BURHAN

Résumé : Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/resume

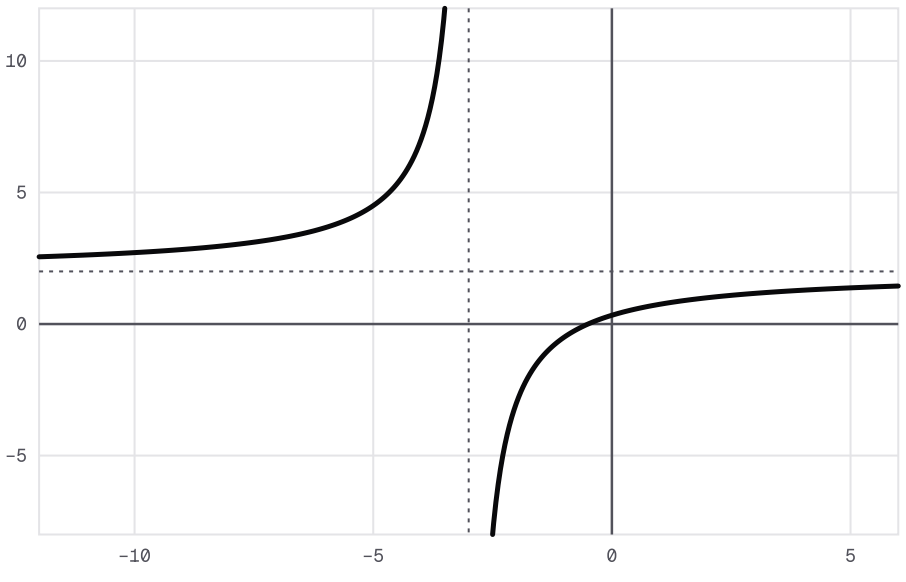
Chapitre	Semestre
Étude et représentation des fonctions	Semestre 2

Asymptotes verticales, horizontales et obliques

À retenir : Ce que décrit une branche infinie

Près d'une valeur interdite, ou quand x devient très grand, une courbe peut partir vers l'infini. Cette partie de la courbe s'appelle une branche infinie.

Parfois, elle se rapproche autant qu'on veut d'une droite : cette droite est une asymptote. Chaque asymptote se justifie par une limite, jamais par l'allure du dessin.



Deux branches infinies de la courbe de h(x) = 2 − 5/(x + 3) : près de −3, elles longent la verticale x = −3 ; loin de −3, elles longent l'horizontale y = 2.

Définition : Asymptote verticale

Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et a un réel. Si la limite de f en a (à droite ou à gauche) est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Par exemple, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ et b un réel. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$, lorsque f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c]$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Exemple

Énoncé. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Cherche les asymptotes de $\mathcal{C}_h$.

Écriture utile. Pour $x \neq -3$, on a $2x + 1 = 2(x+3) - 5$, donc :

$$h(x) = 2 - \frac{5}{x+3}.$$

En -3. Si x tend vers -3 par la droite, $x+3$ tend vers 0 en restant positif, donc $\dfrac{5}{x+3}$ tend vers $+\infty$. Par la gauche, $x+3$ reste négatif. Ainsi :

$$\lim_{x \to -3^+} h(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -3^-} h(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale.

À l'infini. Le terme $\dfrac{5}{x+3}$ tend vers 0, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 2,$$
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2.$$

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$, et a et b deux réels avec $a \neq 0$. Si

$$\lim_{x \to +\infty} \big[f(x) - (ax + b)\big] = 0,$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On définit de même une asymptote oblique en $-\infty$.

Propriété : Asymptote oblique d'une fonction de la forme ax + b + φ(x)

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$, et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ par

$$f(x) = ax + b + \varphi(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. Alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Le même résultat vaut en $-\infty$ lorsque f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,c]$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$.

Méthode : trouver les asymptotes d'une courbe

1. **Écris** D_f et repère ses bornes : valeurs interdites, $-\infty$, $+\infty$.
2. **En une valeur interdite** d, calcule les limites à droite et à gauche. Une limite infinie donne la droite d'équation $x=d$.
3. **En** $+\infty$ **ou en** $-\infty$, une limite réelle b donne la droite d'équation $y=b$.
4. **Si** $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ avec $a\neq0$, vérifie que $\varphi(x)$ tend vers 0 : la droite d'équation $y=ax+b$ est alors une asymptote oblique.
5. **Pour un polynôme** de degré 2 ou 3, ne cherche pas d'asymptote : il n'y en a aucune.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+5}{x+3}$. Vérifie que $f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x+3}$, puis donne les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

Vérification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(2x-1)(x+3)+8\\&=2x^2+5x-3+8\\&=2x^2+5x+5.\end{aligned}$$

On divise par $x+3$, pour $x\neq-3$.

Asymptote verticale. Quand x tend vers -3, $2x-1$ tend vers -7. De plus :

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{8}{x+3}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-3^-}\frac{8}{x+3}=-\infty.$$

Par somme, f a une limite infinie de chaque côté de -3 : la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale.

Asymptote oblique. Avec $\varphi(x)=\dfrac{8}{x+3}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$. La droite $(D):y=2x-1$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Attention : Le reste doit tendre vers zéro

✗ « $f(x)=2x+5+\varphi(x)$ avec $\varphi(x)=\dfrac{8}{x+3}-6$, donc la droite d'équation $y=2x+5$ est asymptote. »

L'égalité est juste, mais la conclusion est fausse : $\varphi(x)$ tend vers -6, pas vers 0.

✓ Regroupe les constantes : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x+3}$. Le reste tend vers 0, et l'asymptote oblique est la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Branches paraboliques

Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big[f(x) - ax\big] = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques en $-\infty$. La direction indiquée s'appelle une **direction asymptotique** de $\mathcal{C}_f$.

Propriété : Branches infinies d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3

Soit f une fonction polynôme de degré 2 ou de degré 3. Alors $\mathcal{C}_f$ admet, en $+\infty$ et en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. En particulier, $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote.

Exemple

Énoncé. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 3x^2 - 12x + 7$. Décris les branches infinies de $\mathcal{C}_p$.

Limites. Le terme de plus haut degré, $3x^2$, donne :

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty.$$

Quotient. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{x} = 3x - 12 + \frac{7}{x}.$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. $\mathcal{C}_p$ a deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées, et aucune asymptote.

Exemple

Énoncé. Soit s la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $s(x) = \sqrt{x+3}$. Étudie la branche infinie de $\mathcal{C}_s$ en $+\infty$.

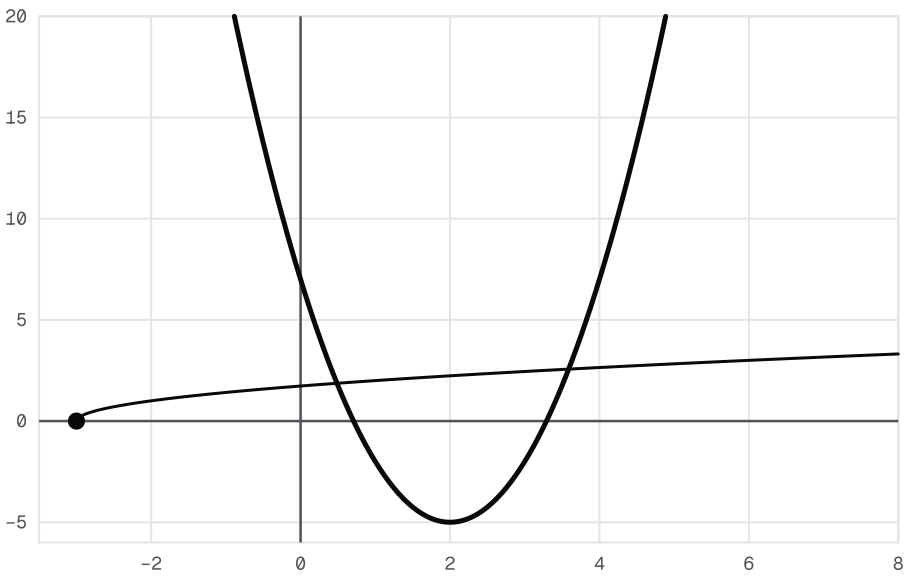
Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $x+3$ tend vers $+\infty$, et $\sqrt{X}$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$: la courbe monte sans fin.

Quotient. Pour $x > 0$:

$$\frac{s(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \times \frac{x+3}{x}.$$

Le premier facteur tend vers 0, le second vers 1 : le quotient tend vers 0.

Conclusion. C'est une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. La courbe monte, mais de plus en plus lentement.



Deux branches paraboliques : la parabole de p(x) = 3x² − 12x + 7 se redresse vers la verticale, la courbe de s(x) = √(x + 3) s'aplatit vers l'horizontale.

Attention : Partir vers l'infini ne fait pas une asymptote

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$. Sa courbe descend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

✗ « Elle descend sans fin, elle a donc une asymptote. »

✓ Pour $x \neq 0$:

$$\frac{q(x)}{x} = -3x^2 + 9x - \frac{4}{x}.$$

Ce quotient tend vers $-\infty$: c'est une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Aucune limite ne justifie ici une asymptote.

À retenir : Tableau récapitulatif des branches infinies

Ce que tu calcules	Résultat	Conclusion
limite de f en a, à droite ou à gauche	$+\infty$ ou $-\infty$	asymptote verticale $x = a$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	un réel b	asymptote horizontale $y = b$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \big[f(x) - (ax + b)\big]$, avec $a \neq 0$	0	asymptote oblique $y = ax + b$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, quand $f(x)$ a une limite infinie	$+\infty$ ou $-\infty$	branche parabolique, direction l'axe des ordonnées
même quotient	0	branche parabolique, direction l'axe des abscisses
même quotient, puis $f(x) - ax$	$a \neq 0$, puis $+\infty$ ou $-\infty$	branche parabolique, direction la droite $y = ax$

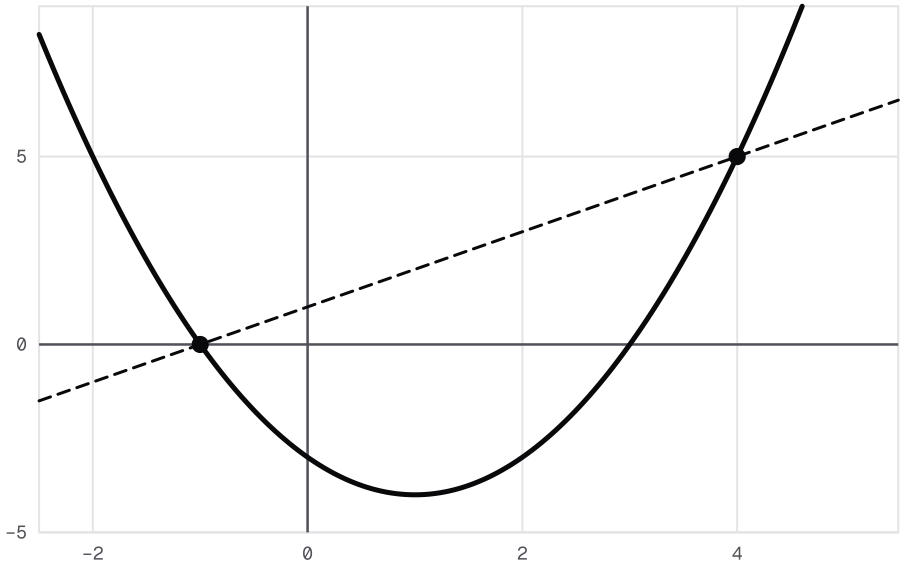
Le tableau vaut aussi en $-\infty$.

Position d'une courbe et d'une droite

Propriété : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (D) la droite d'équation $y = ax + b$.

- Si $f(x) - (ax + b) > 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax + b) < 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de (D) sur I.
- Si $f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent au point d'abscisse x_0.



$\mathcal{C}_p$ $(D) : y = x + 1$ Point plein A Point plein B Point du graphe

Le signe de p(x) – (x + 1) décide de la position : positif hors de [–1, 4], la courbe est au-dessus de la droite ; négatif entre –1 et 4, elle est en dessous.

Méthode : situer une courbe par rapport à une droite

1. **Calcule** la différence $f(x) - (ax + b)$ et réduis-la au maximum.
2. **Dresse** le tableau de signes de cette différence sur le domaine.
3. **Lis** le tableau : signe plus, courbe au-dessus ; signe moins, courbe en dessous ; zéro, point commun à la courbe et à la droite.

Exemple

Énoncé. Situe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $(D) : y = 2x - 1$, avec $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x + 3}$ pour $x \neq -3$.

Différence. Pour $x \neq -3$:

$$f(x) - (2x - 1) = \frac{8}{x + 3}.$$

Le numérateur est positif : la différence a le signe de $x + 3$.

Conclusion. Sur $]-3, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D). Sur $]-\infty, -3[$, elle est en dessous. La différence ne s'annule jamais : aucun point commun.

Signe de $f(x) - (2x - 1)$: la courbe est sous son asymptote avant -3, au-dessus après.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - (2x - 1)$	−	+	

Exemple

Énoncé. Situe $\mathcal{C}_p$, avec $p(x) = 3x^2 - 12x + 7$, par rapport à la droite $(\Delta) : y = 3x - 5$.

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &p(x) - (3x - 5) \\ &= 3x^2 - 15x + 12 \\ &= 3(x - 1)(x - 4). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est du signe de 3, donc positif, à l'extérieur des racines 1 et 4 ; il est négatif entre elles.

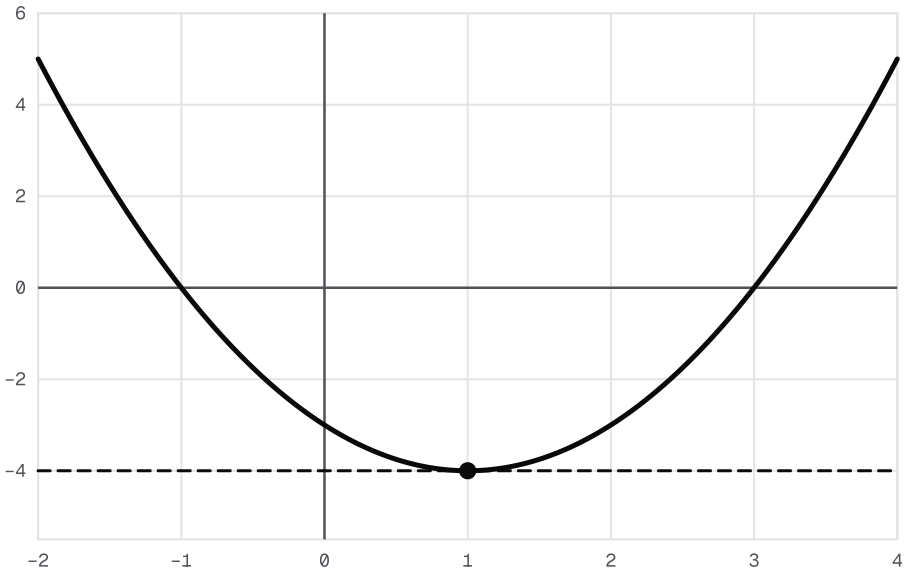
Conclusion. $\mathcal{C}_p$ est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]4, +\infty[$, en dessous sur $]1, 4[$. Les points communs sont $(1, -2)$ et $(4, 7)$.

Concavité et points d'inflexion

Définition : Courbe convexe, courbe concave

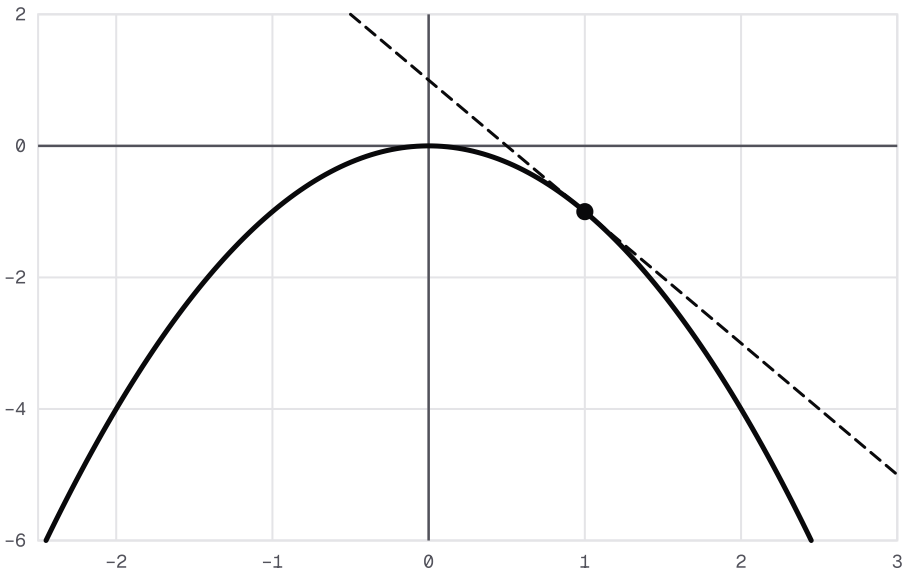
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I (sa concavité est tournée vers le haut) si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes en des points d'abscisse appartenant à I.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I (sa concavité est tournée vers le bas) si $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses tangentes en des points d'abscisse appartenant à I.



$\mathcal{C}_p$ $y = -4$ Point du graphe

Courbe convexe : la parabole de x ↦ x² − 2x − 3 est au-dessus de sa tangente en 1, et de toutes les autres.



$y = -x^2$ $y = -2x + 1$ Point du graphe

Courbe concave : la parabole de x ↦ −x² est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, d'équation y = −2x + 1.

Propriété : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et f'' sa dérivée seconde.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. On dit que le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la concavité de $\mathcal{C}_f$ change en A : $\mathcal{C}_f$ est convexe d'un côté de x_0 et concave de l'autre. En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

Propriété : Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. Si f'' **s'annule en** x_0 **en changeant de signe**, alors le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Dérive** deux fois : f', puis f'', la dérivée de f'.
2. **Étudie** le signe de $f''(x)$ dans un tableau.
3. **Conclus** : courbe convexe là où $f''(x) \geq 0$, concave là où $f''(x) \leq 0$.
4. **Point d'inflexion** : garde les valeurs où f'' s'annule et change de signe, puis calcule leur ordonnée.

Ces résultats sur la concavité sont admis : tu les appliques en citant la propriété.

Exemple

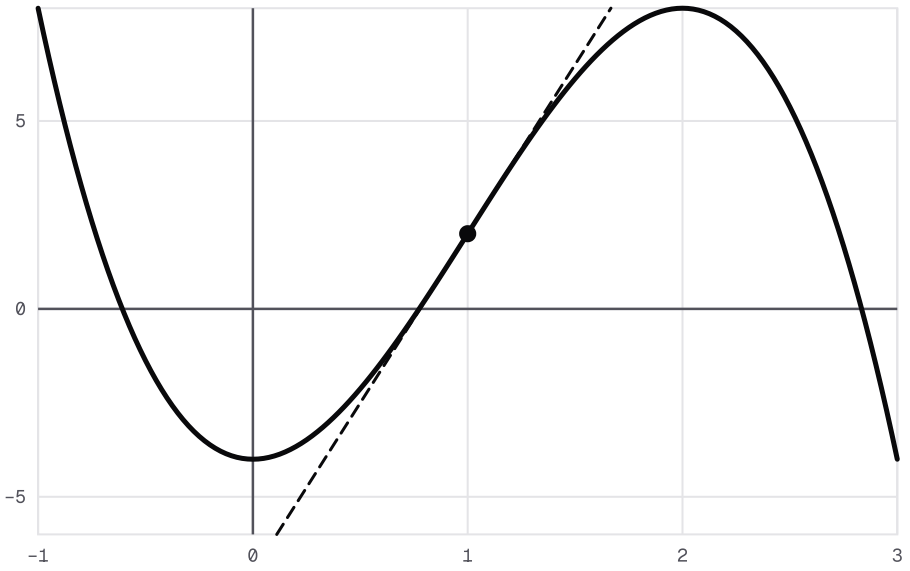
Énoncé. Étudie la concavité de $\mathcal{C}_q$, avec $q(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivées. q est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} q'(x) &= -9x^2 + 18x, \\ q''(x) &= -18x + 18 \\ &= 18(1 - x). \end{aligned}$$

Signe. $q''(x) > 0$ pour $x < 1$, $q''(1) = 0$, et $q''(x) < 0$ pour $x > 1$.

Conclusion. D'après le signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_q$ est convexe sur $]-\infty, 1]$ et concave sur $[1, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en 1 en changeant de signe, et $q(1) = -3 + 9 - 4 = 2$: le point $A(1, 2)$ est un point d'inflexion.



Au point d'inflexion A(1, 2) de la courbe de q(x) = −3x³ + 9x² − 4, la courbe traverse sa tangente y = 9x − 7 et sa concavité change de sens.

Signe de $q''(x) = 18(1 - x)$: la concavité change en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$q''(x)$		+	0	−	

Attention : Une dérivée seconde nulle ne suffit pas

Prends une fonction k dont la dérivée seconde vaut $k''(x) = 3(x-2)^2$ pour tout réel x.

✗ « $k''(2) = 0$, donc le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion. »

✓ $k''(x) \geq 0$ à gauche et à droite de 2 : la courbe reste convexe, sa concavité ne change pas. Il n'y a pas de point d'inflexion en 2.

Attention : Variations ou concavité : la bonne dérivée

Sur $[0, 2]$, $q'(x) = -9x(x-2) \geq 0$: la fonction q est croissante.

✗ « q est croissante sur $[0, 2]$, donc $\mathcal{C}_q$ y est convexe. »

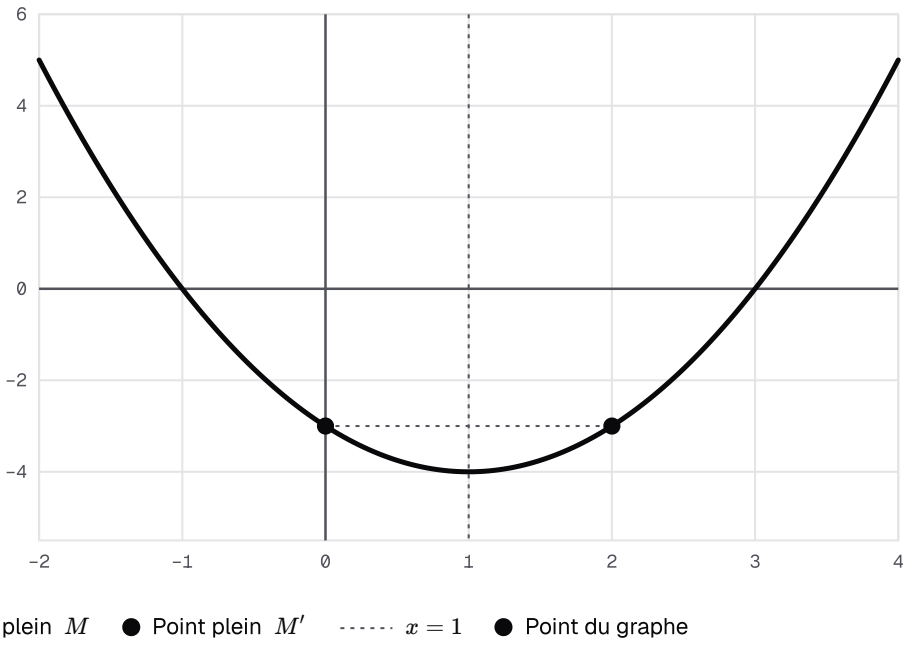
✓ Le signe de q' parle des variations ; le signe de q'' parle de la concavité. Ici, $\mathcal{C}_q$ est convexe sur $[0, 1]$ et concave sur $[1, 2]$.

Axe et centre de symétrie

Propriété : Axe de symétrie d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère **orthogonal**. Soit f une fonction de domaine de définition D_f et a un réel. La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f, on a $2a - x \in D_f$ et

$$f(2a - x) = f(x).$$



Axe de symétrie vertical : pour x ↦ x² − 2x − 3 et a = 1, les points d'abscisses x et 2 − x ont la même image, par exemple 0 et 2.

Propriété : Centre de symétrie d'une courbe

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et $\Omega(a, b)$ un point du plan. Le point Ω est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f, on a $2a - x \in D_f$ et

$$f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Méthode : prouver une symétrie et réduire l'étude

1. **Contrôle le domaine** : si x est dans D_f, alors $2a - x$ doit y être aussi.
2. **Calcule** $f(2a - x)$ en remplaçant x partout dans l'expression.
3. **Compare** : $f(2a - x) = f(x)$ prouve l'axe d'équation $x = a$; $f(2a - x) + f(x) = 2b$ prouve le centre $\Omega(a, b)$.
4. **Réduis** l'étude à $D_f \cap [a, +\infty[$: la symétrie donne le reste de la courbe.

Exemple

Énoncé. Le repère est orthogonal. Montre que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_p$, avec $p(x) = 3x^2 - 12x + 7$.

Domaine. $D_p = \mathbb{R}$: pour tout réel x, $4 - x$ est un réel.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} p(4-x) &= 3(16 - 8x + x^2) \\ &\quad - 48 + 12x + 7 \\ &= 3x^2 - 12x + 7 \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Par la propriété de l'axe de symétrie, $\mathcal{C}_p$ admet pour axe la droite d'équation $x = 2$. Il suffit d'étudier p sur $[2, +\infty[$.

Exemple

Énoncé. Montre que $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_q$, avec $q(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$.

Domaine. $D_q = \mathbb{R}$, donc $2 - x$ est dans D_q pour tout réel x.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &q(2-x) \\ &= -3(2-x)^3 + 9(2-x)^2 - 4 \\ &= 3x^3 - 9x^2 + 8. \end{aligned}$$

Donc $q(2-x) + q(x) = 4 = 2 \times 2$.

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_q$. C'est aussi son point d'inflexion.



Ω(1, 2) est centre de symétrie de la courbe de q : les points M(0, −4) et M'(2, 8) de la courbe ont Ω pour milieu.

Attention : Le domaine et le repère d'abord

On restreint p à l'intervalle $[0, 5]$.

✗ « $p(4 - x) = p(x)$, donc la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de cette courbe. »

✓ Pour $x = 5$, $4 - x = -1$ n'est pas dans $[0, 5]$: la condition sur le domaine échoue, et il n'y a pas d'axe.

Pour un axe, le repère doit aussi être orthogonal ; un centre de symétrie n'exige rien du repère.

Étude complète d'une fonction

Propriété : Fonctions de la forme ax + b + c/(x − d)

Soit a, b, c, d quatre réels avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{d\}$ par

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - d}.$$

Alors :

- la droite d'équation $x = d$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$;
- la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$;
- le point $\Omega(d, ad + b)$, intersection des deux asymptotes, est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Méthode : le plan d'étude d'une fonction

1. **Domaine**, puis symétries éventuelles pour réduire l'étude.

2. **Limites aux bornes** : asymptotes ou branches paraboliques.
3. **Variations** : $f'(x)$, son signe, le tableau de variations.
4. **Concavité** : signe de $f''(x)$, points d'inflexion.
5. **Points utiles** : intersections avec les axes, position par rapport aux asymptotes, quelques tangentes.
6. **Tracé** : d'abord les asymptotes et les points utiles, ensuite la courbe.

Exemple

Fonction. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x+3}$, rencontrée plus haut.

Symétrie. D'après la propriété des fonctions de cette forme, $\Omega(-3, -7)$ est centre de symétrie, car $2 \times (-3) - 1 = -7$. On étudie f sur $]-3, +\infty[$.

Dérivée. Pour tout $x \neq -3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{8}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

Sur $]-3, +\infty[$, $x + 5 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x + 1$.

Extremums. Le minimum local vaut $f(-1) = -3 + 4 = 1$. Son symétrique par rapport à Ω est $(-5, -15)$: c'est un maximum local de l'autre branche.

Concavité. Pour tout $x \neq -3$, $f''(x) = \dfrac{16}{(x+3)^3}$. Donc $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-3, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, -3[$, sans point d'inflexion.

Variations de f sur $]-3, +\infty[$; l'autre branche s'en déduit par la symétrie de centre $\Omega(-3, -7)$.

x	-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Résolution graphique

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Traduis** : les solutions de $f(x) = c$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ rencontre la droite d'équation $y = c$.
2. **Pour** $f(x) \leq g(x)$, repère où $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$ ou la touche.

3. **Lis** sur une courbe tracée les abscisses et les intervalles. Le nombre de points d'intersection donne le nombre de solutions.
4. **Contrôle** par le calcul chaque fois que c'est possible ; sans courbe tracée, compte les solutions par le calcul.

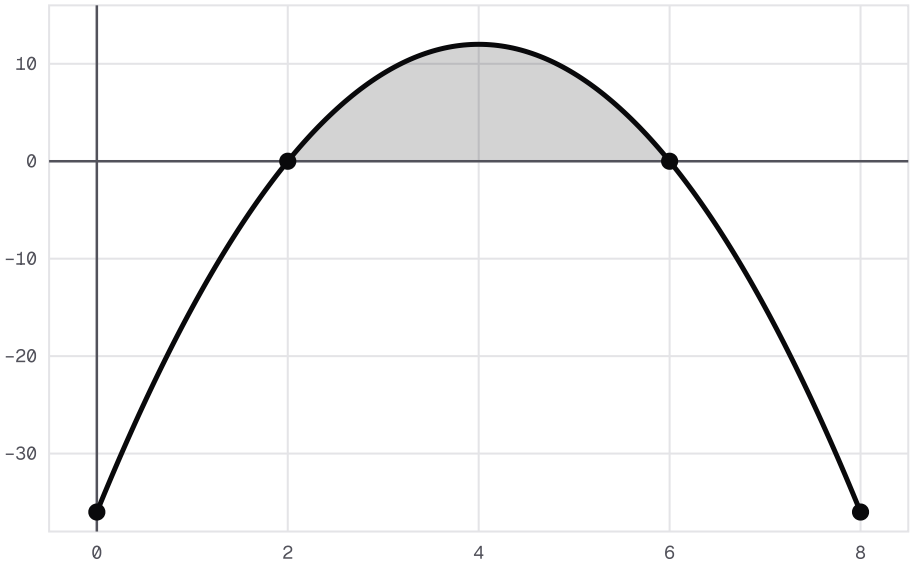
Exemple

Situation fictive. Une entreprise fictive fabrique x centaines d'articles, avec $x \in [0, 8]$. Son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut $B(x) = -3x^2 + 24x - 36$.

Lecture. La courbe de B est une parabole concave, de sommet $(4, 12)$. Elle est au-dessus de l'axe des abscisses entre $x = 2$ et $x = 6$.

Calcul. Pour tout réel x, $B(x) = -3(x - 2)(x - 6)$, donc $B(x) \geq 0$ exactement pour $x \in [2, 6]$. L'entreprise ne perd pas d'argent entre 200 et 600 articles.

Seuil. $B(x) \geq 9$ équivaut à $-3(x^2 - 8x + 15) \geq 0$, soit $(x - 3)(x - 5) \leq 0$. Le bénéfice atteint au moins 9 milliers de dirhams pour $x \in [3, 5]$.



Le bénéfice B(x) = −3x² + 24x − 36 sur [0, 8] : la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses entre 2 et 6, zone teintée où l'entreprise ne perd pas d'argent.

Variations de $q(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$, avec $q'(x) = -9x(x - 2)$: minimum local -4 en 0, maximum local 8 en 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$q'(x)$		−	0	+	0	−	
$q(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	8	↘	$-\infty$

Exemple : Compter les solutions d'une équation

Énoncé. Combien de solutions l'équation $q(x) = 2$ a-t-elle, avec $q(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$?

Attention. Le tableau de variations ne suffit pas à compter les solutions. Sur une courbe tracée, on lirait les points d'ordonnée 2. Ici, on compte par le calcul.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & q(x) - 2 \\ & = -3x^3 + 9x^2 - 6 \\ & = -3(x - 1)(x^2 - 2x - 2). \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 2x - 2$ a pour discriminant 12 et pour racines $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

Conclusion. L'équation $q(x) = 2$ a trois solutions : $1 - \sqrt{3}$, 1 et $1 + \sqrt{3}$.

L'essentiel en un coup d'œil

Asymptote oblique y = ax + b, a non nul

$$\lim_{x \to +\infty} \big[f(x) - (ax + b)\big] = 0$$

Position par rapport à la droite y = ax + b

$$\text{signe de } f(x) - (ax + b)$$

Courbe convexe sur I (admis)

$$f''(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in I$$

Courbe concave sur I (admis)

$$f''(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in I$$

Axe x = a, repère orthogonal, 2a - x dans le domaine

$$f(2a - x) = f(x)$$

Centre de symétrie, 2a - x dans le domaine

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

Forme ax + b + c/(x - d), a et c non nuls

$$\text{centre } \Omega(d, ad + b)$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour chaque limite, nomme la règle utilisée. Pour une asymptote, écris la limite qui la justifie, puis une phrase de conclusion.

Pour une symétrie, vérifie d'abord le domaine. Pour la concavité, cite la propriété admise sur f''. Un tracé commence toujours par les asymptotes.