BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Asymptotes d'une fonction rationnelle, puis position

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 14}{2x - 10}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq 5$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x - 5}.$$

INDICE

Début : réduis le membre de droite au dénominateur $x - 5$, puis multiplie le numérateur et le dénominateur par 2.

2.

Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : les limites en 5 à droite et à gauche, puis la propriété de l'asymptote oblique.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$, puis la propriété de position relative.

Exercice 2

Point d'inflexion, centre de symétrie et tangente traversée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion $A(1, 5)$.

INDICE

Outil : le lien admis entre concavité et signe de f'', puis la propriété admise du point d'inflexion.

2.

Montrer que A est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a = 1$ et $b = 5$; développe $f(2 - x)$.

3.

Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

Outil : la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

4.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - (6x - 1) = -2(x - 1)^3.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T).

INDICE

Début : développe $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. **Ensuite :** le signe de $(x - 1)^3$ est celui de $x - 1$.

Exercice 3

Étudier la moitié, déduire le reste

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ par :

$$f(x) = -2x + 13 - \frac{8}{x-6}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que le point $\Omega(6, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $2a - x = 12 - x$; vérifie d'abord le domaine.

2.

Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $]6, +\infty[$. Calculer les limites de f en 6 à droite et en $+\infty$.

INDICE

Outil : la symétrie de centre Ω échange les deux parties du domaine.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq 6$:

$$f'(x) = \frac{-2(x-4)(x-8)}{(x-6)^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f sur $]6, +\infty[$.

INDICE

Début : la dérivée de $-\dfrac{8}{x-6}$ est $\dfrac{8}{(x-6)^2}$. **Ensuite :** $(x-6)^2 - 4$ est une différence de deux carrés.

4.

Sans nouveau calcul de dérivée, montrer que $f(4) = 9$, que f est décroissante sur $]-\infty, 4]$ et croissante sur $[4, 6[$, et que $f(4)$ est un minimum local de f sur $]-\infty, 6[$.

INDICE

Début : le symétrique du point $(8, -7)$ par rapport à $\Omega(6, 1)$ est $(12 - 8, 2 - (-7))$. **Ensuite :** une symétrie de centre Ω garde le sens de variation.

Exercice 4

Étude partielle d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et préciser la nature des branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré, puis la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.

2.

Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe du trinôme $6(x+1)(x-2)$, positif à l'extérieur des racines.

3.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer son point d'inflexion I.

INDICE

Outil : le signe de $f''(x) = 12x - 6$ et les résultats admis sur la concavité.

4.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point I.

INDICE

Outil : $y = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, avec la forme factorisée de f'.

Exercice 5

Le coût moyen d'une imprimerie

Une imprimerie fictive produit q milliers de cahiers par jour. Son coût total, en milliers de dirhams, est $C(q) = 2q^2 + 5q + 18$. Le coût moyen est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Les données sont fictives. On étudie la fonction C_M sur $]0, +\infty[$; sa courbe est notée Γ.

1.

Montrer que, pour tout $q > 0$, $C_M(q) = 2q + 5 + \dfrac{18}{q}$. Donner les asymptotes de Γ.

INDICE

Outil : la limite en 0 à droite, puis la propriété de l'asymptote oblique avec $\varphi(q) = \dfrac{18}{q}$.

2.

Étudier la position de Γ par rapport à (D). Interpréter le terme $\dfrac{18}{q}$.

INDICE

Outil : le signe de $C_M(q) - (2q + 5)$ sur $]0, +\infty[$.

3.

Montrer que, pour tout $q > 0$:

$$C'_M(q) = \frac{2(q - 3)(q + 3)}{q^2}.$$

En déduire la production qui rend le coût moyen minimal, et ce coût.

INDICE

Début : la dérivée de $\dfrac{18}{q}$ est $-\dfrac{18}{q^2}$. **Ensuite :** sur $]0, +\infty[$, $q + 3 > 0$.

Exercice 6

Combien de solutions ? Lire, puis calculer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On admet que la droite d'équation $x = 3$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$, avec $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq 3$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{2(x-3)^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$; réduis au même dénominateur et factorise $(x-3)^2 - 4$.

2.

Tracer les asymptotes et $\mathcal{C}_f$. Lire sur le tracé le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ pour $k = 0$, $k = 2$ et $k = 6$.

INDICE

Outil : les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = k$.

3.

Montrer que, pour $x \neq 3$, l'équation $f(x) = k$ équivaut à :

$$x^2 - (1 + 2k)x + 6k - 2 = 0.$$

Confirmer les trois lectures de la question 2.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $2(x-3)$, non nul. **Ensuite :** calcule le discriminant pour chaque valeur de k.

4.

Sans calcul, expliquer par une lecture du tracé pourquoi l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution. Confirmer avec le discriminant de la question 3.

INDICE

Outil : compare 1 à l'ordonnée du sommet de la branche de gauche, puis à celle du creux de la branche de droite.

Exercice 7

Retrouver une fonction à partir de ses asymptotes

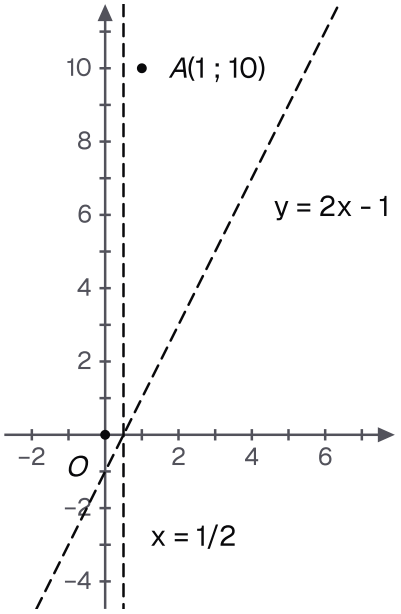
Une fonction f a pour courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère. On sait que :

- la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et la droite d'équation $y = 2x - 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$;
- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(1, 10)$.

On admet que, pour tout $x \neq d$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - d},$$

avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.



Les données : la droite d'équation x = 1/2, la droite d'équation y = 2x – 1, toutes deux asymptotes de la courbe, et le point A(1, 10) de la courbe.

1.

Déterminer a, b et d.

INDICE

Outil : la propriété des fonctions de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x - d}$ donne leurs deux asymptotes.

2.

Utiliser le point A pour trouver c. Vérifier que, pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}.$$

INDICE

Début : écris $f(1) = 10$. **Ensuite :** $\dfrac{c}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{2c}{2x - 1}$.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x+1)}{(2x-1)^2}.$$

En déduire les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.

INDICE

Début : la dérivée de $\dfrac{9}{2x-1}$ est $-\dfrac{18}{(2x-1)^2}$. **Ensuite :** factorise $(2x-1)^2 - 9$.

4.

Quel est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$? Vérifier que les deux points de la question 3 sont symétriques par rapport à ce centre.

INDICE

Outil : la même propriété donne le centre $\Omega(d, ad+b)$; un centre de symétrie est le milieu de deux points symétriques.