BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle

Problème autonome noté sur 6 points. Durée indicative : 36 minutes.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

INDICE

Début : développe $(2x - 3)(x - 1)$ et ajoute 2.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x - 1) + 2 \\ = 2x^2 - 2x - 3x + 3 + 2 \\ = 2x^2 - 5x + 5.\end{aligned}$$

Division. Soit $x \neq 1$. On divise par $x - 1$, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(2x - 3)(x - 1) + 2}{x - 1} \\ &= 2x - 3 + \frac{2}{x - 1}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \neq 1$, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x - 1}$.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1 ; regarde le signe de $x - 1$.

CORRIGÉ

On utilise l'écriture de la question 1. Quand x tend vers 1, $2x - 3$ tend vers -1.

- Si $x \to 1^+$, $x - 1$ tend vers 0 par valeurs positives : $\dfrac{2}{x - 1}$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.
- Si $x \to 1^-$, $x - 1$ tend vers 0 par valeurs négatives : $\dfrac{2}{x - 1}$ tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Interprétation. Par définition, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3. 1 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que la droite (D) : $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty, 1[$.

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique, puis le signe de $f(x) - (2x - 3)$.

CORRIGÉ

Limites. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\dfrac{2}{x-1}$ tend vers 0. Le terme $2x - 3$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote. Posons $\varphi(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Alors $f(x) = 2x - 3 + \varphi(x)$, et $\varphi(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Le coefficient $a = 2$ n'est pas nul : d'après la propriété de l'asymptote oblique, (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Position. Pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) - (2x - 3) = \frac{2}{x-1}.$$

Cette différence a le signe de $x - 1$.

Conclusion. D'après la propriété de position relative, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote (D) sur $]1, +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty, 1[$.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 1 ; la dérivée de $\dfrac{2}{x-1}$ est $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{(x-1)^2}$. Pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2\left[(x-1)^2 - 1\right]}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-2x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $x(x-2)$. Elle est positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$, négative sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$.

Valeurs. $f(0) = -3 - 2 = -5$ et $f(2) = 1 + 2 = 3$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	croissante	-5	décroissante	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	décroissante	3	croissante	$+\infty$

La double barre $\|\|$ marque la valeur interdite 1.

5. 0,75 pts

Montrer que le point $\Omega(1,-1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie avec $2a-x=2-x$; contrôle d'abord le domaine.

CORRIGÉ

On applique la propriété du centre de symétrie avec $a=1$ et $b=-1$, donc $2a-x=2-x$.

Domaine. Soit $x\neq 1$. L'égalité $2-x=1$ équivaut à $x=1$, valeur exclue : $2-x$ est dans le domaine.

Calcul de $f(2-x)$. On a $(2-x)-1=-(x-1)$, donc :

$$\begin{aligned} &f(2-x)\\ &=4-2x-3-\frac{2}{x-1}\\ &=1-2x-\frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

Somme. En ajoutant $f(x)=2x-3+\dfrac{2}{x-1}$, les termes en x et les fractions s'éliminent :

$$\begin{aligned} &f(2-x)+f(x)\\ &=1-3\\ &=-2=2\times(-1). \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $\Omega(1,-1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. C'est le point d'intersection des deux asymptotes.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Outil : dérive $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$, puis applique le lien admis entre concavité et signe de f''.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, f est la somme d'une fonction affine et d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est deux fois dérivable sur chacun de ces intervalles.

Dérivée seconde. Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{(x-1)^3}$, donc :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \times \left(-\frac{2}{(x-1)^3}\right) \\ &= \frac{4}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Concavité. $(x-1)^3$ a le signe de $x - 1$: $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$ et $f''(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de f'', $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

Conclusion. La concavité change de part et d'autre de 1, mais 1 n'appartient pas au domaine : $\mathcal{C}_f$ n'a pas de point d'inflexion.

7. 1,25 pts

Montrer que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses. Tracer les asymptotes, puis $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $2x^2 - 5x + 5 = 0$; calcule son discriminant. **Ensuite :** place d'abord les asymptotes et les points $(0, -5)$ et $(2, 3)$.

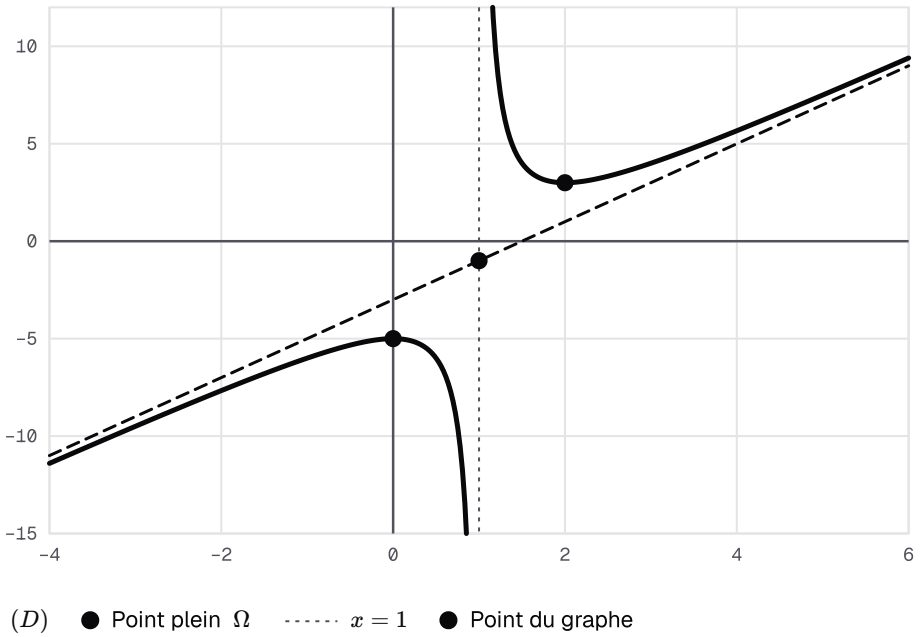
CORRIGÉ

Axe des abscisses. Pour $x \neq 1$, $f(x) = 0$ équivaut à $2x^2 - 5x + 5 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $25 - 40 = -15 < 0$: l'équation n'a pas de solution, et $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses. Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0, -5)$.

Tracé. On trace la droite d'équation $x = 1$ et la droite $(D) : y = 2x - 3$, qui se coupent en $\Omega(1, -1)$. On place les points $(0, -5)$ et $(2, 3)$.

- La branche de gauche monte sous (D) jusqu'au point $(0, -5)$, puis plonge vers $-\infty$ le long de la droite d'équation $x = 1$.
- La branche de droite descend de $+\infty$ jusqu'au point $(2, 3)$, puis remonte au-dessus de (D) en s'en rapprochant.

Les deux branches sont symétriques par rapport à Ω.



La courbe de f, ses asymptotes x = 1 et (D) : y = 2x − 3, sécantes en Ω(1, −1) : la branche de gauche est sous (D), celle de droite au-dessus, et aucune ne coupe l'axe des abscisses.

Exercice 2 6 pts

Étude complète d'un polynôme de degré 3

Problème autonome noté sur 6 points. Durée indicative : 36 minutes.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, et que $\mathcal{C}_g$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré, puis la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Limites. Le terme de plus haut degré de $g(x)$ est $\frac{1}{2}x^3$, de coefficient $\frac{1}{2} > 0$: c'est lui qui fixe le comportement de g à l'infini. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Quotient. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} + \frac{1}{x}.$$

Comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, ce quotient a la limite de $\frac{1}{2}x^2$, soit $+\infty$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. Les limites de $g(x)$ et de $\dfrac{g(x)}{x}$ sont infinies : par définition, $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)(x-3)$. Dresser le tableau de variations de g.

INDICE

Début : calcule $g'(x)$ et mets $\dfrac{3}{2}$ en facteur. **Ensuite :** le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Dérivée. g est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \\ &= \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3) \\ &= \frac{3}{2}(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines 1 et 3, et son coefficient $\dfrac{3}{2}$ est positif : $g'(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]3, +\infty[$, $g'(x) < 0$ sur $]1, 3[$.

Valeurs.

$$g(1) = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 1 = 3,$$
$$g(3) = \frac{27}{2} - 27 + \frac{27}{2} + 1 = 1.$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	croissante	3	décroissante	1	croissante	$+\infty$

3. 1 pts

Montrer que le point $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$, et préciser la concavité de $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : le signe de $g''(x)$, puis la propriété admise du point d'inflexion.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. g est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $g''(x) = 3x - 6 = 3(x-2)$: elle est négative pour $x < 2$ et positive pour $x > 2$.

Concavité. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de g'', $\mathcal{C}_g$ est concave sur $]-\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$.

Point d'inflexion. g'' s'annule en 2 en changeant de signe, et $g(2) = 4 - 12 + 9 + 1 = 2$.

Conclusion. D'après la propriété admise du point d'inflexion, $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$g(4-x)+g(x)=4.$$

Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : développe $(4-x)^3=64-48x+12x^2-x^3$ et $(4-x)^2$.

CORRIGÉ

Calcul de $g(4-x)$. Soit x un réel. On utilise $(4-x)^3=64-48x+12x^2-x^3$ et $(4-x)^2=16-8x+x^2$:

$$\begin{aligned} &g(4-x)\\ &=\frac{1}{2}(64-48x+12x^2-x^3)\\ &\quad-3(16-8x+x^2)\\ &\quad+\frac{9}{2}(4-x)+1. \end{aligned}$$

En regroupant les termes de même degré :

$$\begin{aligned} &g(4-x)\\ &=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{9}{2}x+3. \end{aligned}$$

Somme. Les termes en x^3, en x^2 et en x de $g(4-x)$ et de $g(x)$ sont opposés :

$$\begin{aligned} &g(4-x)+g(x)\\ &=3+1\\ &=4=2\times 2. \end{aligned}$$

Interprétation. $D_g=\mathbb{R}$, donc $4-x$ appartient à D_g pour tout réel x. D'après la propriété du centre de symétrie, avec $a=2$ et $b=2$, le point $A(2,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

5. 0,75 pts

Montrer que la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ en A a pour équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 5$, puis que, pour tout réel x :

$$g(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) = \frac{1}{2}(x-2)^3.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à (T).

INDICE

Outil : $y = g'(2)(x-2) + g(2)$; puis développe $(x-2)^3$.

CORRIGÉ

Tangente. (T) a pour équation $y = g'(2)(x-2) + g(2)$. Avec la forme factorisée, $g'(2) = \dfrac{3}{2} \times 1 \times (-1) = -\dfrac{3}{2}$, et $g(2) = 2$:

$$\begin{aligned}(T) : y &= -\frac{3}{2}(x-2) + 2 \\ &= -\frac{3}{2}x + 5.\end{aligned}$$

Différence. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}&g(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \\ &= \frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^3.\end{aligned}$$

La dernière ligne utilise $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Position. $(x-2)^3$ a le signe de $x - 2$. D'après la propriété de position relative, $\mathcal{C}_g$ est sous (T) sur $]-\infty, 2[$ et au-dessus sur $]2, +\infty[$.

Conclusion. La tangente en A est $(T) : y = -\dfrac{3}{2}x + 5$, et la courbe traverse cette tangente au point d'inflexion A.

6. 1,25 pts

Tracer (T) et $\mathcal{C}_g$. Montrer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &g(x) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(x^2 - 4x + 1), \end{aligned}$$

et en déduire que les solutions de $g(x) = 2$ sont $2 - \sqrt{3}$, 2 et $2 + \sqrt{3}$. Contrôler sur le tracé.

INDICE

Début : développe le membre de droite. **Ensuite :** résous $x^2 - 4x + 1 = 0$ par le discriminant.

CORRIGÉ

Tracé. On place $(1, 3)$, $A(2, 2)$ et $(3, 1)$, puis on trace (T). La courbe monte de $-\infty$ jusqu'au point $(1, 3)$, descend jusqu'au point $(3, 1)$ en traversant (T) en A, puis remonte vers $+\infty$. Elle est symétrique par rapport à A.

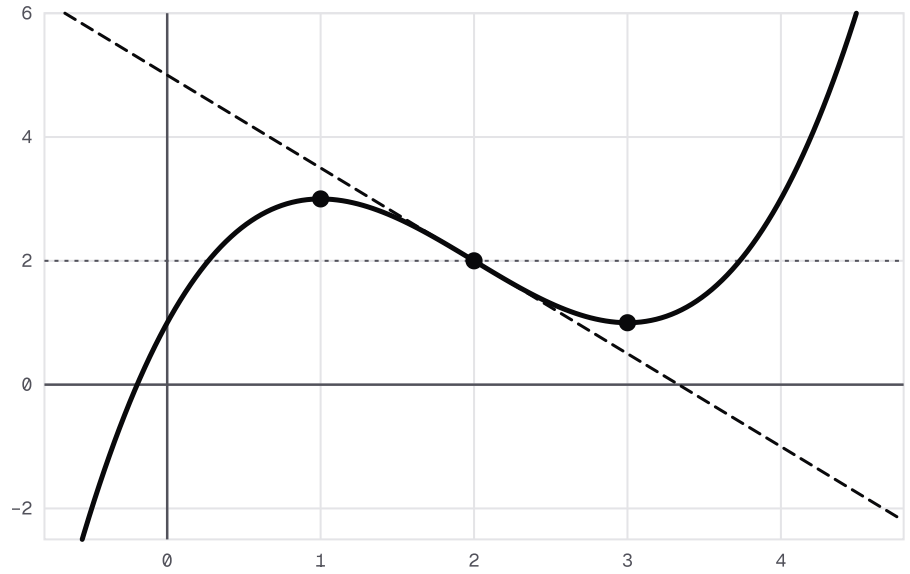
Factorisation. Soit x un réel. On développe :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x-2)(x^2 - 4x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) \\ &= g(x) - 2. \end{aligned}$$

Résolution. L'équation $g(x) = 2$ équivaut à $(x-2)(x^2 - 4x + 1) = 0$, donc à $x = 2$ ou $x^2 - 4x + 1 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $16 - 4 = 12 > 0$; comme $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ses racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

Conclusion. Les solutions de $g(x) = 2$ sont $2 - \sqrt{3}$, 2 et $2 + \sqrt{3}$.

Contrôle. Sur le tracé, la droite d'équation $y = 2$ passe par A et coupe la courbe en trois points, d'abscisses voisines de $0{,}3$, 2 et $3{,}7$.



La courbe de g monte jusqu'à (1, 3), descend jusqu'à (3, 1) en traversant sa tangente (T) au point d'inflexion A(2, 2) ; la droite y = 2 la coupe trois fois.

Exercice 3 5 pts

Le coût moyen d'une laiterie

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Une laiterie fictive produit chaque jour q centaines de litres de yaourt à boire, avec $q > 0$. Son coût total, en centaines de dirhams, est $C(q) = \frac{1}{2}q^2 + 4q + 32$. Le coût moyen est $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$. Les données sont fictives. On note Γ la courbe de C_M sur $]0, +\infty[$.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $q > 0$, $C_M(q) = \frac{1}{2}q + 4 + \frac{32}{q}$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $C(q)$ par q.

CORRIGÉ

Soit $q > 0$. On divise chaque terme de $C(q)$ par q :

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{\frac{1}{2}q^2 + 4q + 32}{q} \\ &= \frac{1}{2}q + 4 + \frac{32}{q}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $q > 0$, $C_M(q) = \frac{1}{2}q + 4 + \frac{32}{q}$.

2. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty$. Interpréter graphiquement, puis économiquement.

INDICE

Outil : la limite de $\frac{32}{q}$ quand q tend vers 0 en restant positif.

CORRIGÉ

Limite. Si $q \to 0^+$, $\frac{32}{q}$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{2}q + 4$ tend vers 4. Donc :

$$\lim_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty.$$

Interprétation graphique. L'axe des ordonnées est asymptote verticale à Γ.

Interprétation économique. Pour une très petite production, le coût fixe de 32 centaines de dirhams se répartit sur très peu de litres : le coût moyen devient très grand.

3. 1 pts

Montrer que la droite $(\Delta) : y = \dfrac{1}{2}q + 4$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$, et que Γ est au-dessus de (Δ).

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique avec $\varphi(q) = \dfrac{32}{q}$, puis son signe.

CORRIGÉ

Asymptote. Posons $\varphi(q) = \dfrac{32}{q}$ pour $q > 0$. Alors $C_M(q) = \dfrac{1}{2}q + 4 + \varphi(q)$, et $\varphi(q)$ tend vers 0 en $+\infty$. Le coefficient $a = \dfrac{1}{2}$ n'est pas nul : d'après la propriété de l'asymptote oblique, (Δ) est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

Position. Pour tout $q > 0$:

$$C_M(q) - \left(\frac{1}{2}q + 4\right) = \frac{32}{q} > 0.$$

Conclusion. D'après la propriété de position relative, Γ est au-dessus de (Δ) sur $]0, +\infty[$.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $q > 0$:

$$C'_M(q) = \frac{(q-8)(q+8)}{2q^2}.$$

En déduire les variations de C_M sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Début : la dérivée de $\dfrac{32}{q}$ est $-\dfrac{32}{q^2}$. **Ensuite :** sur $]0, +\infty[$, $q + 8 > 0$.

CORRIGÉ

Dérivée. La dérivée de $q \mapsto \dfrac{32}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{32}{q^2}$. Pour tout $q > 0$:

$$\begin{aligned} C'_M(q) &= \frac{1}{2} - \frac{32}{q^2} \\ &= \frac{q^2 - 64}{2q^2} \\ &= \frac{(q-8)(q+8)}{2q^2}. \end{aligned}$$

Signe. Sur $]0, +\infty[$, $2q^2 > 0$ et $q + 8 > 0$: $C'_M(q)$ a le signe de $q - 8$.

Conclusion. C_M est décroissante sur $]0, 8]$ et croissante sur $[8, +\infty[$.

5. `0,75 pts`

Montrer que le coût moyen minimal vaut 12 centaines de dirhams par centaine de litres. Interpréter.

INDICE

Outil : le minimum se lit dans les variations de la question 4.

CORRIGÉ

D'après la question 4, C_M décroît sur $]0,8]$ puis croît sur $[8,+\infty[$: elle admet un minimum en $q=8$, égal à :

$$C_M(8)=4+4+4=12.$$

Interprétation. En produisant 8 centaines de litres, soit 800 litres par jour, la laiterie obtient le coût moyen le plus bas : 12 centaines de dirhams par centaine de litres, soit 12 dirhams par litre.

6. 1 pts

Montrer que, pour $q > 0$, $C_M(q) \leq 14$ équivaut à $(q-4)(q-16) \leq 0$. En déduire les productions pour lesquelles le coût moyen ne dépasse pas 14 centaines de dirhams. Tracer Γ et la droite d'équation $y = 14$ pour $q \in]0, 20]$, puis contrôler graphiquement.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $2q$, qui est positif. **Ensuite :** pour le tracé, place l'asymptote (Δ) et les points d'abscisses 4, 8, 16 et 20.

CORRIGÉ

Équivalence. Soit $q > 0$. Multiplier les deux membres par $2q$, strictement positif, ne change pas le sens de l'inégalité. Ainsi $C_M(q) \leq 14$ équivaut à $q^2 + 8q + 64 \leq 28q$, soit $q^2 - 20q + 64 \leq 0$, c'est-à-dire :

$$(q-4)(q-16) \leq 0.$$

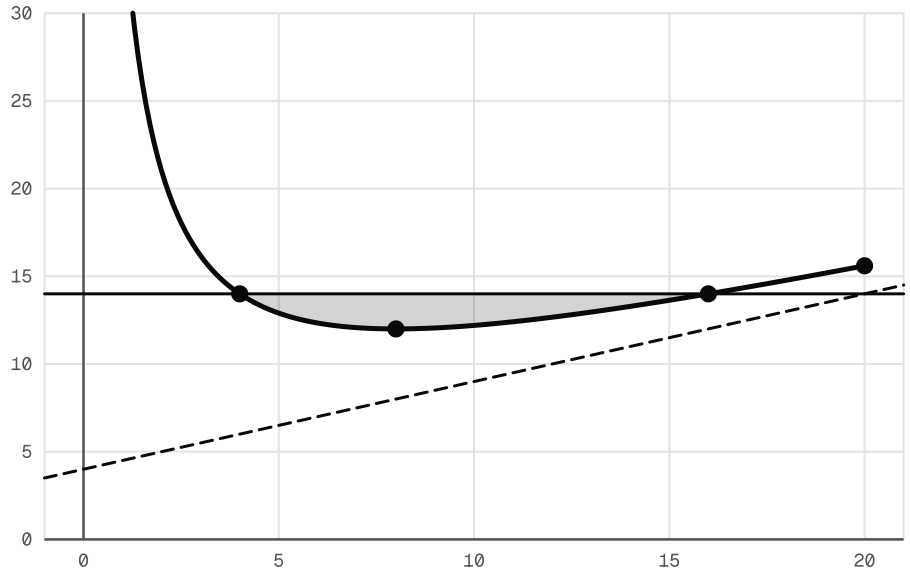
Résolution. Ce trinôme, de coefficient 1 positif, est négatif ou nul entre ses racines 4 et 16 : $q \in [4, 16]$. Le coût moyen ne dépasse pas 14 centaines de dirhams pour une production comprise entre 400 et $1\,600$ litres par jour.

Tracé. On trace (Δ), puis on place les points $(4, 14)$, $(8, 12)$, $(16, 14)$ et $\left(20, \dfrac{78}{5}\right)$, car :

$$C_M(20) = 10 + 4 + \frac{8}{5} = \frac{78}{5}.$$

Partie de très haut près de l'axe des ordonnées, la courbe descend jusqu'au point $(8, 12)$, puis remonte au-dessus de (Δ).

Contrôle. La droite d'équation $y = 14$ coupe Γ aux points d'abscisses 4 et 16, et Γ est sous cette droite entre ces deux abscisses : la lecture confirme le calcul.



Sur]0, 20], la courbe Γ du coût moyen descend jusqu'à 12 en q = 8, puis remonte au-dessus de (Δ) ; elle est sous la droite y = 14 entre q = 4 et q = 16, zone teintée.

Exercice 4 5 pts

Le bénéfice d'une coopérative

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Une coopérative fictive fabrique et vend x centaines de tapis par mois, avec $x \in [0, 6]$. En milliers de dirhams, son coût total est $C(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 8x + \dfrac{5}{2}$, et sa recette est $R(x) = 8x$. Les données sont fictives. On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice et $\mathcal{C}_B$ sa courbe.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $[0, 6]$:

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}.$$

INDICE

Début : écris $8x - C(x)$ et réduis.

CORRIGÉ

Soit x dans $[0, 6]$. On remplace $R(x)$ et $C(x)$ par leurs expressions, en changeant le signe de chaque terme de $C(x)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 8x - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \\ &\quad - 8x - \frac{5}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0, 6]$, $B(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \dfrac{5}{2}$.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de $[0,6]$, $B'(x) = -\dfrac{3}{2}x(x-4)$. Dresser le tableau de variations de B sur $[0,6]$ et montrer que le bénéfice maximal vaut $13{,}5$ milliers de dirhams.

INDICE

Outil : sur $[0,6]$, $x \geq 0$; le signe de $B'(x)$ est celui de $-(x-4)$ pour $x > 0$.

CORRIGÉ

Dérivée. B est un polynôme, donc dérivable. Pour tout x de $[0,6]$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 6x \\ &= -\frac{3}{2}x(x-4). \end{aligned}$$

Signe. Pour x dans $]0,6]$, on a $x > 0$: $B'(x)$ a le signe de $-(x-4)$. Ainsi $B'(x) > 0$ sur $]0,4[$ et $B'(x) < 0$ sur $]4,6]$; B' s'annule en 0 et en 4.

Valeurs. $B(0) = -\dfrac{5}{2}$, puis :

$$B(4) = -32 + 48 - \frac{5}{2} = \frac{27}{2},$$

$$\begin{aligned} B(6) &= -108 + 108 - \frac{5}{2} \\ &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

x	0		4		6
$B'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	$-\dfrac{5}{2}$	croissante	$\dfrac{27}{2}$	décroissante	$-\dfrac{5}{2}$

Conclusion. B est croissante sur $[0,4]$ et décroissante sur $[4,6]$. Le bénéfice maximal vaut $\dfrac{27}{2} = 13{,}5$ milliers de dirhams, atteint pour $x = 4$, soit 400 tapis par mois.

3. 1 pts

Montrer que $I\left(2, \frac{11}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_B$. Préciser la concavité de $\mathcal{C}_B$ sur $[0, 6]$.

INDICE

Outil : le signe de $B''(x)$ et les résultats admis sur la concavité.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. B est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle ouvert $]0, 6[$ qui contient 2. Pour tout réel x, $B''(x) = -3x + 6 = -3(x - 2)$: elle est positive sur $[0, 2[$ et négative sur $]2, 6]$.

Concavité. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de B'', $\mathcal{C}_B$ est convexe sur $[0, 2]$ et concave sur $[2, 6]$.

Point d'inflexion. B'' s'annule en 2 en changeant de signe, et :

$$B(2) = -4 + 12 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}.$$

D'après la propriété admise du point d'inflexion, $I\left(2, \frac{11}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_B$.

Interprétation. Comme B'' est positive sur $[0, 2[$ et négative sur $]2, 6]$, B' croît puis décroît, et sa plus grande valeur sur $[0, 6]$ est $B'(2) = 6$. C'est en $x = 2$ que le bénéfice augmente le plus vite.

Conclusion. $I\left(2, \frac{11}{2}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_B$, convexe sur $[0, 2]$ et concave sur $[2, 6]$.

4. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$B(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x^2 - 5x - 5).$$

INDICE

Début : développe $(x - 1)(x^2 - 5x - 5)$.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 - 5x - 5) &= x^3 - 5x^2 - 5x \\ &\quad - x^2 + 5x + 5 \\ &= x^3 - 6x^2 + 5.\end{aligned}$$

Produit par $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(x - 1)(x^2 - 5x - 5) &= -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2} \\ &= B(x).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $B(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x^2 - 5x - 5)$.

5. 1 pts

On pose $x_0 = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$. Montrer que, sur $[0,6]$, $B(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [1, x_0]$. Donner une valeur approchée de x_0 et interpréter.

INDICE

Début : les racines de $x^2 - 5x - 5$ sont $\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}$ et x_0 ; dresse un tableau de signes de $B(x)$ sur $[0,6]$.

CORRIGÉ

Racines du trinôme. $x^2 - 5x - 5$ a pour discriminant $25 + 20 = 45$, et $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Ses racines sont $\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}85$ et $x_0 \approx 5{,}85$. Sur $[0,6]$, il est négatif avant x_0 et positif après.

Signe de $B(x)$. D'après la question 4, $B(x)$ est le produit de $-\dfrac{1}{2}$, négatif, par $x-1$ et par x^2-5x-5 :

x	0		1		x_0		6
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x-5		$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion. Sur $[0,6]$, $B(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [1, x_0]$, avec $x_0 \approx 5{,}85$.

Interprétation. La coopérative ne perd pas d'argent pour une production de 100 à 585 tapis par mois environ. Sur $\mathcal{C}_B$, ce sont les points situés au-dessus de l'axe des abscisses, ou sur lui.

6. 0,75 pts

On prend un repère orthogonal : 2 cm pour une centaine de tapis en abscisse, 1 cm pour 2 milliers de dirhams en ordonnée. Tracer $\mathcal{C}_B$ sur $[0, 6]$ en plaçant les points d'abscisses 0, 1, 2, 4, x_0 et 6.

INDICE

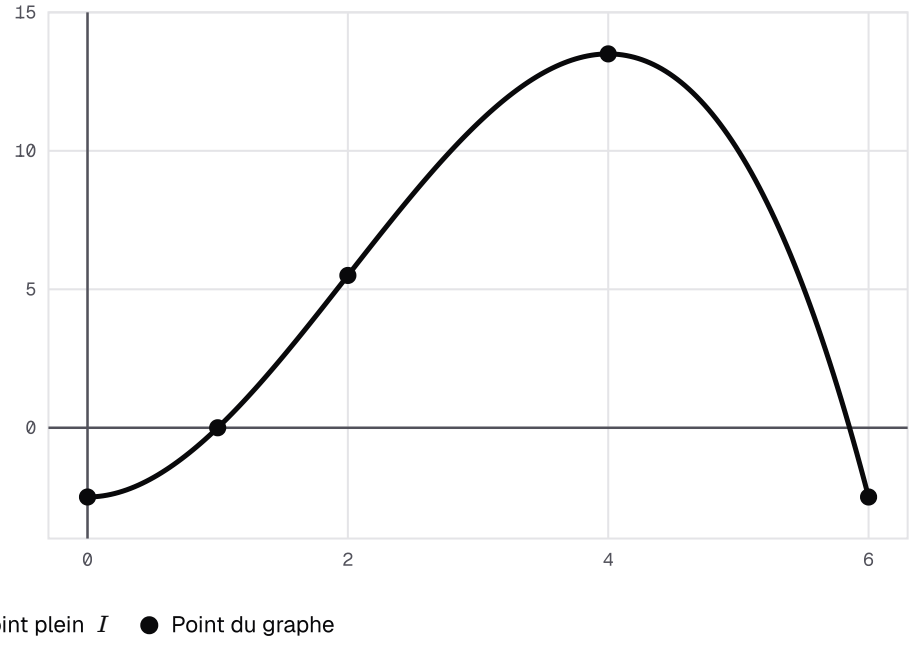
Début : calcule $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, $B(4)$ et $B(6)$ à l'aide des questions précédentes. **Ensuite :** les tangentes sont horizontales en 0 et en 4.

CORRIGÉ

Points. D'après les questions précédentes, on place $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$, $(1, 0)$, $\left(2, \frac{11}{2}\right)$, $\left(4, \frac{27}{2}\right)$, $(x_0, 0)$ avec $x_0 \approx 5{,}85$, et $\left(6, -\frac{5}{2}\right)$.

Allure.

- La courbe part de $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ avec une tangente horizontale, car $B'(0) = 0$, et coupe l'axe des abscisses en 1.
- Elle monte en tournant sa concavité vers le haut jusqu'à $I\left(2, \frac{11}{2}\right)$, puis vers le bas.
- Elle atteint son sommet $\left(4, \frac{27}{2}\right)$ avec une tangente horizontale, redescend, recoupe l'axe en x_0 et finit en $\left(6, -\frac{5}{2}\right)$.



La courbe de B sur [0, 6] : elle part de −5/2, coupe l'axe en 1, passe par le point d'inflexion I(2, 11/2), atteint 27/2 en 4, puis redescend à −5/2 en 6.

Exercice 5 5 pts

Un axe de symétrie et deux asymptotes verticales

Problème autonome noté sur 5 points. Durée indicative : 30 minutes.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ par :

$$f(x) = 2 + \frac{9}{x(x-6)}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. 1 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $2a - x = 6 - x$, dans un repère orthogonal.

CORRIGÉ

On applique la propriété de l'axe de symétrie avec $a = 3$, donc $2a - x = 6 - x$; le repère est orthogonal.

Domaine. L'égalité $6 - x = 0$ équivaut à $x = 6$, et $6 - x = 6$ équivaut à $x = 0$. Donc, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$, le réel $6 - x$ appartient aussi à $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$.

Calcul. Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$. Le dénominateur de $f(6 - x)$ vaut :

$$\begin{aligned}&(6 - x)\big((6 - x) - 6\big)\\ &= (6 - x)(-x) = x(x - 6).\end{aligned}$$

Donc $f(6 - x) = 2 + \dfrac{9}{x(x-6)} = f(x)$.

Conclusion. D'après la propriété de l'axe de symétrie, $\mathcal{C}_f$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$:

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2(x-6)} - \frac{3}{2x}.$$

INDICE

Début : réduis $\frac{3}{2(x-6)} - \frac{3}{2x}$ au dénominateur $2x(x-6)$.

CORRIGÉ

Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$. On réduit au dénominateur $2x(x-6)$:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2(x-6)} - \frac{3}{2x} \\ &= \frac{3x - 3(x-6)}{2x(x-6)} \\ &= \frac{18}{2x(x-6)} = \frac{9}{x(x-6)}. \end{aligned}$$

Conclusion. En ajoutant 2 aux deux membres, $f(x) = 2 + \frac{3}{2(x-6)} - \frac{3}{2x}$.

3. 1,5 pts

On étudie f sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter graphiquement. Déduire de la question 1 que la droite d'équation $x = 0$ est aussi asymptote verticale, et que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 2 ; un seul terme devient infini en 6. **Ensuite :** l'axe d'équation $x = 3$ échange 6 et 0.

CORRIGÉ

En 6. On utilise l'écriture de la question 2. Quand x tend vers 6, $2 - \frac{3}{2x}$ tend vers $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Le terme $\frac{3}{2(x-6)}$ tend vers $-\infty$ si $x \to 6^-$ et vers $+\infty$ si $x \to 6^+$. Donc $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 6$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

En $+\infty$. Les termes $\frac{3}{2(x-6)}$ et $\frac{3}{2x}$ tendent vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Par symétrie. D'après la question 1, $f(x) = f(6 - x)$ pour tout x du domaine.

- Quand $x \to 0^+$, $6 - x$ tend vers 6 en restant inférieur à 6, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
- Quand $x \to 0^-$, $6 - x$ tend vers 6 en restant supérieur à 6, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.
- Quand $x \to -\infty$, $6 - x$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

Conclusion. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale, et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$:

$$f'(x) = \frac{-18(x-3)}{x^2(x-6)^2}.$$

En déduire que f est décroissante sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$, et calculer $f(3)$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\frac{1}{v}$ est $-\frac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = x^2 - 6x$.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $v(x) = x^2 - 6x = x(x-6)$: v est dérivable et ne s'annule pas sur le domaine, avec $v'(x) = 2x - 6$. La dérivée de $\frac{1}{v}$ est $-\frac{v'}{v^2}$, donc, pour tout x du domaine :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{9(2x-6)}{(x^2-6x)^2} \\ &= \frac{-18(x-3)}{x^2(x-6)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x \geq 3$ dans le domaine, $x - 3 \geq 0$ et le dénominateur est strictement positif : $f'(x) \leq 0$, avec égalité seulement en 3.

Conclusion. f est décroissante sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$. De plus, $f(3) = 2 + \frac{9}{3 \times (-3)} = 1$.

5. 0,5 pts

En utilisant l'axe de symétrie, montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3]$, et que $f(3) = 1$ est un maximum local.

INDICE

Outil : une symétrie d'axe vertical inverse le sens de variation.

CORRIGÉ

Symétrie. La symétrie d'axe la droite d'équation $x = 3$ envoie l'abscisse x sur $6 - x$. Elle échange les morceaux de $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $[3, 6[$ et de $]0, 3]$, ainsi que ceux au-dessus de $]6, +\infty[$ et de $]-\infty, 0[$.

Sens de variation. Une symétrie d'axe vertical inverse le sens de variation. Comme f est décroissante sur $[3, 6[$ et sur $]6, +\infty[$ (question 4), elle est croissante sur $]0, 3]$ et sur $]-\infty, 0[$.

Conclusion. Sur $]0, 6[$, f croît jusqu'à 3 puis décroît : $f(3) = 1$ est un maximum local de f.

6. 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$, $f(x) > 2$ équivaut à $x(x-6) > 0$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

INDICE

Outil : le signe de $f(x) - 2$, puis la propriété de position relative.

CORRIGÉ

Équivalence. Soit x dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$. On a $f(x) - 2 = \dfrac{9}{x(x-6)}$, de numérateur 9 positif. Cette différence a donc le signe de $x(x-6)$: $f(x) > 2$ équivaut à $x(x-6) > 0$.

Signe. Le trinôme $x(x-6)$ est positif à l'extérieur de ses racines 0 et 6, négatif entre elles.

Conclusion. D'après la propriété de position relative, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]6, +\infty[$, en dessous sur $]0, 6[$. La différence $f(x) - 2$ ne s'annule jamais : la courbe ne coupe pas cette droite.