BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	8

Exercice 1

Une asymptote verticale et une asymptote horizontale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{4x - 7}{x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : quand x tend vers 1, le numérateur tend vers -3 ; regarde le signe de $x - 1$.

2.

Vérifier que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = 4 - \frac{3}{x - 1}.$$

INDICE

Début : réduis $4 - \dfrac{3}{x - 1}$ au même dénominateur.

3.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis une seconde asymptote de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la limite de $\dfrac{3}{x - 1}$ à l'infini.

Exercice 2

Écrire la fonction pour trouver son asymptote oblique

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq -2$:

$$g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

INDICE

Début : développe $(2x - 1)(x + 2)$, puis ajoute 1.

2.

Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique ; le reste $\dfrac{1}{x + 2}$ doit tendre vers 0.

3.

Justifier que $\mathcal{C}_g$ admet aussi une asymptote verticale.

INDICE

Outil : les limites à droite et à gauche en -2, avec l'écriture de la question 1.

Exercice 3

Les branches infinies d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : quand x devient très grand, seul le terme $2x^3$ décide de la limite.

2.

Pour $x \neq 0$, écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme d'une somme, puis calculer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $f(x)$ par x.

3.

Un camarade affirme que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$. Que lui répondre ?

INDICE

Outil : la définition des branches paraboliques, avec les limites des questions 1 et 2.

Exercice 4

Une parabole et une droite : qui est au-dessus ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On note (D) la droite d'équation $y = x + 5$.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) - (x+5) = 2(x+1)(x-3).$$

INDICE

Début : développe le membre de droite et compare.

2.

Dresser le tableau de signes de $f(x) - (x+5)$.

INDICE

Outil : hors de l'intervalle formé par les racines, le trinôme prend le signe de 2 ; entre elles, le signe contraire.

3.

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D), et les coordonnées des points communs.

INDICE

Outil : la propriété de position relative d'une courbe et d'une droite.

Exercice 5

Concavité et point d'inflexion d'un polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$, puis la dérivée seconde $f''(x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de x^n est nx^{n-1} ; f'' est la dérivée de f'.

2.

Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire les intervalles où $\mathcal{C}_f$ est convexe et ceux où elle est concave.

INDICE

Outil : le lien admis entre concavité et signe de f''.

3.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Outil : la propriété admise du point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe.

Exercice 6

Un axe de symétrie, domaine privé d'un point

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2 - \frac{3}{(x-1)^2}.$$

1.

Donner le domaine D_f. Montrer que, pour tout x de D_f, le réel $2 - x$ appartient à D_f.

INDICE

Début : $f(x)$ existe dès que $(x-1)^2 \neq 0$.

2.

Calculer $f(2 - x)$ pour x dans D_f et le comparer à $f(x)$.

INDICE

Début : $(2 - x) - 1 = 1 - x$, et un carré ne change pas quand on change le signe.

3.

Conclure sur la symétrie de $\mathcal{C}_f$, puis indiquer sur quel ensemble il suffit d'étudier f.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $a = 1$, dans un repère orthogonal.

Exercice 7

Le centre de symétrie d'une courbe à deux asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 4}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq -4$:

$$f(x) = 3 - \frac{13}{x + 4}.$$

INDICE

Début : écris $3x - 1$ à l'aide de $x + 4$.

2.

Montrer que, pour tout $x \neq -4$, le réel $-8 - x$ est différent de -4.

INDICE

Début : résous $-8 - x = -4$.

3.

Calculer $f(-8 - x) + f(x)$. Conclure.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a = -4$, donc $2a - x = -8 - x$.

Exercice 8

Lire des solutions sur un graphique, puis les vérifier

Soit f la fonction définie sur $[-3, 5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.$$

On note (D) la droite d'équation $y = x + 1$. On travaille dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1.

Calculer $f(x)$ pour chaque entier x de -3 à 5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et (D).

INDICE

Début : commence par $f(0)$ et $f(1)$, puis remarque que les valeurs se répètent de part et d'autre de $x = 1$.

2.

Lire sur le graphique les solutions de $f(x) = 0$, puis les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et (D).

INDICE

Outil : les solutions de $f(x) = c$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite d'équation $y = c$.

3.

Lire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq x + 1$, puis vérifier par le calcul.

INDICE

Début : repère où $\mathcal{C}_f$ est sous (D). **Contrôle :** factorise $f(x) - (x + 1)$.