BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Asymptotes d'une fonction rationnelle, puis position

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 14}{2x - 10}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq 5$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x - 5}.$$

INDICE

Début : réduis le membre de droite au dénominateur $x - 5$, puis multiplie le numérateur et le dénominateur par 2.

CORRIGÉ

Numérateur. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}x + 1\right)(x - 5) - 2\\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + x - 5 - 2\\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 7.\end{aligned}$$

Réduction. Soit $x \neq 5$. On écrit le membre de droite sur le dénominateur $x - 5$, puis on multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x - 5}\\ &= \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 7}{x - 5}\\ &= \frac{x^2 - 3x - 14}{2x - 10}.\end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $f(x)$: pour tout $x \neq 5$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{x - 5}$.

2.

Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : les limites en 5 à droite et à gauche, puis la propriété de l'asymptote oblique.

CORRIGÉ

Asymptote verticale. Quand x tend vers 5, $\frac{1}{2}x+1$ tend vers $\frac{7}{2}$.

- Si $x \to 5^+$, $x-5$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $-\frac{2}{x-5}$ tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$.
- Si $x \to 5^-$, $x-5$ tend vers 0 par valeurs négatives, donc $-\frac{2}{x-5}$ tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x=5$ est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Asymptote oblique. Posons $\varphi(x) = -\frac{2}{x-5}$. Alors $f(x) = \frac{1}{2}x+1+\varphi(x)$, et $\varphi(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Le coefficient $a=\frac{1}{2}$ n'est pas nul : d'après la propriété de l'asymptote oblique (forme $ax+b+\varphi(x)$), la droite (D) : $y=\frac{1}{2}x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ a deux asymptotes : la droite d'équation $x=5$ et la droite (D).

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)$, puis la propriété de position relative.

CORRIGÉ

Soit $x \neq 5$. D'après la question 1 :

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{2}{x-5}.$$

Cette différence ne s'annule jamais. Elle est positive quand $x-5<0$ et négative quand $x-5>0$.

Conclusion. D'après la propriété de position relative, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty,5[$ et en dessous sur $]5,+\infty[$. La courbe et la droite n'ont aucun point commun.

Exercice 2

Point d'inflexion, centre de symétrie et tangente traversée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion $A(1, 5)$.

INDICE

Outil : le lien admis entre concavité et signe de f'', puis la propriété admise du point d'inflexion.

CORRIGÉ

Dérivées. f est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 12x, \\ f''(x) &= -12x + 12 \\ &= 12(1 - x). \end{aligned}$$

Concavité. $f''(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f''(x) < 0$ pour $x > 1$. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de f'', $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 1]$ et concave sur $[1, +\infty[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = -2 + 6 + 1 = 5$. D'après la propriété admise du point d'inflexion, $A(1, 5)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

2.

Montrer que A est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a = 1$ et $b = 5$; développe $f(2 - x)$.

CORRIGÉ

On applique la propriété du centre de symétrie avec $a = 1$ et $b = 5$.

Domaine. $D_f = \mathbb{R}$: pour tout réel x, $2 - x$ appartient à D_f.

Calcul de $f(2 - x)$. Soit x un réel. On utilise $(2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$ et $(2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2$:

$$\begin{aligned} &f(2 - x) \\ &= -2(8 - 12x + 6x^2 - x^3) \\ &\quad + 6(4 - 4x + x^2) + 1 \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 9. \end{aligned}$$

Somme.

$$\begin{aligned} &f(2 - x) + f(x) \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 9 \\ &\quad - 2x^3 + 6x^2 + 1 \\ &= 10 = 2 \times 5. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(2 - x) + f(x) = 2 \times 5$: d'après la propriété du centre de symétrie, $A(1, 5)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3.

Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

Outil : la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

CORRIGÉ

La tangente (T) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

On a $f'(1) = -6 + 12 = 6$ et $f(1) = 5$, donc :

$$(T) : y = 6(x - 1) + 5.$$

Conclusion. En développant, $(T) : y = 6x - 1$.

4.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - (6x - 1) = -2(x - 1)^3.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T).

INDICE

Début : développe $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. **Ensuite :** le signe de $(x-1)^3$ est celui de $x - 1$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit x un réel. D'une part :

$$\begin{aligned} &f(x) - (6x - 1) \\ &= -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

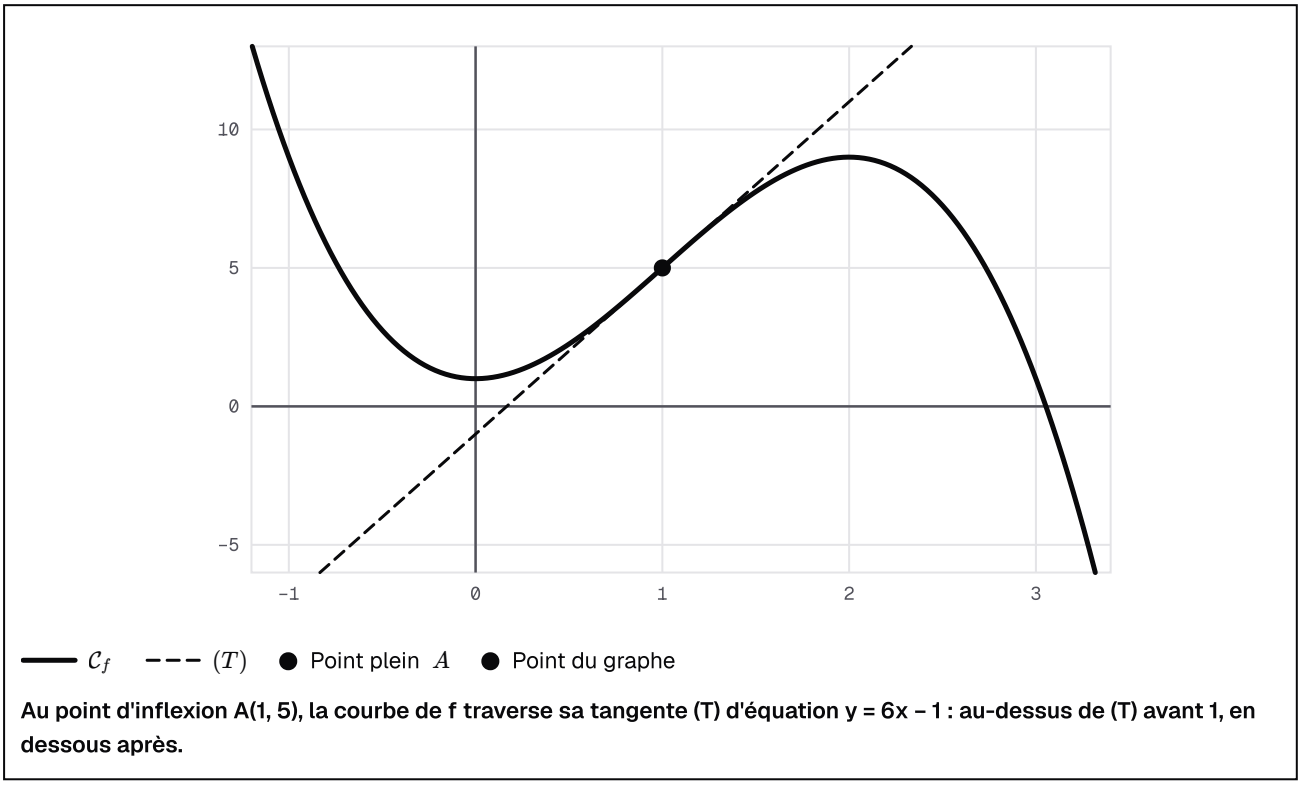
D'autre part, avec $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

$$\begin{aligned} &-2(x - 1)^3 \\ &= -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales.

Signe. $(x-1)^3$ a le signe de $x - 1$. Donc $-2(x-1)^3$ est positif pour $x < 1$, nul en 1 et négatif pour $x > 1$.

Conclusion. D'après la propriété de position relative, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) sur $]-\infty, 1[$ et en dessous sur $]1, +\infty[$. Au point d'inflexion A, la courbe traverse sa tangente.



Au point d'inflexion A(1, 5), la courbe de f traverse sa tangente (T) d'équation y = 6x − 1 : au-dessus de (T) avant 1, en dessous après.

Exercice 3

Étudier la moitié, déduire le reste

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ par :

$$f(x) = -2x + 13 - \frac{8}{x-6}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que le point $\Omega(6, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $2a - x = 12 - x$; vérifie d'abord le domaine.

CORRIGÉ

On applique la propriété du centre de symétrie avec $a = 6$ et $b = 1$, donc $2a - x = 12 - x$.

Domaine. Soit $x \neq 6$. L'égalité $12 - x = 6$ équivaut à $x = 6$, valeur exclue : $12 - x$ est dans le domaine.

Calcul de $f(12-x)$. On a $(12 - x) - 6 = -(x - 6)$, donc :

$$\begin{aligned} & f(12-x) \\ &= -24 + 2x + 13 + \frac{8}{x-6} \\ &= 2x - 11 + \frac{8}{x-6}. \end{aligned}$$

Somme. Dans $f(12-x) + f(x)$, les termes $\frac{8}{x-6}$ et $-\frac{8}{x-6}$ s'éliminent :

$$\begin{aligned} & f(12-x) + f(x) \\ &= 2x - 11 - 2x + 13 \\ &= 2 = 2 \times 1. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $\Omega(6, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2.

Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $]6,+\infty[$. Calculer les limites de f en 6 à droite et en $+\infty$.

INDICE

Outil : la symétrie de centre Ω échange les deux parties du domaine.

CORRIGÉ

Domaine d'étude. La symétrie de centre Ω envoie le point d'abscisse x sur le point d'abscisse $12-x$. Elle échange donc la partie de $\mathcal{C}_f$ située au-dessus de $]-\infty,6[$ et celle située au-dessus de $]6,+\infty[$. La courbe sur $]6,+\infty[$ suffit pour obtenir la courbe entière.

Limite en 6 à droite. Si $x \to 6^+$, $-2x+13$ tend vers 1, et $x-6$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $-\dfrac{8}{x-6}$ tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. $-2x+13$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{8}{x-6}$ tend vers 0 :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Conclusion. L'étude sur $]6,+\infty[$ suffit, et les deux limites demandées valent $-\infty$.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq 6$:

$$f'(x) = \frac{-2(x-4)(x-8)}{(x-6)^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f sur $]6, +\infty[$.

INDICE

Début : la dérivée de $-\dfrac{8}{x-6}$ est $\dfrac{8}{(x-6)^2}$. **Ensuite :** $(x-6)^2 - 4$ est une différence de deux carrés.

CORRIGÉ

Dérivée. La dérivée de $x \mapsto -\dfrac{8}{x-6}$ est $x \mapsto \dfrac{8}{(x-6)^2}$. Pour tout $x \neq 6$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + \frac{8}{(x-6)^2} \\ &= \frac{-2\left[(x-6)^2 - 4\right]}{(x-6)^2} \\ &= \frac{-2(x-4)(x-8)}{(x-6)^2}. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de la différence de deux carrés $(x-6)^2 - 4 = (x-8)(x-4)$.

Signe. Sur $]6, +\infty[$, $(x-6)^2 > 0$ et $x - 4 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $-(x-8)$. Elle est positive sur $]6, 8[$, nulle en 8, négative sur $]8, +\infty[$.

Valeur en 8**.** $f(8) = -16 + 13 - 4 = -7$.

x	6		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	croissante	-7	décroissante	$-\infty$

Conclusion. f est croissante sur $]6, 8]$ et décroissante sur $[8, +\infty[$; sur $]6, +\infty[$, son maximum vaut -7, atteint en 8.

4.

Sans nouveau calcul de dérivée, montrer que $f(4) = 9$, que f est décroissante sur $]-\infty, 4]$ et croissante sur $[4, 6[$, et que $f(4)$ est un minimum local de f sur $]-\infty, 6[$.

INDICE

Début : le symétrique du point $(8, -7)$ par rapport à $\Omega(6, 1)$ est $(12 - 8, 2 - (-7))$. **Ensuite :** une symétrie de centre Ω garde le sens de variation.

CORRIGÉ

Point symétrique. Le symétrique du point (x, y) par rapport à $\Omega(6, 1)$ est le point $(12 - x, 2 - y)$. Celui de $(8, -7)$ est donc $(4, 9)$. Comme Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, ce point est sur la courbe : $f(4) = 9$.

Sens de variation. La symétrie de centre Ω envoie l'abscisse x sur $12 - x$. Elle échange les morceaux de courbe au-dessus de $]6, 8]$ et de $[4, 6[$, ainsi que ceux au-dessus de $[8, +\infty[$ et de $]-\infty, 4]$. Une symétrie centrale garde le sens de variation. Comme f est croissante sur $]6, 8]$ et décroissante sur $[8, +\infty[$, elle est croissante sur $[4, 6[$ et décroissante sur $]-\infty, 4]$.

Conclusion. f décroît sur $]-\infty, 4]$ puis croît sur $[4, 6[$: sur $]-\infty, 6[$, f admet un minimum local égal à 9, atteint en 4.

Exercice 4

Étude partielle d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et préciser la nature des branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré, puis la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Limites. La limite d'un polynôme à l'infini est celle de son terme dominant, ici $2x^3$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Quotient. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 2x^2 - 3x - 12 + \frac{5}{x}.$$

Comme $\dfrac{5}{x}$ tend vers 0, ce quotient a la limite de $2x^2$, soit $+\infty$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. Par définition, $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. D'après la propriété des branches infinies d'un polynôme de degré 2 ou 3, elle n'a aucune asymptote.

2.

Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe du trinôme $6(x+1)(x-2)$, positif à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Dérivée. f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x^2 - x - 2) \\ &= 6(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines -1 et 2, et son coefficient 6 est positif : $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]2, +\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1, 2[$.

Valeurs. $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$ et $f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	croissante	12	décroissante	-15	croissante	$+\infty$

3.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer son point d'inflexion I.

INDICE

Outil : le signe de $f''(x) = 12x - 6$ et les résultats admis sur la concavité.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. f est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$: elle est négative pour $x < \dfrac{1}{2}$ et positive pour $x > \dfrac{1}{2}$.

Concavité. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de f'', $\mathcal{C}_f$ est concave sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en $\dfrac{1}{2}$ en changeant de signe. De plus :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 5 \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété admise du point d'inflexion, $\mathcal{C}_f$ admet le point d'inflexion $I\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

4.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point I.

INDICE

Outil : $y = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, avec la forme factorisée de f'.

CORRIGÉ

Nombre dérivé. Avec la forme factorisée de f' :

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 6 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Équation. La tangente en I a pour équation $y = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{27}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{27}{2}x + \frac{27}{4} - \frac{6}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en I a pour équation $y = -\dfrac{27}{2}x + \dfrac{21}{4}$.

Exercice 5

Le coût moyen d'une imprimerie

Une imprimerie fictive produit q milliers de cahiers par jour. Son coût total, en milliers de dirhams, est $C(q) = 2q^2 + 5q + 18$. Le coût moyen est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Les données sont fictives. On étudie la fonction C_M sur $]0, +\infty[$; sa courbe est notée Γ.

1.

Montrer que, pour tout $q > 0$, $C_M(q) = 2q + 5 + \dfrac{18}{q}$. Donner les asymptotes de Γ.

INDICE

Outil : la limite en 0 à droite, puis la propriété de l'asymptote oblique avec $\varphi(q) = \dfrac{18}{q}$.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $q > 0$. On divise chaque terme de $C(q)$ par q :

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{2q^2 + 5q + 18}{q} \\ &= 2q + 5 + \frac{18}{q}. \end{aligned}$$

En 0. Si $q \to 0^+$, $\dfrac{18}{q}$ tend vers $+\infty$ et $2q + 5$ tend vers 5 : $\lim\limits_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty$. L'axe des ordonnées, d'équation $q = 0$, est asymptote verticale à Γ.

En $+\infty$. Posons $\varphi(q) = \dfrac{18}{q}$, qui tend vers 0 en $+\infty$. On a $C_M(q) = 2q + 5 + \varphi(q)$, avec un coefficient $a = 2$ non nul. D'après la propriété de l'asymptote oblique, la droite $(D) : y = 2q + 5$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

Conclusion. Γ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale et (D) pour asymptote oblique en $+\infty$.

2.

Étudier la position de Γ par rapport à (D). Interpréter le terme $\dfrac{18}{q}$.

INDICE

Outil : le signe de $C_M(q) - (2q + 5)$ sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Position. Pour tout $q > 0$:

$$C_M(q) - (2q + 5) = \frac{18}{q} > 0.$$

D'après la propriété de position relative, Γ est au-dessus de (D) sur $]0, +\infty[$.

Interprétation. Le nombre 18 est le coût fixe, en milliers de dirhams. Réparti sur q milliers de cahiers, il pèse $\dfrac{18}{q}$ dans le coût moyen, et ce poids diminue quand la production augmente.

3.

Montrer que, pour tout $q > 0$:

$$C'_M(q) = \frac{2(q-3)(q+3)}{q^2}.$$

En déduire la production qui rend le coût moyen minimal, et ce coût.

INDICE

Début : la dérivée de $\frac{18}{q}$ est $-\frac{18}{q^2}$. **Ensuite :** sur $]0, +\infty[$, $q + 3 > 0$.

CORRIGÉ

Dérivée. La dérivée de $q \mapsto \frac{18}{q}$ est $q \mapsto -\frac{18}{q^2}$. Pour tout $q > 0$:

$$\begin{aligned} C'_M(q) &= 2 - \frac{18}{q^2} \\ &= \frac{2(q^2 - 9)}{q^2} \\ &= \frac{2(q-3)(q+3)}{q^2}. \end{aligned}$$

Variations. Sur $]0, +\infty[$, $q^2 > 0$ et $q + 3 > 0$: $C'_M(q)$ a le signe de $q - 3$. Donc C_M est décroissante sur $]0, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$. Elle admet un minimum en 3 :

$$C_M(3) = 6 + 5 + 6 = 17.$$

Interprétation. Avec une production de 3 milliers de cahiers par jour, le coût moyen est minimal : 17 milliers de dirhams par millier de cahiers, soit 17 dirhams par cahier.

Exercice 6

Combien de solutions ? Lire, puis calculer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On admet que la droite d'équation $x = 3$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$, avec $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq 3$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{2(x-3)^2},$$

puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$; réduis au même dénominateur et factorise $(x-3)^2 - 4$.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour tout $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-3)^2 - 4}{2(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x-5)}{2(x-3)^2}. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de la différence de deux carrés $(x-3)^2 - 4 = (x-5)(x-1)$.

Signe. Le dénominateur $2(x-3)^2$ est positif : $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x-1)(x-5)$, positif à l'extérieur de 1 et 5, négatif entre eux, la valeur 3 étant exclue.

Valeurs. $f(1) = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2}$ et $f(5) = \frac{5}{2} + 1 + 1 = \frac{9}{2}$. En $-\infty$ et en $+\infty$, $\frac{2}{x-3}$ tend vers 0, donc $f(x)$ a la limite de $\frac{1}{2}x$.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	croissante	$\frac{1}{2}$	décroissante	$-\infty \,\|\| \, +\infty$	décroissante	$\frac{9}{2}$	croissante	$+\infty$

La double barre $\|\|$ marque la valeur interdite 3.

Conclusion. f est croissante sur $]-\infty, 1]$, décroissante sur $[1, 3[$ et sur $]3, 5]$, croissante sur $[5, +\infty[$.

2.

Tracer les asymptotes et $\mathcal{C}_f$. Lire sur le tracé le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ pour $k = 0$, $k = 2$ et $k = 6$.

INDICE

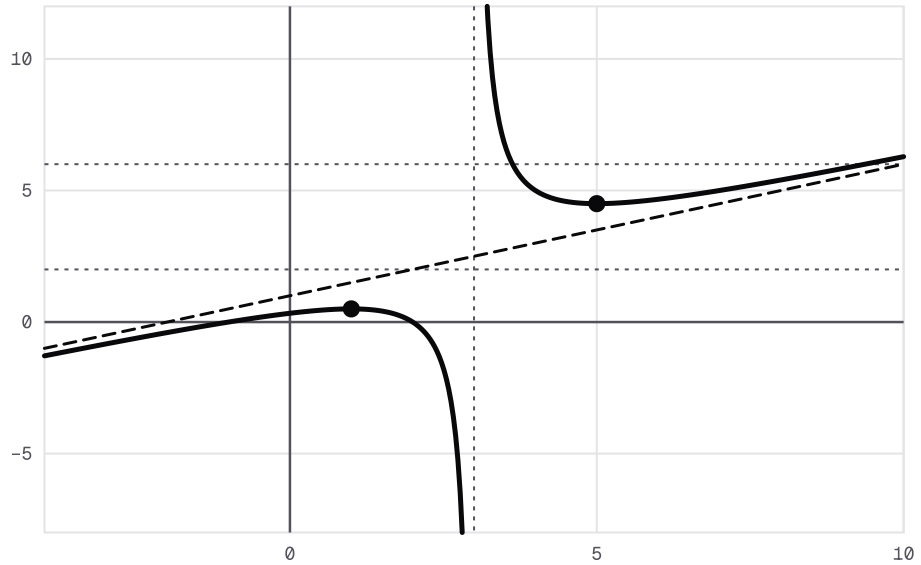
Outil : les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = k$.

CORRIGÉ

Tracé. On trace d'abord les deux asymptotes. La branche de gauche monte jusqu'au point $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, puis redescend vers $-\infty$ le long de la droite d'équation $x = 3$. La branche de droite descend de $+\infty$ jusqu'au point $\left(5, \frac{9}{2}\right)$, puis remonte.

Lectures.

- La droite d'équation $y = 0$ coupe deux fois la branche de gauche : deux solutions.
- La droite d'équation $y = 2$ passe entre les deux branches sans les couper : aucune solution.
- La droite d'équation $y = 6$ coupe deux fois la branche de droite : deux solutions.



La courbe de f, ses asymptotes x = 3 et y = x/2 + 1, et les droites y = 2 et y = 6 : la première passe entre les branches, la seconde coupe deux fois la branche de droite.

3.

Montrer que, pour $x \neq 3$, l'équation $f(x) = k$ équivaut à :

$$x^2 - (1+2k)x + 6k - 2 = 0.$$

Confirmer les trois lectures de la question 2.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $2(x-3)$, non nul. **Ensuite :** calcule le discriminant pour chaque valeur de k.

CORRIGÉ

Équivalence. Soit $x \neq 3$. Le réel $2(x-3)$ n'est pas nul : multiplier les deux membres de $f(x) = k$ par $2(x-3)$ donne une équation équivalente. Comme $\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \times 2(x-3) = (x+2)(x-3)$, l'équation $f(x) = k$ équivaut à $(x+2)(x-3) + 4 = 2k(x-3)$, soit $x^2 - x - 2 - 2kx + 6k = 0$, c'est-à-dire :

$$x^2 - (1+2k)x + 6k - 2 = 0.$$

Le réel 3. En $x = 3$, le membre de gauche vaut $9 - 3 - 6k + 6k - 2 = 4 \neq 0$: le réel 3 n'est jamais solution. Les solutions de cette équation sont donc exactement celles de $f(x) = k$.

Discriminant.

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+2k)^2 - 4(6k-2) \\ &= 4k^2 - 20k + 9. \end{aligned}$$

- Pour $k = 0$: $\Delta = 9 > 0$, deux solutions. L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ a pour solutions -1 et 2.
- Pour $k = 2$: $\Delta = -15 < 0$, aucune solution.
- Pour $k = 6$: $\Delta = 33 > 0$, deux solutions.

Conclusion. Le calcul confirme les trois lectures : deux solutions pour $k = 0$, aucune pour $k = 2$, deux pour $k = 6$.

4.

Sans calcul, expliquer par une lecture du tracé pourquoi l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution. Confirmer avec le discriminant de la question 3.

INDICE

Outil : compare 1 à l'ordonnée du sommet de la branche de gauche, puis à celle du creux de la branche de droite.

CORRIGÉ

Lecture. Sur $]-\infty, 3[$, la courbe ne dépasse pas son point le plus haut $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, et $1 > \dfrac{1}{2}$. Sur $]3, +\infty[$, elle ne descend pas sous son point le plus bas $\left(5, \dfrac{9}{2}\right)$, et $1 < \dfrac{9}{2}$. La droite d'équation $y = 1$ passe donc entre les deux branches sans les rencontrer.

Calcul. Pour $k = 1$, le discriminant de la question 3 vaut $\Delta = 4 - 20 + 9 = -7 < 0$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution : le tracé et le calcul concordent.

Exercice 7

Retrouver une fonction à partir de ses asymptotes

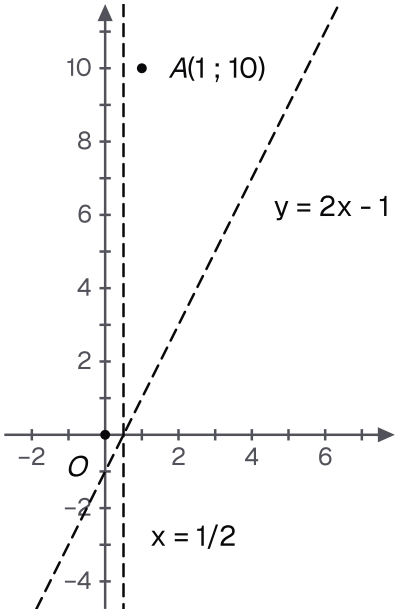
Une fonction f a pour courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère. On sait que :

- la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et la droite d'équation $y = 2x - 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$;
- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(1, 10)$.

On admet que, pour tout $x \neq d$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - d},$$

avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.



Les données : la droite d'équation x = 1/2, la droite d'équation y = 2x – 1, toutes deux asymptotes de la courbe, et le point A(1, 10) de la courbe.

1.

Déterminer a, b et d.

INDICE

Outil : la propriété des fonctions de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x - d}$ donne leurs deux asymptotes.

CORRIGÉ

D'après la propriété des fonctions de la forme $x \mapsto ax + b + \dfrac{c}{x - d}$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, la courbe a deux asymptotes :

- la droite d'équation $x = d$, asymptote verticale ;
- la droite d'équation $y = ax + b$, asymptote oblique.

Conclusion. Par comparaison avec les asymptotes données, $d = \dfrac{1}{2}$, $a = 2$ et $b = -1$.

2.

Utiliser le point A pour trouver c. Vérifier que, pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{9}{2x-1}.$$

INDICE

Début : écris $f(1) = 10$. **Ensuite :** $\dfrac{c}{x - \frac{1}{2}} = \dfrac{2c}{2x-1}$.

CORRIGÉ

Valeur de c. D'après la question 1, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{c}{x - \frac{1}{2}}$. Le point $A(1, 10)$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $f(1) = 10$. Or :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 1 + \frac{c}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2c. \end{aligned}$$

L'égalité $1 + 2c = 10$ donne $c = \dfrac{9}{2}$.

Nouvelle écriture. Soit $x \neq \dfrac{1}{2}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 :

$$\frac{\frac{9}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{9}{2x-1}.$$

Conclusion. Pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{9}{2x-1}$.

3.

Montrer que, pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x+1)}{(2x-1)^2}.$$

En déduire les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.

INDICE

Début : la dérivée de $\dfrac{9}{2x-1}$ est $-\dfrac{18}{(2x-1)^2}$. **Ensuite :** factorise $(2x-1)^2 - 9$.

CORRIGÉ

Dérivée. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{9}{2x-1}$ est $x \mapsto -\dfrac{18}{(2x-1)^2}$. Pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{18}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2\left[(2x-1)^2 - 9\right]}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2(2x-4)(2x+2)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{8(x-2)(x+1)}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

La troisième ligne vient de $(2x-1)^2 - 9 = (2x-4)(2x+2)$, la quatrième de $2x-4 = 2(x-2)$ et $2x+2 = 2(x+1)$.

Tangentes horizontales. La tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$, c'est-à-dire en 2 et en -1. On calcule $f(2) = 3 + 3 = 6$ et $f(-1) = -3 - 3 = -6$.

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale aux points $(2, 6)$ et $(-1, -6)$.

4.

Quel est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$? Vérifier que les deux points de la question 3 sont symétriques par rapport à ce centre.

INDICE

Outil : la même propriété donne le centre $\Omega(d, ad+b)$; un centre de symétrie est le milieu de deux points symétriques.

CORRIGÉ

Centre. D'après la propriété des fonctions de la forme $x \mapsto ax+b+\dfrac{c}{x-d}$, le centre de symétrie de la courbe est le point $\Omega(d, ad+b)$, intersection des deux asymptotes :

$$\Omega\left(\frac{1}{2}, 2\times\frac{1}{2}-1\right) = \Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Milieu. Le milieu des points $(2,6)$ et $(-1,-6)$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2-1}{2}, \frac{6-6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Conclusion. Ce milieu est Ω : les deux points de la question 3 sont symétriques par rapport à Ω.