BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle

Problème autonome noté sur 6 points. Durée indicative : 36 minutes.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

INDICE

Début : développe $(2x - 3)(x - 1)$ et ajoute 2.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1 ; regarde le signe de $x - 1$.

3. 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty, 1[$.

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique, puis le signe de $f(x) - (2x - 3)$.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 1 ; la dérivée de $\dfrac{2}{x - 1}$ est $-\dfrac{2}{(x - 1)^2}$.

5. 0,75 pts

Montrer que le point $\Omega(1, -1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie avec $2a - x = 2 - x$; contrôle d'abord le domaine.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Outil : dérive $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$, puis applique le lien admis entre concavité et signe de f''.

7. 1,25 pts

Montrer que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses. Tracer les asymptotes, puis $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $2x^2 - 5x + 5 = 0$; calcule son discriminant. **Ensuite :** place d'abord les asymptotes et les points $(0, -5)$ et $(2, 3)$.

Exercice 2 6 pts

Étude complète d'un polynôme de degré 3

Problème autonome noté sur 6 points. Durée indicative : 36 minutes.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, et que $\mathcal{C}_g$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré, puis la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)(x-3)$. Dresser le tableau de variations de g.

INDICE

Début : calcule $g'(x)$ et mets $\dfrac{3}{2}$ en facteur. **Ensuite :** le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

3. 1 pts

Montrer que le point $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$, et préciser la concavité de $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : le signe de $g''(x)$, puis la propriété admise du point d'inflexion.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$g(4 - x) + g(x) = 4.$$

Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : développe $(4-x)^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$ et $(4-x)^2$.

5. 0,75 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ en A a pour équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 5$, puis que, pour tout réel x :

$$g(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) = \frac{1}{2}(x-2)^3.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à (T).

INDICE

Outil : $y = g'(2)(x-2) + g(2)$; puis développe $(x-2)^3$.

6. 1,25 pts

Tracer (T) et $\mathcal{C}_g$. Montrer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &g(x) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(x^2 - 4x + 1), \end{aligned}$$

et en déduire que les solutions de $g(x) = 2$ sont $2 - \sqrt{3}$, 2 et $2 + \sqrt{3}$. Contrôler sur le tracé.

INDICE

Début : développe le membre de droite. **Ensuite :** résous $x^2 - 4x + 1 = 0$ par le discriminant.

Exercice 3 5 pts

Le coût moyen d'une laiterie

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Une laiterie fictive produit chaque jour q centaines de litres de yaourt à boire, avec $q > 0$. Son coût total, en centaines de dirhams, est $C(q) = \frac{1}{2}q^2 + 4q + 32$. Le coût moyen est $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$. Les données sont fictives. On note Γ la courbe de C_M sur $]0, +\infty[$.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $q > 0$, $C_M(q) = \frac{1}{2}q + 4 + \frac{32}{q}$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $C(q)$ par q.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty$. Interpréter graphiquement, puis économiquement.

INDICE

Outil : la limite de $\frac{32}{q}$ quand q tend vers 0 en restant positif.

3. 1 pts

Montrer que la droite $(\Delta) : y = \frac{1}{2}q + 4$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$, et que Γ est au-dessus de (Δ).

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique avec $\varphi(q) = \frac{32}{q}$, puis son signe.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $q > 0$:

$$C_M'(q) = \frac{(q-8)(q+8)}{2q^2}.$$

En déduire les variations de C_M sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Début : la dérivée de $\frac{32}{q}$ est $-\frac{32}{q^2}$. **Ensuite :** sur $]0, +\infty[$, $q + 8 > 0$.

5. 0,75 pts

Montrer que le coût moyen minimal vaut 12 centaines de dirhams par centaine de litres. Interpréter.

INDICE

Outil : le minimum se lit dans les variations de la question 4.

6. 1 pts

Montrer que, pour $q > 0$, $C_M(q) \leq 14$ équivaut à $(q-4)(q-16) \leq 0$. En déduire les productions pour lesquelles le coût moyen ne dépasse pas 14 centaines de dirhams. Tracer Γ et la droite d'équation $y = 14$ pour $q \in]0, 20]$, puis contrôler graphiquement.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $2q$, qui est positif. **Ensuite :** pour le tracé, place l'asymptote (Δ) et les points d'abscisses 4, 8, 16 et 20.

Exercice 4 5 pts

Le bénéfice d'une coopérative

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Une coopérative fictive fabrique et vend x centaines de tapis par mois, avec $x \in [0, 6]$. En milliers de dirhams, son coût total est $C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{5}{2}$, et sa recette est $R(x) = 8x$. Les données sont fictives. On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice et $\mathcal{C}_B$ sa courbe.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $[0, 6]$:

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}.$$

INDICE

Début : écris $8x - C(x)$ et réduis.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de $[0, 6]$, $B'(x) = -\frac{3}{2}x(x - 4)$. Dresser le tableau de variations de B sur $[0, 6]$ et montrer que le bénéfice maximal vaut $13{,}5$ milliers de dirhams.

INDICE

Outil : sur $[0, 6]$, $x \geq 0$; le signe de $B'(x)$ est celui de $-(x - 4)$ pour $x > 0$.

3. 1 pts

Montrer que $I\left(2, \frac{11}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_B$. Préciser la concavité de $\mathcal{C}_B$ sur $[0, 6]$.

INDICE

Outil : le signe de $B''(x)$ et les résultats admis sur la concavité.

4. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$B(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x^2 - 5x - 5).$$

INDICE

Début : développe $(x - 1)(x^2 - 5x - 5)$.

5. 1 pts

On pose $x_0 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$. Montrer que, sur $[0, 6]$, $B(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [1, x_0]$. Donner une valeur approchée de x_0 et interpréter.

INDICE

Début : les racines de $x^2 - 5x - 5$ sont $\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$ et x_0 ; dresse un tableau de signes de $B(x)$ sur $[0, 6]$.

6. 0,75 pts

On prend un repère orthogonal : 2 cm pour une centaine de tapis en abscisse, 1 cm pour 2 milliers de dirhams en ordonnée. Tracer $\mathcal{C}_B$ sur $[0, 6]$ en plaçant les points d'abscisses 0, 1, 2, 4, x_0 et 6.

INDICE

Début : calcule $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, $B(4)$ et $B(6)$ à l'aide des questions précédentes. **Ensuite :** les tangentes sont horizontales en 0 et en 4.

Exercice 5 5 pts

Un axe de symétrie et deux asymptotes verticales

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ par :

$$f(x) = 2 + \frac{9}{x(x-6)}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. 1 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $2a - x = 6 - x$, dans un repère orthogonal.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$:

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2(x-6)} - \frac{3}{2x}.$$

INDICE

Début : réduis $\dfrac{3}{2(x-6)} - \dfrac{3}{2x}$ au dénominateur $2x(x-6)$.

3. 1,5 pts

On étudie f sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter graphiquement. Déduire de la question 1 que la droite d'équation $x = 0$ est aussi asymptote verticale, et que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 2 ; un seul terme devient infini en 6. **Ensuite :** l'axe d'équation $x = 3$ échange 6 et 0.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$:

$$f'(x) = \frac{-18(x-3)}{x^2(x-6)^2}.$$

En déduire que f est décroissante sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$, et calculer $f(3)$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = x^2 - 6x$.

5. 0,5 pts

En utilisant l'axe de symétrie, montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3]$, et que $f(3) = 1$ est un maximum local.

INDICE

Outil : une symétrie d'axe vertical inverse le sens de variation.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$, $f(x) > 2$ équivaut à $x(x-6) > 0$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

INDICE

Outil : le signe de $f(x) - 2$, puis la propriété de position relative.