + \dfrac{x_1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}x_1^2 \geq 0$, et cette somme de deux carrés n'est nulle que si $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, ce qui est exclu car $x_1 \neq x_2$. Elle est donc strictement positive, comme $x_2 - x_1$: $x_1^3 < x_2^3$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Étape 3. On a $f = a \times (x \mapsto x^3)$. D'après les variations de λf, avec $\lambda = a$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Étape 4. Pour tout réel x, $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$. Si $M(x, y)$ appartient à la courbe, le point $M'(-x, -y)$, symétrique de M par rapport à O, vérifie $-y = -f(x) = f(-x)$: il appartient aussi à la courbe. Enfin $f(0) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux cubes, on **factorise** leur différence par $x_2 - x_1$. Le second facteur est strictement positif quand $x_1 \neq x_2$: la différence des cubes a donc le signe de $x_2 - x_1$.

Le coefficient a agit ensuite comme le réel λ de λf : il garde ou renverse le sens.

Vérifie : Un cube multiplié

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3$. Que vaut $f(-1)$, et quel est le sens de variation de f ?

A. $f(-1) = -4$; f est strictement décroissante.
Faux.
$(-1)^3 = -1$, donc $f(-1) = -4 \times (-1) = 4$.

B. $f(-1) = 4$; f est strictement décroissante.

Juste.

Juste : le coefficient -4 est négatif, il renverse le sens du cube.

C. $f(-1) = 4$; f est strictement croissante.

Faux.

La valeur est juste, mais $a = -4 < 0$ renverse le sens du cube.

D. $f(-1) = 64$; f est strictement croissante.

Faux.

Tu as calculé $(-4 \times (-1))^3$: seul x est au cube.

Correction

On calcule :

$$\begin{aligned} f(-1) &= -4 \times (-1)^3 \\ &= -4 \times (-1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

D'après la propriété de $x \mapsto ax^3$, avec $a = -4 < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. On a $f(-1) = 4$, et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Contrôle : $f(1) = -4 < f(-1) = 4$.

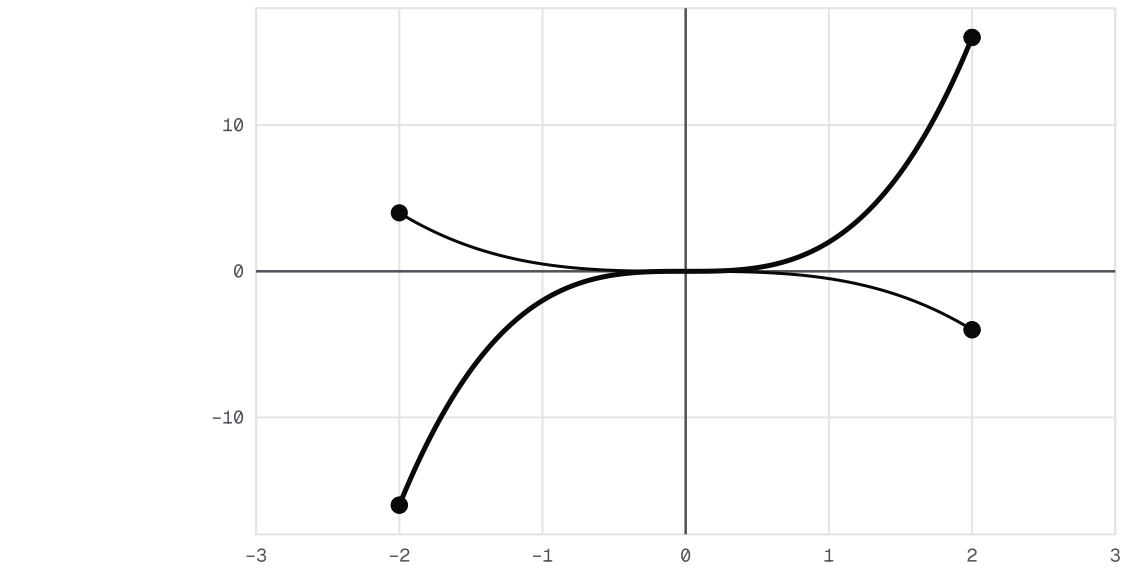
Symétrie et tracé, puis à toi

Exemple : un cube à coefficient négatif

Soit la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$. Ici $a = -\frac{1}{2} < 0$: d'après la propriété, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

- En -2, -1, 0, 1 et 2, elle vaut 4, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$ et -4.
- Les valeurs en x et en $-x$ sont opposées : la courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Si $a = 0$, la fonction est constante : elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante.



Courbe de M et courbe d'un cube à coefficient négatif

À toi : Une racine à étudier

Soit s la fonction définie par $s(x) = \sqrt{x + 16}$. Donne son ensemble de définition et son sens de variation. Calcule $s(-16)$, $s(-15)$, $s(-12)$, $s(-7)$ et $s(0)$. Résous enfin graphiquement l'inéquation $s(x) \leq 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reconnais la forme $\sqrt{x + a}$, avec $a = 16$, et applique la propriété du cours.

Indice 2

Les valeurs choisies rendent $x + 16$ égal à 0, 1, 4, 9 et 16. Trace ensuite la droite d'équation $y = 3$.

Indice 3

Point délicat : la courbe commence en $x = -16$; les solutions ne descendent pas en dessous de -16.

Réponse

Domaine et sens. D'après la propriété de $x \mapsto \sqrt{x + a}$ avec $a = 16$, s est définie sur $[-16, +\infty[$ et y est strictement croissante.

Valeurs. On trouve $s(-16) = 0$, $s(-15) = 1$, $s(-12) = 2$, $s(-7) = 3$ et $s(0) = 4$.

Lecture. La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe au point d'abscisse -7. La courbe est sous la droite pour x entre -16 et -7.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $s(x) \leq 3$ est $[-16, -7]$.

Contrôle : $x + 16 \leq 9$ donne $x \leq -7$, avec $x \geq -16$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Comparer** f et g : étudier le signe de $f(x) - g(x)$, puis la position des courbes.
- **Résoudre graphiquement** : lire les abscisses des points d'intersection, ou des points au-dessus ou au-dessous.
- **Majorer, minorer** : encadrer $f(x)$ à partir de $x \in I$, avec des bornes sans x.
- **Sens de variation** : signe du taux $T(x_1, x_2)$; puis $f + \lambda$ et λf sans calcul.
- **Extremums, image** : lire la courbe ou le tableau ; un maximum est une valeur atteinte.
- **Composée** : décomposer, domaine, ordre ; compter les renversements.
- **Racine décalée et cube** : domaine, tableau, valeurs simples, symétrie pour ax^3.

Vérifie : Le bon outil

Pour montrer qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I, quelle démarche suffit ?

A. Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis les comparer.

Faux.
Deux valeurs ne disent rien des autres couples de l'intervalle.

B. Regarder la courbe tracée à la calculatrice.

Faux.
Une figure guide, mais ne prouve pas : elle ne montre qu'une partie des valeurs.

C. Trouver un majorant de f sur l'intervalle I.

Faux.
Une fonction majorée peut monter, descendre, ou faire les deux.

D. Montrer que tous ses taux sur I sont strictement positifs.

Juste.
Juste : c'est la propriété qui relie monotonie et taux de variation.

Correction
On prend x_1 et x_2 distincts quelconques dans I, et on montre que $T(x_1, x_2) > 0$.

D'après la propriété qui relie monotonie et taux de variation, f est alors strictement croissante sur I.

Quelques valeurs, ou une figure, ne suffisent jamais.

Remarque : Coin devoir : rédiger une comparaison

En devoir, une comparaison se rédige en trois temps : différence, signe, conclusion.

Pour l'atelier, écris : « Pour tout x de $[0, 10]$, $R(x) - C(x) = -(x - 2)(x - 8)$. Ce trinôme est positif ou nul sur $[2, 8]$. Donc, pour tout x de $[2, 8]$, $R(x) \geq C(x)$: la courbe de R est au-dessus de celle de C. »

Nomme toujours l'intervalle où l'inégalité est vraie.

Remarque : Coin devoir : rédiger une monotonie

Pour une monotonie, cite le taux et son signe.

Pour le coût, écris : « Soit x_1 et x_2 distincts dans $[0, 10]$. On a $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2$, et $x_1 + x_2 + 2 \geq 2 > 0$. D'après la propriété qui relie monotonie et taux de variation, C est strictement croissante sur $[0, 10]$. »

En devoir, ne te contente jamais de deux valeurs.

Avant de rédiger. Commence toujours par l'intervalle de travail. Ensuite, nomme la propriété que tu emploies. Vérifie enfin ses hypothèses une à une.

Remarque : Coin devoir : rédiger une composée

Pour une composée, écris la décomposition avant le sens de variation.

Pour la fonction H de la section sur la composée : « $H = g \circ u$, avec $u(x) = 12 - 3x$ et $g(t) = \sqrt{t}$. Pour $x \leq 4$, $u(x) \geq 0$. La fonction u est strictement décroissante, et g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'après la monotonie d'une composée, H est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$. »

En devoir, vérifie toujours la condition sur $u(x)$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant comparer, encadrer, étudier un sens de variation et lire un extremum. Ce sont les gestes de base de toute étude de fonction. Tu les retrouveras pour étudier un coût, une recette ou un bénéfice.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)