BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	8

Exercice 1

Une asymptote verticale et une asymptote horizontale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{4x - 7}{x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : quand x tend vers 1, le numérateur tend vers -3 ; regarde le signe de $x - 1$.

CORRIGÉ

Numérateur. Quand x tend vers 1, $4x - 7$ tend vers -3.

À droite de 1. Si $x \to 1^+$, le dénominateur $x - 1$ tend vers 0 par valeurs positives. Un nombre proche de -3 divisé par un petit nombre positif devient très grand en valeur absolue et négatif :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty.$$

À gauche de 1. Si $x \to 1^-$, le dénominateur tend vers 0 par valeurs négatives : le quotient devient très grand et positif.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. Une limite infinie en 1 suffit : par définition d'une asymptote verticale, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Vérifier que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = 4 - \frac{3}{x - 1}.$$

INDICE

Début : réduis $4 - \dfrac{3}{x - 1}$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Soit $x \neq 1$. On réduit le membre de droite au dénominateur $x - 1$:

$$\begin{aligned} 4 - \frac{3}{x - 1} &= \frac{4(x - 1) - 3}{x - 1} \\ &= \frac{4x - 7}{x - 1}. \end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $f(x)$: pour tout $x \neq 1$, $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x - 1}$.

3.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis une seconde asymptote de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la limite de $\dfrac{3}{x-1}$ à l'infini.

CORRIGÉ

Limites. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, le dénominateur $x-1$ devient infini, donc $\dfrac{3}{x-1}$ tend vers 0. Avec l'écriture de la question 2, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Conclusion. La limite de f à l'infini est le réel 4. Par définition d'une asymptote horizontale, la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2

Écrire la fonction pour trouver son asymptote oblique

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq -2$:

$$g(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

INDICE

Début : développe $(2x - 1)(x + 2)$, puis ajoute 1.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(2x - 1)(x + 2) + 1\\ &= 2x^2 + 4x - x - 2 + 1\\ &= 2x^2 + 3x - 1.\end{aligned}$$

Division. Soit $x \neq -2$. On divise les deux membres par $x + 2$, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{(2x - 1)(x + 2) + 1}{x + 2}\\ &= 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \neq -2$, $g(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x + 2}$.

2.

Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la propriété de l'asymptote oblique ; le reste $\dfrac{1}{x + 2}$ doit tendre vers 0.

CORRIGÉ

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ pour $x \neq -2$. D'après la question 1, $g(x) = 2x - 1 + \varphi(x)$, avec un coefficient de x égal à 2, non nul.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $x + 2$ devient infini, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

Conclusion. D'après la propriété de l'asymptote oblique (forme $ax + b + \varphi(x)$), la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Justifier que $\mathcal{C}_g$ admet aussi une asymptote verticale.

INDICE

Outil : les limites à droite et à gauche en -2, avec l'écriture de la question 1.

CORRIGÉ

On utilise l'écriture de la question 1. Quand x tend vers -2, $2x-1$ tend vers -5.

- Si $x \to -2^+$, $x+2$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $\dfrac{1}{x+2}$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$.
- Si $x \to -2^-$, $x+2$ tend vers 0 par valeurs négatives, donc $\dfrac{1}{x+2}$ tend vers $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$.

Conclusion. Les limites en -2 sont infinies : par définition, la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3

Les branches infinies d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : quand x devient très grand, seul le terme $2x^3$ décide de la limite.

CORRIGÉ

Une fonction polynôme a, en $+\infty$ et en $-\infty$, la même limite que son terme de plus haut degré. Ici, ce terme est $2x^3$, avec $2 > 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.

Pour $x \neq 0$, écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme d'une somme, puis calculer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $f(x)$ par x.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $x \neq 0$. On divise chaque terme de $f(x)$ par x :

$$\frac{f(x)}{x} = 2x^2 - 5x + \frac{4}{x}.$$

Limites. Le polynôme $2x^2 - 5x$ a la limite de son terme $2x^2$, soit $+\infty$, en $+\infty$ comme en $-\infty$. Le terme $\dfrac{4}{x}$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

3.

Un camarade affirme que $\mathcal{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$. Que lui répondre ?

INDICE

Outil : la définition des branches paraboliques, avec les limites des questions 1 et 2.

CORRIGÉ

Nature de la branche. En $+\infty$, $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ ont toutes deux une limite infinie (questions 1 et 2). Par définition, $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Il en va de même en $-\infty$.

Pas d'asymptote. D'après la propriété des branches infinies des polynômes de degré 2 ou 3, $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote.

Conclusion. Le camarade se trompe : la courbe part vers l'infini sans s'approcher d'aucune droite. Une limite infinie ne suffit pas pour avoir une asymptote oblique.

Exercice 4

Une parabole et une droite : qui est au-dessus ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On note (D) la droite d'équation $y = x + 5$.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - (x+5) \\ &= 2(x+1)(x-3). \end{aligned}$$

INDICE

Début : développe le membre de droite et compare.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On développe chacun des deux membres.

Membre de gauche.

$$\begin{aligned} &f(x) - (x+5) \\ &= 2x^2 - 3x - 1 - x - 5 \\ &= 2x^2 - 4x - 6. \end{aligned}$$

Membre de droite.

$$\begin{aligned} &2(x+1)(x-3) \\ &= 2(x^2 - 2x - 3) \\ &= 2x^2 - 4x - 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux membres sont égaux : pour tout réel x, $f(x) - (x+5) = 2(x+1)(x-3)$.

2.

Dresser le tableau de signes de $f(x) - (x+5)$.

INDICE

Outil : hors de l'intervalle formé par les racines, le trinôme prend le signe de 2 ; entre elles, le signe contraire.

CORRIGÉ

Le trinôme $2(x+1)(x-3)$ a deux racines, -1 et 3, et son coefficient de x^2 vaut 2, positif. Il est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D), et les coordonnées des points communs.

INDICE

Outil : la propriété de position relative d'une courbe et d'une droite.

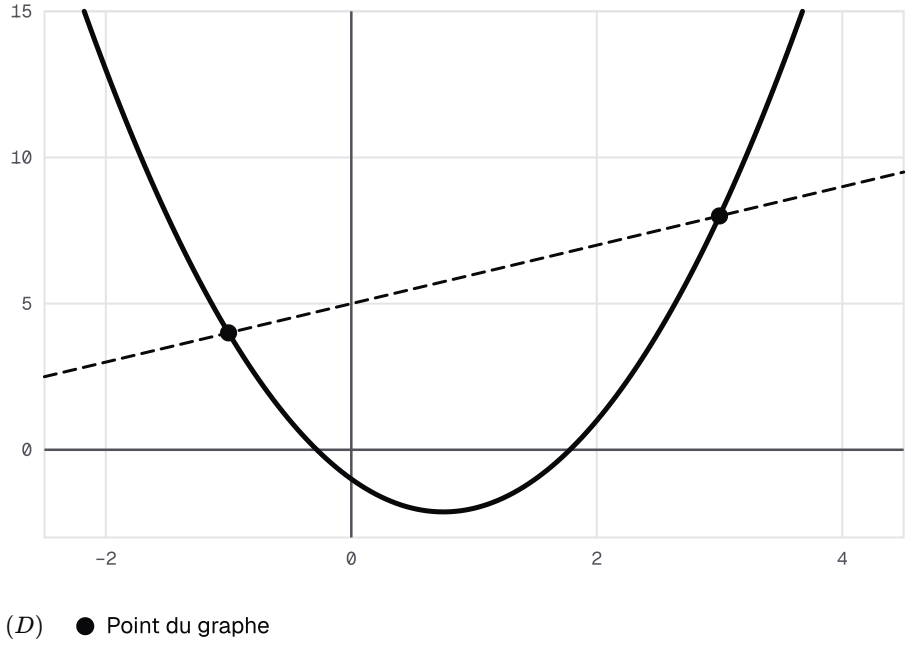
CORRIGÉ

Position. D'après la propriété de position relative, la courbe est au-dessus de la droite là où la différence $f(x) - (x+5)$ est positive. Avec le tableau de la question 2 :

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$;
- $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (D) sur $]-1, 3[$.

Points communs. La différence s'annule en -1 et en 3. Sur (D), $-1+5=4$ et $3+5=8$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ et (D) ont deux points communs : $(-1, 4)$ et $(3, 8)$.



La parabole de f(x) = 2x² − 3x − 1 et la droite (D) d'équation y = x + 5 se coupent en (−1, 4) et (3, 8) ; entre ces points, la courbe est sous (D).

Exercice 5

Concavité et point d'inflexion d'un polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$, puis la dérivée seconde $f''(x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de x^n est nx^{n-1} ; f'' est la dérivée de f'.

CORRIGÉ

f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec la dérivée de $x \mapsto x^n$, pour tout réel x :

$$f'(x) = 12x^2 - 12x.$$

f' est encore un polynôme. En la dérivant, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 24x - 12 \\ &= 12(2x - 1). \end{aligned}$$

2.

Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire les intervalles où $\mathcal{C}_f$ est convexe et ceux où elle est concave.

INDICE

Outil : le lien admis entre concavité et signe de f''.

CORRIGÉ

Hypothèse. f est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Signe de $f''(x)$. $f''(x) = 12(2x - 1)$ a le signe de $2x - 1$: négatif pour $x < \dfrac{1}{2}$, nul en $\dfrac{1}{2}$, positif pour $x > \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Conclusion. D'après le lien admis entre la concavité et le signe de f'', $\mathcal{C}_f$ est concave sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

3.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Outil : la propriété admise du point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe.

CORRIGÉ

Abscisse. D'après la question 2, f'' s'annule en $\dfrac{1}{2}$ en changeant de signe. D'après la propriété admise du point d'inflexion, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est un point d'inflexion.

Ordonnée.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \times \frac{1}{8} - 6 \times \frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion, $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Exercice 6

Un axe de symétrie, domaine privé d'un point

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2 - \frac{3}{(x-1)^2}.$$

1.

Donner le domaine D_f. Montrer que, pour tout x de D_f, le réel $2 - x$ appartient à D_f.

INDICE

Début : $f(x)$ existe dès que $(x-1)^2 \neq 0$.

CORRIGÉ

Domaine. $f(x)$ existe si et seulement si $(x-1)^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Le réel $2 - x$. Soit x dans D_f. L'égalité $2 - x = 1$ n'a lieu que pour $x = 1$, valeur exclue. Donc $2 - x \neq 1$.

Conclusion. Pour tout x de D_f, le réel $2 - x$ appartient à D_f.

2.

Calculer $f(2 - x)$ pour x dans D_f et le comparer à $f(x)$.

INDICE

Début : $(2 - x) - 1 = 1 - x$, et un carré ne change pas quand on change le signe.

CORRIGÉ

Soit x dans D_f. On a $(2 - x) - 1 = 1 - x$, donc $f(2 - x) = 2 - \dfrac{3}{(1-x)^2}$.

Un nombre et son opposé ont le même carré : $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= 2 - \frac{3}{(x-1)^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de D_f, $f(2 - x) = f(x)$.

3.

Conclure sur la symétrie de $\mathcal{C}_f$, puis indiquer sur quel ensemble il suffit d'étudier f.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $a = 1$, dans un repère orthogonal.

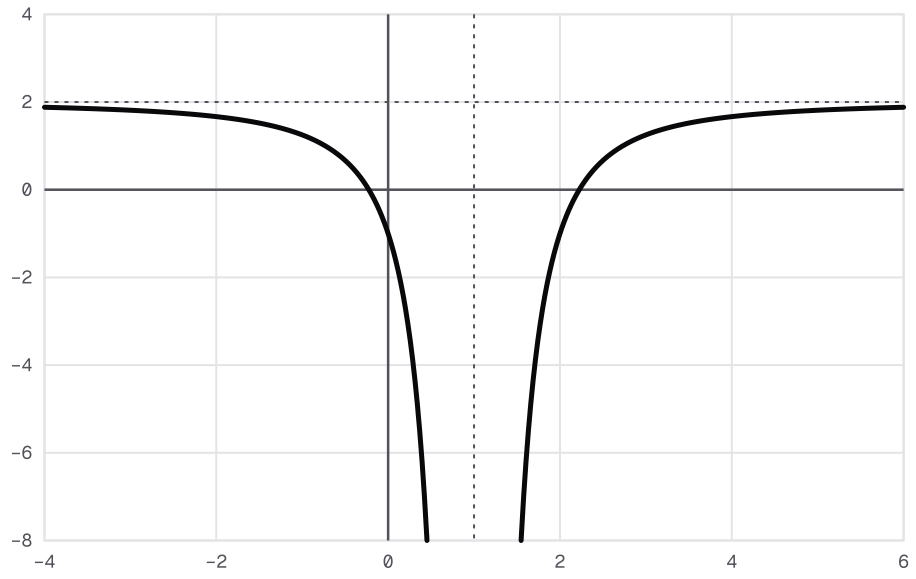
CORRIGÉ

Symétrie. Le repère est orthogonal. D'après la question 1, $2 - x$ est dans D_f pour tout x de D_f, et d'après la question 2, $f(2 - x) = f(x)$. Ce sont les deux conditions de la propriété de l'axe de symétrie, avec $a = 1$: $\mathcal{C}_f$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.

Domaine d'étude. La partie de la courbe située à gauche de l'axe est l'image, par cette symétrie, de la partie située à droite. Il suffit donc d'étudier f sur :

$$D_f \cap [1, +\infty[=]1, +\infty[.$$

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$, et l'étude de f sur $]1, +\infty[$ suffit.



La courbe de f(x) = 2 − 3/(x − 1)² a deux morceaux, reflets l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation x = 1, qui est aussi une asymptote.

Exercice 7

Le centre de symétrie d'une courbe à deux asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 4}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq -4$:

$$f(x) = 3 - \frac{13}{x + 4}.$$

INDICE

Début : écris $3x - 1$ à l'aide de $x + 4$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $3x - 1 = 3(x + 4) - 13$.

Soit $x \neq -4$. On divise par $x + 4$, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3(x + 4) - 13}{x + 4} \\ &= 3 - \frac{13}{x + 4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \neq -4$, $f(x) = 3 - \dfrac{13}{x + 4}$.

2.

Montrer que, pour tout $x \neq -4$, le réel $-8 - x$ est différent de -4.

INDICE

Début : résous $-8 - x = -4$.

CORRIGÉ

Soit $x \neq -4$. L'égalité $-8 - x = -4$ équivaut à $x = -4$, valeur exclue.

Conclusion. $-8 - x \neq -4$: le réel $-8 - x$ appartient au domaine de f.

3.

Calculer $f(-8-x)+f(x)$. Conclure.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a=-4$, donc $2a-x=-8-x$.

CORRIGÉ

Calcul de $f(-8-x)$. Soit $x \neq -4$. On a $(-8-x)+4=-(x+4)$. Avec la question 1 :

$$\begin{aligned} f(-8-x) &= 3-\frac{13}{-(x+4)} \\ &= 3+\frac{13}{x+4}. \end{aligned}$$

Somme.

$$\begin{aligned} &f(-8-x)+f(x) \\ &= 3+\frac{13}{x+4}+3-\frac{13}{x+4} \\ &= 6 = 2\times 3. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la question 2, $-8-x$ est dans le domaine de f, et $f(-8-x)+f(x)=2\times 3$. D'après la propriété du centre de symétrie, avec $a=-4$ et $b=3$, le point $\Omega(-4,3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8

Lire des solutions sur un graphique, puis les vérifier

Soit f la fonction définie sur $[-3, 5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.$$

On note (D) la droite d'équation $y = x + 1$. On travaille dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1.

Calculer $f(x)$ pour chaque entier x de -3 à 5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et (D).

INDICE

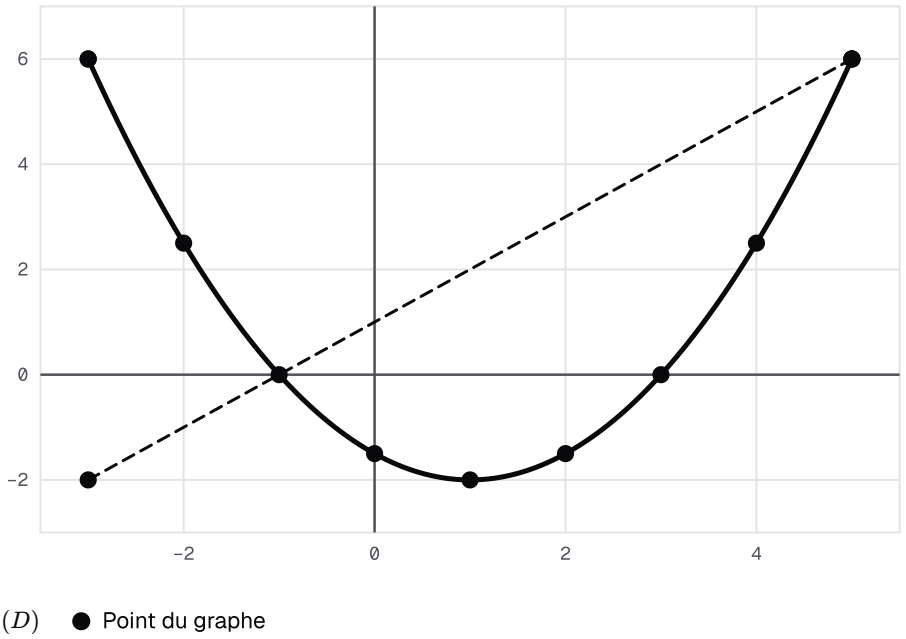
Début : commence par $f(0)$ et $f(1)$, puis remarque que les valeurs se répètent de part et d'autre de $x = 1$.

CORRIGÉ

Tableau de valeurs.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	$2{,}5$	0	$-1{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6

Tracé. On place ces points et on les relie par une parabole tournée vers le haut, de sommet $(1, -2)$. La droite (D) passe par les points $(-1, 0)$ et $(5, 6)$.



Tracé demandé : la parabole de f sur [–3, 5], passant par les neuf points du tableau, et la droite (D) d'équation y = x + 1.

2.

Lire sur le graphique les solutions de $f(x) = 0$, puis les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et (D).

INDICE

Outil : les solutions de $f(x) = c$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite d'équation $y = c$.

CORRIGÉ

- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, -1 et 3.
- $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent aux points $(-1, 0)$ et $(5, 6)$: les solutions de $f(x) - (x+1) = 0$ sont -1 et 5.

3.

Lire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq x + 1$, puis vérifier par le calcul.

INDICE

Début : repère où $\mathcal{C}_f$ est sous (D). **Contrôle :** factorise $f(x) - (x+1)$.

CORRIGÉ

Lecture. Sur $[-3, 5]$, $\mathcal{C}_f$ est sous (D), ou la rencontre, pour x compris entre -1 et 5. On lit l'ensemble des solutions $[-1, 5]$.

Calcul. Pour tout x de $[-3, 5]$:

$$\begin{aligned} & f(x) - (x+1) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+1)(x-5). \end{aligned}$$

Ce trinôme, de coefficient $\frac{1}{2}$ positif, est négatif ou nul entre ses racines -1 et 5.

Conclusion. Sur $[-3, 5]$, l'inéquation $f(x) \leq x + 1$ a pour ensemble de solutions $[-1, 5]$: le calcul confirme la lecture.