BURHAN

Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Étude et représentation des fonctions	Semestre 2

Une courbe qui longe une droite

Un atelier fictif fabrique des chaises. Pour q centaines de chaises, le coût total, en milliers de dirhams, est $C(q) = q^2 - q + 7$.

Chaque série commence par deux centaines de chaises d'essai, qui ne sont pas vendues. Pour $q > 2$, le coût par centaine vendue est donc :

$$g(q) = \frac{C(q)}{q-2}.$$

Un calcul fait plus loin donne, pour $q > 2$:

$$g(q) = q + 1 + \frac{9}{q-2}.$$

Par exemple, $g(5) = 9$ et $g(32) = 33 + \frac{9}{30}$.

Devine : Une prédiction

Quand q devient très grand, comment se comporte la courbe de g ?

A. Elle se rapproche d'une droite oblique.

Juste.

Juste : l'écart avec $q + 1$ devient minuscule.

B. Elle se rapproche d'une droite horizontale.

Faux.

$g(q)$ dépasse $q + 1$: il grandit sans fin, aucune droite horizontale ne convient.

C. Elle monte de plus en plus raide.

Faux.

La pente ne grandit pas sans fin : la courbe finit par suivre une droite.

D. Elle redescend vers l'axe des abscisses.

Faux.

$g(q)$ dépasse $q + 1$, qui grandit : la courbe ne redescend pas.

Correction

Le terme $\frac{9}{q-2}$ devient minuscule. Pour $q = 302$, il vaut :

$$\frac{9}{300} = \frac{3}{100}.$$

Le coût $g(q)$ est alors presque égal à $q + 1$: le point de la courbe est tout près de la droite qui représente $q \mapsto q + 1$.

Cette droite oblique monte sans fin. On l'appellera une asymptote oblique.

Une courbe qui longe une droite, une courbe qui s'envole sans droite, une courbe qui change de courbure : tu vas apprendre à les reconnaître par le calcul, avec tes acquis sur les limites et les dérivées.

À la fin, tu sauras étudier une fonction en entier, tracer sa courbe et lire sur elle les solutions d'une équation.

Asymptotes verticales et horizontales

Près d'une valeur interdite

En clair. Reprends le coût par centaine vendue :

$$g(q) = q + 1 + \frac{9}{q - 2}.$$

Pour $q = 2 + \frac{1}{100}$, le dernier terme vaut $9 \times 100 = 900$. Essaie ensuite une valeur encore plus proche de 2.

Devine : Tout près de deux centaines

Que devient $g(q)$ quand q se rapproche de 2 en restant supérieur à 2 ?

A. $g(q)$ tend vers 3.

Faux.

$q + 1$ tend bien vers 3, mais le terme $\frac{9}{q - 2}$ grandit sans limite.

B. $g(q)$ tend vers $+\infty$.

Juste.

Juste : le terme $\frac{9}{q - 2}$ grandit sans limite.

C. $g(q)$ tend vers $-\infty$.

Faux.

Pour $q > 2$, $q - 2$ est positif : le terme $\frac{9}{q - 2}$ est positif.

D. $g(q)$ tend vers 9.

Faux.

Le numérateur vaut 9, mais le dénominateur tend vers 0 : le quotient n'a pas de limite réelle.

Correction

Quand q tend vers 2 par la droite, $q+1$ tend vers 3 et $q-2$ tend vers 0 en restant positif. Le quotient $\dfrac{9}{q-2}$ tend donc vers $+\infty$.

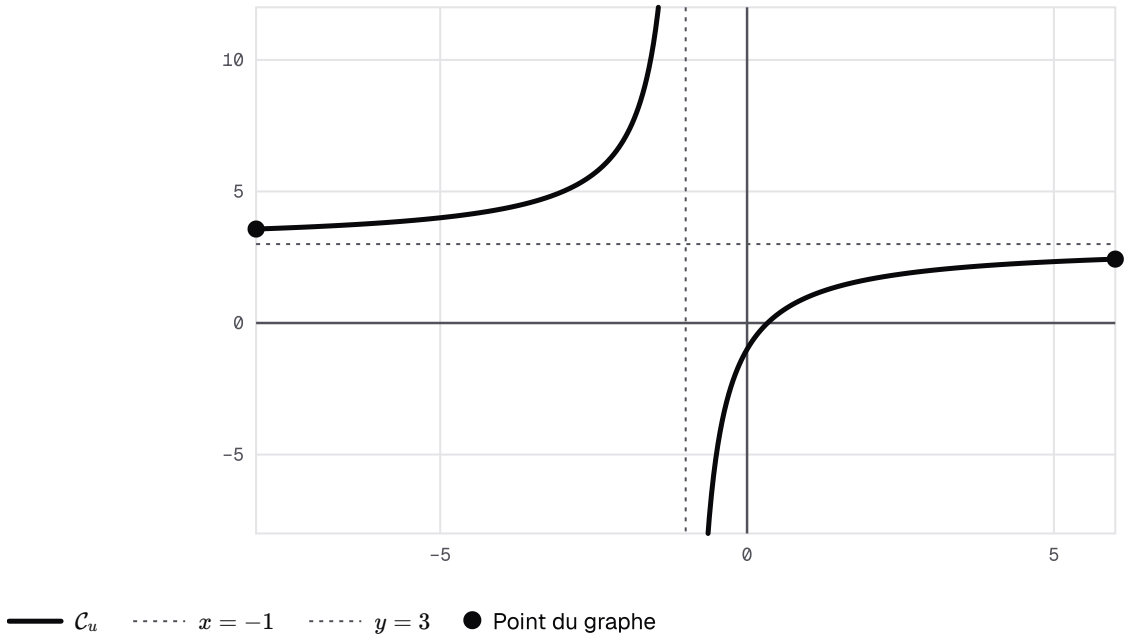
D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{q \to 2^+} g(q) = +\infty.$$

Avec presque rien à vendre, chaque centaine vendue porte tous les frais.

Quand x ou $f(x)$ s'éloigne sans fin, la courbe sort de la feuille : on dit qu'elle a une **branche infinie**.

Certaines branches infinies longent une droite, appelée **asymptote**. Regarde d'abord une courbe : elle en longe deux, une verticale et une horizontale.



Courbe de u(x) = 3 - 4/(x + 1), en deux morceaux séparés par l'asymptote verticale x = -1 ; l'asymptote horizontale y = 3 est tracée en guide.

Asymptote verticale

Définition : Asymptote verticale

Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et a un réel. Si la limite de f en a (à droite ou à gauche) est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Par exemple, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Exemple : une valeur interdite

Soit u la fonction de la figure, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$u(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

- À droite de -1, $x+1$ tend vers 0 en restant positif, donc $\frac{4}{x+1}$ tend vers $+\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x \to -1^+} u(x) = -\infty$.
- À gauche de -1, $x+1$ tend vers 0 en restant négatif, donc $\frac{4}{x+1}$ tend vers $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} u(x) = +\infty$.

D'après la définition de l'asymptote verticale, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_u$.

Contre-exemple. La fonction $x \mapsto 2x - 1$ tend vers 5 en 3 : la droite d'équation $x = 3$ n'est pas une asymptote de sa courbe.

Vérifie : Le côté gauche

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $v(x) = 2 + \frac{5}{x-4}$. Quelle est la limite de v en 4 à gauche ?

A. $+\infty$

Faux.

À gauche de 4, $x-4$ est négatif : le quotient $\frac{5}{x-4}$ est négatif.

B. 7

Faux.

$v(5) = 7$, mais on cherche la limite en 4, pas une valeur en 5.

C. $-\infty$

Juste.

Juste : à gauche de 4, le dénominateur est négatif.

D. 0

Faux.

Le numérateur 5 n'est pas nul : le quotient ne tend pas vers 0.

Correction

Quand x tend vers 4 par la gauche, $x-4$ tend vers 0 en restant négatif. Le quotient $\frac{5}{x-4}$ tend donc vers $-\infty$, et :

$$\lim_{x \to 4^-} v(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_v$.

Asymptote horizontale

En clair. Reprends la fonction u, avec $u(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$. Pour $x = 399$:

$$\frac{4}{x+1} = \frac{4}{400} = \frac{1}{100}.$$

Le nombre $u(399)$ est donc tout près de 3. Plus x grandit, plus le point de la courbe se colle à la droite horizontale d'équation $y = 3$.

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ et b un réel. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$, lorsque f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c]$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Exemple : une limite réelle à l'infini

Pour u : quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $x+1$ grandit sans fin en valeur absolue, donc $\dfrac{4}{x+1}$ tend vers 0. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 3,$$
$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = 3.$$

D'après la définition de l'asymptote horizontale, la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Contre-exemple. Le coût $g(q)$ tend vers $+\infty$ quand q tend vers $+\infty$: la courbe du coût n'a pas d'asymptote horizontale.

Vérifie : Deux asymptotes

Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $w(x) = -2 + \dfrac{7}{x-4}$. Quelles sont les asymptotes de $\mathcal{C}_w$?

A. $x = -4$ et $y = -2$

Faux.

La valeur interdite annule $x - 4$: c'est 4, pas -4.

B. $x = 4$ et $y = 7$

Faux.

Le numérateur 7 n'est pas une limite : $\dfrac{7}{x-4}$ tend vers 0 à l'infini.

C. $x = -2$ et $y = 4$

Faux.

Les rôles sont inversés : 4 est une abscisse interdite, -2 une limite.

D. $x = 4$ et $y = -2$

Juste.
Juste : la valeur interdite, puis la limite à l'infini.

Correction
En 4. Le dénominateur $x-4$ tend vers 0 et le numérateur vaut 7 : la limite de w est infinie de chaque côté de 4. D'après la définition de l'asymptote verticale, la droite d'équation $x=4$ est asymptote.

À l'infini. Le quotient $\dfrac{7}{x-4}$ tend vers 0, donc $w(x)$ tend vers -2. D'après la définition de l'asymptote horizontale, la droite d'équation $y=-2$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

À toi

À toi : Les asymptotes de r

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $r(x)=-1+\dfrac{3}{x-2}$.

Calcule les limites de r à droite et à gauche de 2, puis en $+\infty$ et en $-\infty$. Donne les asymptotes de $\mathcal{C}_r$. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1
Étudie le signe de $x-2$ de chaque côté de 2.
Indice 2
À l'infini, $\dfrac{3}{x-2}$ tend vers 0.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe de $x-2$ à gauche de 2 avant de choisir entre $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse
Limites en 2. À droite de 2, $x-2$ tend vers 0 en restant positif ; à gauche, en restant négatif. Le numérateur 3 est positif, donc :

$$\lim_{x\to 2^+} r(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-} r(x)=-\infty.$$

D'après la définition de l'asymptote verticale, la droite d'équation $x=2$ est asymptote à $\mathcal{C}_r$.

Limites à l'infini. En $+\infty$ et en $-\infty$, $\dfrac{3}{x-2}$ tend vers 0, donc $r(x)$ tend vers -1. D'après la définition de l'asymptote horizontale, la droite d'équation $y=-1$ est asymptote à $\mathcal{C}_r$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}_r$ a deux asymptotes : les droites d'équations $x=2$ et $y=-1$.

À retenir

- Une **limite infinie** en un réel a, à droite ou à gauche : la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale.

- Une **limite réelle** b en $+\infty$ ou en $-\infty$: la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale.
- Le signe d'une limite infinie se lit sur le signe du numérateur et sur celui du dénominateur, de chaque côté.

Asymptote oblique

Une droite oblique

En clair. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 2$ par la formule du coût :

$$f(x) = x + 1 + \frac{9}{x - 2}.$$

Sur $]2, +\infty[$, f coïncide avec la fonction g de l'atelier. L'écart entre $f(x)$ et $x + 1$ vaut $\dfrac{9}{x - 2}$: calcule-le pour quelques grandes valeurs de x.

Devine : Un écart qui fond

Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \big[f(x) - (x + 1)\big]$?

A. 1

Faux.

La différence est exactement $\dfrac{9}{x - 2}$: le terme 1 s'est simplifié.

B. 9

Faux.

9 est le numérateur ; le dénominateur grandit sans limite.

C. $+\infty$

Faux.

C'est la limite de $f(x)$, pas celle de la différence.

D. 0

Juste.

Juste : l'écart $\dfrac{9}{x - 2}$ fond.

Correction

Pour $x \neq 2$, on a $f(x) - (x + 1) = \dfrac{9}{x - 2}$. Pour $x = 902$, cet écart vaut $\dfrac{9}{900} = \dfrac{1}{100}$.

Quand x tend vers $+\infty$, le dénominateur $x - 2$ grandit sans fin : le quotient tend vers 0.

La courbe se colle donc à la droite d'équation $y = x + 1$, qui n'est ni horizontale ni verticale.

Définition : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$, et a et b deux réels avec $a \neq 0$. Si

$$\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-(ax+b)\big]=0,$$

on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On définit de même une asymptote oblique en $-\infty$.

Exemple : la bonne droite

Pour tout $x\neq 2$, la différence vaut :

$$f(x)-(x+1)=\frac{9}{x-2}.$$

Elle tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après la définition de l'asymptote oblique, la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Contre-exemple. La droite d'équation $y=x$ ne convient pas : $f(x)-x=1+\dfrac{9}{x-2}$ tend vers 1, pas vers 0.

Une forme qui donne l'asymptote

Voici une propriété qui donne l'asymptote oblique sans calculer de limite compliquée.

Pourquoi est-ce vrai ? La différence $f(x)-(ax+b)$ est exactement $\varphi(x)$: la définition s'applique sans autre calcul.

Propriété : Asymptote oblique d'une fonction de la forme ax + b + φ(x)

Soit a et b deux réels avec $a\neq 0$, et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c,+\infty[$ par

$$f(x)=ax+b+\varphi(x),\quad \text{avec}\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.$$

Alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Le même résultat vaut en $-\infty$ lorsque f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty,c]$ et que $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout x de $[c,+\infty[$, on calcule la différence : $f(x)-(ax+b)=\varphi(x)$.

Étape 2. Par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-(ax+b)\big]=0$.

Étape 3. Par définition d'une asymptote oblique, avec $a\neq 0$, la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Le raisonnement est le même en $-\infty$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **former la différence** $f(x) - (ax + b)$, la simplifier, puis chercher sa limite.

Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$, cette différence est $\varphi(x)$. Tout repose alors sur une vérification : $\varphi(x)$ tend vers 0 à la borne étudiée.

Vérifie : Le geste de la preuve

Soit ℓ la fonction définie pour $x \neq 4$ par $\ell(x) = 2x - 3 + \dfrac{6}{x-4}$. Pour prouver que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique en $+\infty$, quelle expression dois-tu former, puis faire tendre vers 0 ?

A. $\ell(x) - 2x$

Faux.

Elle vaut $-3 + \dfrac{6}{x-4}$ et tend vers -3 : il manque le terme -3 de la droite.

B. $\ell(x) - (2x - 3)$

Juste.

Juste : elle vaut $\dfrac{6}{x-4}$, qui tend vers 0.

C. $\dfrac{\ell(x)}{x}$

Faux.

Ce quotient tend vers 2 : il donne le coefficient directeur, pas l'écart avec la droite.

D. $\ell(x) + (2x - 3)$

Faux.

La somme vaut $4x - 6 + \dfrac{6}{x-4}$: elle grandit sans fin.

Correction

On forme la différence : pour $x \neq 4$,

$$\ell(x) - (2x - 3) = \frac{6}{x-4}.$$

Ce quotient tend vers 0 en $+\infty$.

C'est le geste de la preuve, avec $a = 2, b = -3$ et $\varphi(x) = \dfrac{6}{x-4}$: la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique.

Exemple : faire apparaître la forme

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$s(x) = \frac{-x^2 + 2x + 5}{x + 1}.$$

Écriture utile. Pour tout réel x :

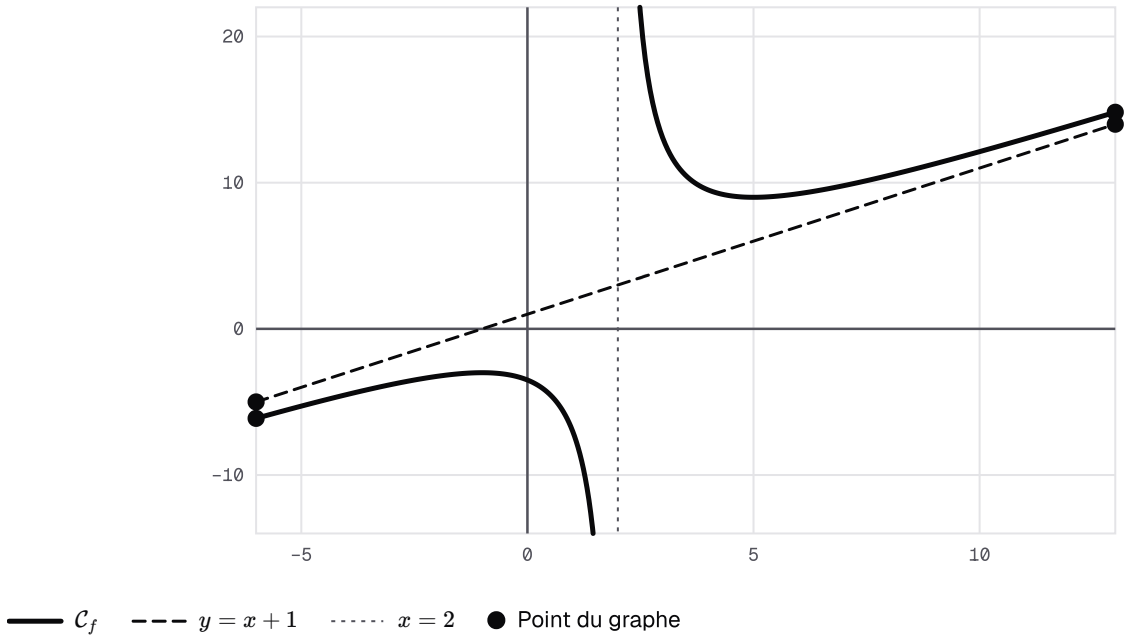
$$
\begin{aligned}
&(-x+3)(x+1)+2\\
&=-x^2+2x+3+2\\
&=-x^2+2x+5.
\end{aligned}
$$

En divisant par $x+1$, on obtient, pour $x \neq -1$, $s(x) = -x+3+\dfrac{2}{x+1}$.

Limite du reste. Le terme $\dfrac{2}{x+1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. D'après la propriété de l'asymptote oblique d'une fonction de la forme $ax+b+\varphi(x)$, avec $a=-1$ et $b=3$, la droite d'équation $y=-x+3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_s$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Voir les deux asymptotes



Courbe de f(x) = x + 1 + 9/(x - 2), en deux morceaux séparés par l'asymptote verticale x = 2 ; l'asymptote oblique y = x + 1 est en pointillés.

La courbe a deux morceaux, de part et d'autre de la droite d'équation $x=2$. Loin de 2, elle se colle à la droite d'équation $y=x+1$.

Retour à l'atelier. Pour tout réel q :

$$
\begin{aligned}
&(q+1)(q-2)+9\\
&=q^2-q-2+9\\
&=q^2-q+7.
\end{aligned}
$$

C'est bien $C(q)$. En divisant par $q-2$, on justifie la formule $g(q)=q+1+\dfrac{9}{q-2}$ de l'entrée.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : déterminer les asymptotes d'une courbe

1. **Repère les bornes** du domaine : valeurs interdites, $+\infty$ et $-\infty$.
2. **Aux valeurs interdites**, cherche la limite de chaque côté. Si elle est infinie, tu tiens une asymptote verticale.
3. **À l'infini**, une limite réelle b donne l'asymptote horizontale d'équation $y = b$.
4. **Sinon**, écris $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ et contrôle que $\varphi(x)$ tend vers 0. La droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote oblique.

Attention : quel terme doit tendre vers zéro ?

✗ « $j(x) = x + 1 + \dfrac{2x}{x-4}$, donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique. »

✓ Le terme $\dfrac{2x}{x-4}$ tend vers 2, pas vers 0. Pour $x \neq 4$, on l'écrit $2 + \dfrac{8}{x-4}$, donc :

$$j(x) = x + 3 + \frac{8}{x-4}.$$

L'asymptote oblique est la droite d'équation $y = x + 3$. Contrôle : $j(x) - (x+3) = \dfrac{8}{x-4}$ tend vers 0.

À toi : Les asymptotes de m

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $m(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x+1}$.

Vérifie que $m(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$, puis donne les asymptotes de $\mathcal{C}_m$. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1

Développe $(x+2)(x+1)$ et compare avec le numérateur.

Indice 2

Applique la méthode : la valeur interdite, puis l'infini.

Indice 3

Point délicat : le reste est $-\dfrac{1}{x+1}$, avec un signe moins ; regarde ce que devient ce signe à droite de -1.

Réponse

Écriture. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+1) - 1\\ &= x^2 + 3x + 2 - 1\\ &= x^2 + 3x + 1.\end{aligned}$$

En divisant par $x+1$, on obtient, pour $x \neq -1$, $m(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

Asymptote verticale. À droite de -1, $x+1$ tend vers 0 en restant positif, donc $-\dfrac{1}{x+1}$ tend vers $-\infty$. À gauche, $x+1$ est négatif. Ainsi :

$$\lim_{x \to -1^+} m(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^-} m(x) = +\infty.$$

D'après la définition de l'asymptote verticale, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_m$.

Asymptote oblique. Le terme $-\dfrac{1}{x+1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après la propriété de l'asymptote oblique d'une fonction de la forme $ax + b + \varphi(x)$, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_m$.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}_m$ a pour asymptotes les droites d'équations $x = -1$ et $y = x + 2$.

Branches paraboliques

Une courbe qui s'envole

En clair. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 2x - 3$. Quand x grandit, $p(x)$ grandit de plus en plus vite : $p(10) = 77$ et $p(100) = 9797$.

Le quotient $\dfrac{p(x)}{x}$ est le coefficient directeur du segment qui va de O au point $M(x, p(x))$. Pour $x = 100$, il vaut presque 98.

Devine : Une droite à suivre ?

La courbe de p a-t-elle une asymptote oblique en $+\infty$?

A. Oui : la droite d'équation $y = x$.

Faux.

$p(x) - x = x^2 - 3x - 3$ ne tend pas vers 0.

B. Oui : la droite d'équation $y = 2x - 3$.

Faux.

$p(x) - (2x - 3) = x^2 - 4x$ grandit sans limite.

C. Non : cette pente grandit sans fin.

Juste.

Juste : aucune droite ne peut être suivie.

Correction

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{p(x)}{x} = x - 2 - \frac{3}{x}.$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Si une droite d'équation $y = ax + b$ était asymptote, ce quotient tendrait vers a. Aucune droite ne convient : la courbe se redresse sans cesse.

Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big[f(x) - ax\big] = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques en $-\infty$. La direction indiquée s'appelle une **direction asymptotique** de $\mathcal{C}_f$.

Deux directions sur une figure

Exemple : vers le haut, ou presque à plat

Pour p. Le quotient $\dfrac{p(x)}{x} = x - 2 - \dfrac{3}{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après la définition des branches paraboliques, $\mathcal{C}_p$ a en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Pour une racine. Soit t la fonction définie sur $[-9, +\infty[$ par $t(x) = \sqrt{x+9}$. En $+\infty$, $x + 9$ tend vers $+\infty$, et $\sqrt{X}$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$: $t(x)$ tend vers $+\infty$. Pour $x > 0$:

$$\frac{t(x)}{x} = \frac{x+9}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+9}}.$$

Le premier facteur tend vers 1, le second vers 0 : le quotient tend vers 0. C'est une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Le troisième cas, de direction une droite d'équation $y = ax$, n'arrive pas pour les polynômes de degré 2 ou 3. Tu le reconnais seulement avec la définition.



Parabole de p(x) = x^2 - 2x - 3 et courbe de t(x) = racine carrée de x + 9, sur l'intervalle [-4, 6].

Vérifie : Quelle direction ?

Une fonction ψ vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0.$$

Que peut-on dire de sa courbe en $+\infty$?

A. Branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Juste.

Juste : c'est le cas de la courbe de t.

B. Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Faux.

Il faudrait que le quotient $\frac{\psi(x)}{x}$ ait une limite infinie.

C. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Faux.

$\psi(x)$ tend vers $+\infty$: aucune asymptote horizontale.

D. Asymptote oblique d'équation $y = x$.

Faux.

Le quotient tendrait alors vers 1, pas vers 0.

Correction

La limite de ψ en $+\infty$ est infinie, et celle de $\frac{\psi(x)}{x}$ vaut 0.

D'après la définition des branches paraboliques, la courbe a en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Les polynômes de degré 2 ou 3

Pour p, le quotient $\frac{p(x)}{x}$ garde un terme en x, qui l'emporte. Il en va de même pour toute fonction polynôme de degré 2 ou 3.

Pourquoi est-ce vrai ? Diviser par x fait baisser le degré d'une unité. Il reste un polynôme de degré 1 ou 2, plus un terme qui tend vers 0.

Propriété : Branches infinies d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3

Soit f une fonction polynôme de degré 2 ou de degré 3. Alors $\mathcal{C}_f$ admet, en $+\infty$ et en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. En particulier, $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote.

Démonstration

Étape 1. Une fonction polynôme a pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$ celle de son terme de plus haut degré : $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale. En tout réel a, la limite de f est le nombre fini $f(a)$: il n'y a pas d'asymptote verticale.

Étape 2. Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x}$ est la somme d'une fonction polynôme de degré 1 ou 2 et d'un terme $\frac{k}{x}$ qui tend vers 0 : d'après les opérations sur les limites, $\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie. Par définition, c'est une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Étape 3. Si $y = ax + b$ était une asymptote oblique, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax+b)}{x} + a + \frac{b}{x}$ tendrait vers a : impossible.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux limites suffisent.

- Celle de $f(x)$ suit le terme de plus haut degré : elle est infinie, donc pas d'asymptote horizontale.
- Celle de $\frac{f(x)}{x}$, polynôme de degré 1 ou 2 plus un terme en $\frac{k}{x}$, est infinie.

Une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ forcerait ce quotient à tendre vers a : c'est impossible.

Vérifie : Diviser par x

Dans la preuve, on divise par x. Soit n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $n(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$. Pour $x \neq 0$, que vaut $\dfrac{n(x)}{x}$?

A. $-x^2 + 3x + 1$

Faux.

Le terme constant 1 est lui aussi divisé par x.

B. $-x^3 + 3x^2 + \dfrac{1}{x}$

Faux.

Chaque terme est divisé par x : le degré baisse d'une unité.

C. $-x^2 + 3x$

Faux.

Le terme $\dfrac{1}{x}$ a disparu ; il tend vers 0, mais il existe.

D. $-x^2 + 3x + \dfrac{1}{x}$

Juste.

Juste : chaque terme est divisé par x.

Correction

Pour $x \neq 0$, chaque terme est divisé par x :

$$\frac{n(x)}{x} = -x^2 + 3x + \frac{1}{x}.$$

Le polynôme $-x^2 + 3x$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$, et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0. D'après la limite d'une somme, le quotient tend vers $-\infty$ des deux côtés.

Exemple : un polynôme de degré 3

Reprenons la fonction n, avec $n(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ses limites sont celles de son terme de plus haut degré, $-x^3$:

$$\lim_{x \to +\infty} n(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} n(x) = +\infty.$$

D'après la propriété des branches infinies d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3, $\mathcal{C}_n$ a, en $+\infty$ et en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Elle n'a aucune asymptote.

Un piège, puis à toi

Attention : une courbe qui s'envole n'a pas toujours d'asymptote

X « $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, donc $\mathcal{C}_p$ a une asymptote. »

✓ Une limite infinie en $+\infty$ ne donne, à elle seule, aucune asymptote. Pour $p(x) = x^2 - 2x - 3$, le quotient $\frac{p(x)}{x}$ tend vers $+\infty$: c'est une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Chaque asymptote se justifie par sa propre limite.

À toi : Les branches infinies de k

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^3 - 6x + 2$. Étudie les branches infinies de $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1

Calcule d'abord les limites de $k(x)$, puis celles de $\frac{k(x)}{x}$.

Indice 2

Pour $x \neq 0$, $\frac{k(x)}{x} = x^2 - 6 + \frac{2}{x}$.

Indice 3

Point délicat : en $-\infty$, quel est le signe de x^2, et celui de $k(x)$? Compare avant de conclure.

Réponse

Limites de k. Ce sont celles de son terme de plus haut degré, x^3 :

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty.$$

Limites du quotient. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{k(x)}{x} = x^2 - 6 + \frac{2}{x}.$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. D'après la propriété des branches infinies d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3, $\mathcal{C}_k$ a, en $+\infty$ et en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Elle n'a aucune asymptote.

Position relative d'une courbe et d'une droite

Au-dessus ou en dessous ?

En clair. Le coût par centaine vendue est-il au-dessus ou en dessous de la droite d'équation $y = x + 1$?

Pour le savoir sans figure, compare les ordonnées de deux points de même abscisse : l'un sur la courbe, l'autre sur la droite.

Devine : Un point, deux ordonnées

Pour $x = 5$, le point de $\mathcal{C}_f$ a pour ordonnée $f(5) = 9$. Le point de la droite d'équation $y = x + 1$ a pour ordonnée 6. Que conclure en $x = 5$?

A. La courbe est en dessous de la droite.

Faux.
C'est l'inverse : l'ordonnée 9 du point de la courbe est la plus grande.

B. La courbe est au-dessus de la droite.

Juste.
Juste : $9 > 6$.

C. La courbe coupe la droite.

Faux.
Les ordonnées 9 et 6 sont différentes : les deux points ne sont pas confondus.

Correction
La différence des ordonnées vaut $f(5) - 6 = 9 - 6 = 3$, qui est positive.

En $x = 5$, le point de $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus du point de la droite.

Le signe d'une différence

Ce test d'un point se fait pour tous les x d'un coup, grâce au signe d'une différence.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux points de même abscisse sont sur une même droite verticale. Le plus haut des deux est celui qui a la plus grande ordonnée.

Propriété : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (D) la droite d'équation $y = ax + b$.

- Si $f(x) - (ax + b) > 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax + b) < 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de (D) sur I.
- Si $f(x_0) - (ax_0 + b) = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ et (D) se coupent au point d'abscisse x_0.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel de I. Le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $N(x, ax + b)$ de (D) ont la même abscisse : ils sont sur la même droite verticale.

Étape 2. Le point M est au-dessus du point N lorsque son ordonnée est la plus grande, c'est-à-dire lorsque $f(x) > ax + b$, soit $f(x) - (ax + b) > 0$. Si cette inégalité vaut pour tout x de I, chaque point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse dans I est au-dessus du point de (D) de même abscisse : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur I.

Étape 3. On raisonne de même lorsque la différence est négative. Si $f(x_0) = ax_0 + b$, les points M et N d'abscisse x_0 sont confondus : c'est un point commun à $\mathcal{C}_f$ et à (D).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout se lit sur **une seule différence** : $f(x) - (ax + b)$. C'est l'écart vertical entre M, sur la courbe, et N, sur la droite, à la même abscisse.

- Positive : la courbe est au-dessus.
- Négative : elle est en dessous.
- Nulle : les deux points sont confondus.

Vérifie : Comparer deux points

Le point $M(4, 7)$ est sur une courbe. Le point N de la droite d'équation $y = 2x$ a la même abscisse que M. Où est M par rapport à N ?

A. Au-dessus de N : $7 > 4$.

Faux.
On compare l'ordonnée de M à celle de N, pas à l'abscisse 4.

B. Au-dessus de N : $7 > 2$.

Faux.
2 est le coefficient directeur de la droite ; l'ordonnée de N vaut 8.

C. En dessous de N : $7 < 8$.

Juste.
Juste : N a pour ordonnée $2 \times 4 = 8$.

D. Confondu avec N.

Faux.
Les ordonnées 7 et 8 sont différentes.

Correction
Les points M et N ont la même abscisse 4 : ils sont sur une même droite verticale. Le point N a pour ordonnée $2 \times 4 = 8$.

La différence des ordonnées vaut $7 - 8 = -1$, négative : M est en dessous de N.

C'est le geste de la preuve, avec le signe de $f(x) - (ax + b)$.

Exemple : la courbe et son asymptote

Reprenons la fonction f, avec $f(x) = x + 1 + \dfrac{9}{x-2}$ pour $x \neq 2$, et son asymptote d'équation $y = x + 1$.

Différence. Pour $x \neq 2$:

$$f(x) - (x+1) = \frac{9}{x-2}.$$

Le numérateur 9 est positif : la différence a le signe de $x - 2$.

Conclusion. D'après la propriété de la position relative d'une courbe et d'une droite, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote sur $]2, +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty, 2[$. La différence ne s'annule jamais : elles ne se coupent pas.

Une droite qui coupe la courbe

Une droite peut aussi couper la courbe. Prends la parabole de p, avec $p(x) = x^2 - 2x - 3$, et la droite (D) d'équation $y = x + 1$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} d(x) &= p(x) - (x+1) \\ &= x^2 - 3x - 4 \\ &= (x+1)(x-4). \end{aligned}$$

Ses racines sont -1 et 4 ; le coefficient de x^2 est positif.

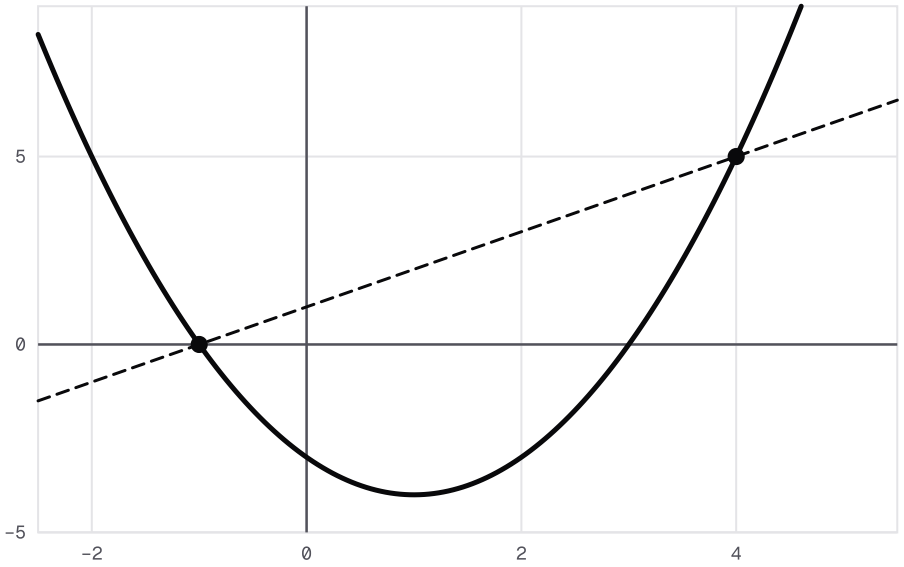
Signe de d(x) = (x + 1)(x - 4), écart entre la parabole et la droite (D)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$d(x)$		+	0	-	0	+	

Exemple : lire la position dans le tableau

D'après la propriété de la position relative d'une courbe et d'une droite :

- $\mathcal{C}_p$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]4, +\infty[$;
- elle est en dessous sur $]-1, 4[$;
- elles se coupent aux points $A(-1, 0)$ et $B(4, 5)$, car $p(-1) = 0$ et $p(4) = 5$.



$\mathcal{C}_p$ $(D) : y = x + 1$ Point plein A Point plein B Point du graphe

La parabole de p et la droite (D) d'équation y = x + 1 se coupent en A(−1, 0) et B(4, 5) : entre ces abscisses, la parabole passe sous la droite.

La méthode, puis à toi

Méthode : situer une courbe par rapport à une droite

1. **Forme** la différence $f(x) - (ax + b)$, note-la $d(x)$ et simplifie-la.
2. **Étudie son signe** sur le domaine, dans un tableau de signes.
3. **Conclus** intervalle par intervalle : au-dessus où $d(x) > 0$, en dessous où $d(x) < 0$, point commun où $d(x) = 0$.

À toi : La courbe de m et son asymptote

Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $m(x) = x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$. Étudie la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à son asymptote oblique d'équation $y = x + 2$. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1

Forme la différence $m(x) - (x + 2)$.

Indice 2

Cette différence vaut $-\dfrac{1}{x+1}$: étudie le signe de $x + 1$.

Indice 3

Point délicat : le signe moins devant la fraction change le signe de la différence ; contrôle avec une valeur, par exemple $x = 0$.

Réponse

Différence. Pour tout $x \neq -1$:

$$m(x) - (x+2) = -\frac{1}{x+1}.$$

Signe. Pour $x > -1$, on a $x+1 > 0$: la différence est négative. Pour $x < -1$, on a $x+1 < 0$: elle est positive.

Conclusion. D'après la propriété de la position relative d'une courbe et d'une droite, $\mathcal{C}_m$ est en dessous de son asymptote sur $]-1, +\infty[$ et au-dessus sur $]-\infty, -1[$.

Concavité et points d'inflexion

Une courbe qui change de courbure

En clair. L'atelier fabrique aussi des armoires. Pour q centaines d'armoires, le coût total, en milliers de dirhams, est $K(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$ (données fictives).

Quelques valeurs : $K(0) = 10$, $K(1) = 20$, $K(2) = 24$, $K(3) = 28$ et $K(4) = 38$.

Devine : Le coût d'une centaine de plus

Quand q passe de 0 à 4, comment évolue le coût d'une centaine d'armoires supplémentaire ?

A. Il augmente sans arrêt.

Faux.

Les premiers écarts baissent : de 10 à 4.

B. Il baisse sans arrêt.

Faux.

Le dernier écart, 10, dépasse le précédent.

C. Il augmente, puis il baisse.

Faux.

Les écarts $10, 4, 4, 10$ commencent par baisser.

D. Il baisse, puis il augmente.

Juste.

Juste : les écarts sont $10, 4, 4$, puis 10.

Correction

Les écarts successifs sont :

- $K(1) - K(0) = 10$;
- $K(2) - K(1) = 4$;
- $K(3) - K(2) = 4$;

- $K(4) - K(3) = 10$.

Le coût monte de moins en moins vite, puis de plus en plus vite. La courbe change de courbure : tournée vers le bas, puis vers le haut.

Définition : Courbe convexe, courbe concave

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I (sa concavité est tournée vers le haut) si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes en des points d'abscisse appartenant à I.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I (sa concavité est tournée vers le bas) si $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses tangentes en des points d'abscisse appartenant à I.

Le signe de la dérivée seconde

Exemple : au-dessus de ses tangentes

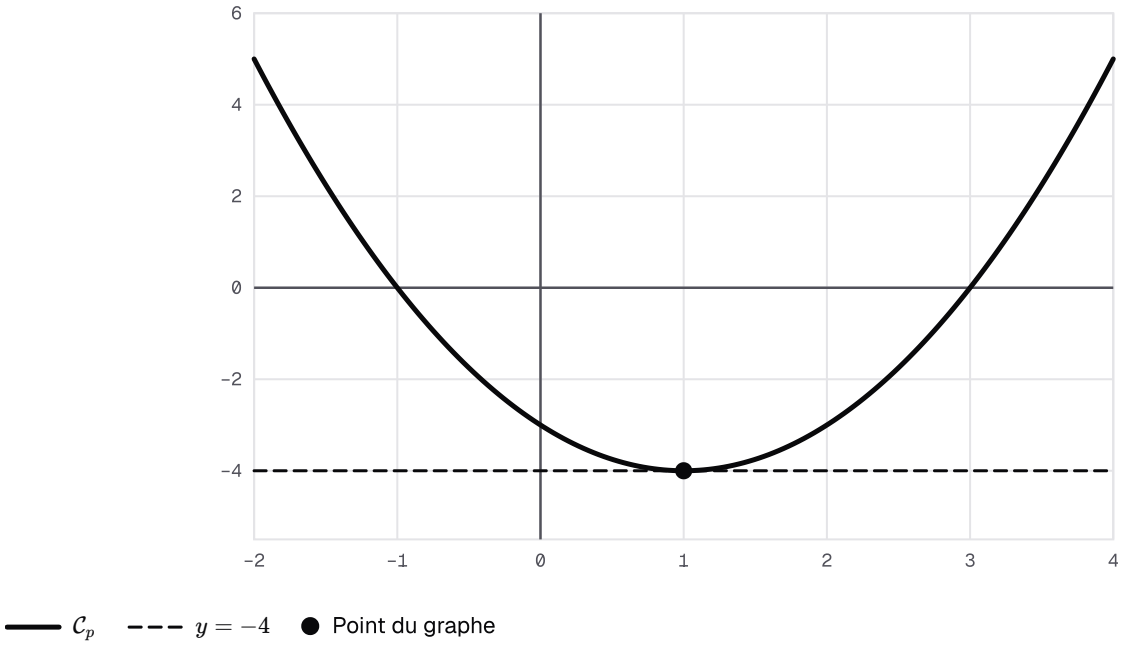
Au point d'abscisse 1. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 2x - 3$. On a $p'(1) = 0$ et $p(1) = -4$: la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -4$. Pour tout réel x, $p(x) - (-4) = (x-1)^2 \geq 0$: la courbe est au-dessus de cette tangente.

En un point quelconque. Au point d'abscisse t, l'écart entre la courbe et la tangente vaut, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &p(x) - \big[p'(t)(x-t) + p(t)\big] \\ &= (x-t)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La courbe est au-dessus de toutes ses tangentes : d'après la définition, $\mathcal{C}_p$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple. La parabole de $x \mapsto -x^2$ est en dessous de ses tangentes : elle n'est pas convexe, elle est concave.



La parabole de p(x) = x² − 2x − 3 reste au-dessus de sa tangente horizontale y = −4, qu'elle touche au point d'abscisse 1 : l'écart vaut (x − 1)².

Propriété : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et f'' sa dérivée seconde.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il relie la courbure au signe de f'', la dérivée de f'.

Quand f'' est positive, la pente des tangentes augmente.

Vérifie : La courbure du coût

Pour le coût des armoires, $K''(q) = 6q - 12$. Sur quel intervalle la courbe de K est-elle concave ?

A. Sur $[2, +\infty[$.

Faux.

Là, $K''(q) \geq 0$: la courbe est convexe.

B. Sur $[0, 2]$.

Juste.

Juste : là, $K''(q) \leq 0$.

C. Sur $[0, 4]$.

Faux.

$K''(3) = 6$ est positif : la courbe n'est pas concave près de 3.

D. Sur $[0, +\infty[$.

Faux.

K'' change de signe en 2 : la concavité change.

Correction

Dérivées. K est un polynôme, donc deux fois dérivable. Pour tout $q \geq 0$:

$$K'(q) = 3q^2 - 12q + 15,$$
$$K''(q) = 6q - 12.$$

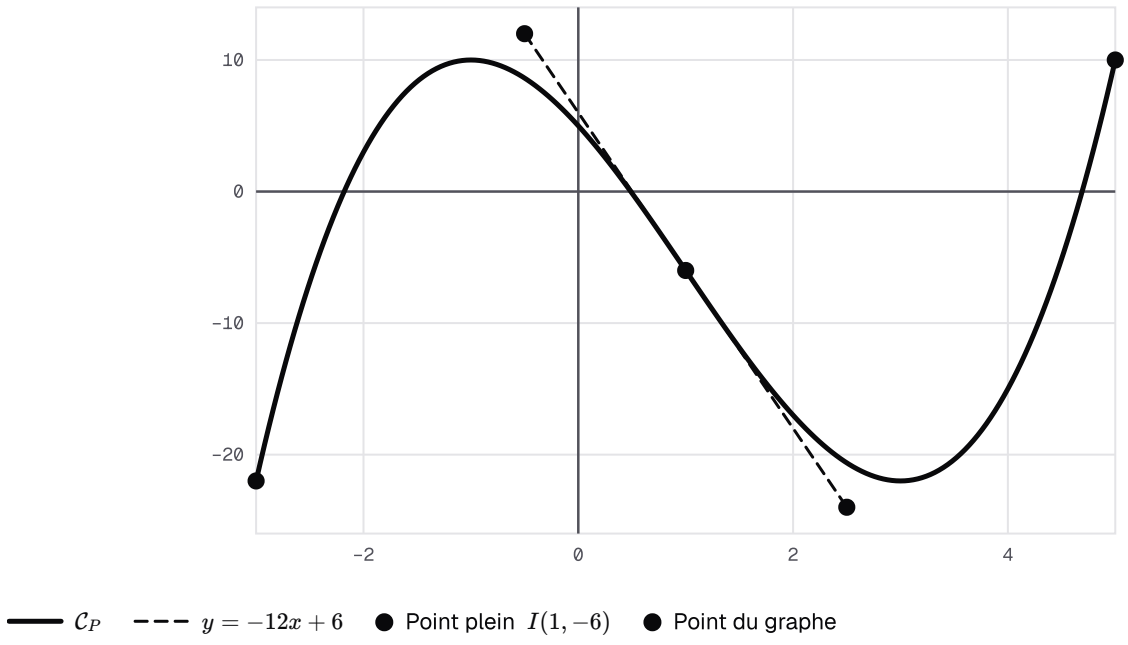
Signe. $K''(q) = 6(q - 2)$ est négatif ou nul pour $0 \leq q \leq 2$, positif ou nul pour $q \geq 2$.

Conclusion. D'après la propriété de la concavité et du signe de la dérivée seconde, la courbe de K est concave sur $[0, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$. C'est ce que montraient les écarts de coût.

Le point d'inflexion

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. On dit que le point $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la concavité de $\mathcal{C}_f$ change en A : $\mathcal{C}_f$ est convexe d'un côté de x_0 et concave de l'autre. En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.



Courbe de P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 sur [-3, 5], avec son point d'inflexion I(1, -6) et, en pointillés, la tangente en I d'équation y = -12x + 6.

Propriété : Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. Si f'' **s'annule en x_0 en changeant de signe**, alors le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Lis bien sa condition : f'' doit changer de signe, pas seulement s'annuler.

Exemple : le point d'inflexion de la figure

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Dérivées. P est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$P'(x) = 3x^2 - 6x - 9,$$
$$P''(x) = 6x - 6.$$

Signe. La dérivée seconde est négative pour $x < 1$, nulle en 1, positive pour $x > 1$: elle s'annule en changeant de signe.

Conclusion. On a $P(1) = 1 - 3 - 9 + 5 = -6$. D'après la propriété du point d'inflexion et de la dérivée seconde, le point $I(1, -6)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_P$.

Comme $P'(1) = -12$, la tangente en I a pour équation $y = -12x + 6$: la courbe la traverse.

La méthode et deux pièges

Méthode : étudier la concavité et les points d'inflexion

1. **Calcule** f', puis la dérivée seconde f''.
2. **Étudie le signe** de $f''(x)$, dans un tableau de signes.
3. **Conclus** : convexe où $f'' \geq 0$, concave où $f'' \leq 0$, point d'inflexion là où f'' s'annule en changeant de signe.
4. **Calcule** l'ordonnée de chaque point d'inflexion.

Attention : une dérivée seconde nulle ne suffit pas

✗ « $z''(0) = 0$, donc le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion. »

✓ Soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = x^4 + 2x$. Pour tout réel x, $z'(x) = 4x^3 + 2$ et $z''(x) = 12x^2$.

On a bien $z''(0) = 0$, mais $z''(x) \geq 0$ des deux côtés de 0 : aucun changement de signe. La courbe reste convexe ; pas de point d'inflexion en 0.

À toi : La concavité de Q

Soit Q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$. Étudie la concavité de $\mathcal{C}_Q$ et donne son point d'inflexion. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1
Calcule $Q'(x)$, puis $Q''(x)$.
Indice 2
On trouve $Q''(x) = -6x - 6$: étudie le signe de cette expression affine.
Indice 3
Point délicat : le coefficient de x dans $Q''(x)$ est négatif ; contrôle le signe avec une valeur, par exemple $x = -2$, avant de conclure.

Réponse
Dérivées. Q est un polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} Q'(x) &= -3x^2 - 6x, \\ Q''(x) &= -6x - 6 \\ &= -6(x + 1). \end{aligned}$$

Concavité. Pour $x < -1$, $Q''(x) > 0$; pour $x > -1$, $Q''(x) < 0$. D'après la propriété de la concavité et du signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_Q$ est convexe sur $]-\infty, -1]$ et concave sur $[-1, +\infty[$.

Point d'inflexion. Q'' s'annule en -1 en changeant de signe, et $Q(-1) = 1 - 3 + 1 = -1$. D'après la propriété du point d'inflexion et de la dérivée seconde, $J(-1, -1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_Q$.

Attention : variations ou concavité ?

✗ « $P''(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$, donc P est décroissante sur $]-\infty, 1[$. »

✓ Le signe de P'' donne la **concavité**, pas les variations : sur $]-\infty, 1[$, la courbe est concave.

Pourtant P est croissante sur $]-\infty, -1]$: c'est le signe de $P'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$ qui le dit.

Axe et centre de symétrie

Une courbe en miroir

En clair. Certaines courbes semblent se replier sur elles-mêmes autour d'une droite verticale : deux abscisses placées à égale distance de cette droite donnent alors la même valeur.

C'est le cas de la parabole de p, avec $p(x) = x^2 - 2x - 3$. Compare des valeurs : $p(0) = -3$ et $p(2) = -3$; $p(-1) = 0$ et $p(3) = 0$.

Les abscisses 0 et 2 ont le même milieu que -1 et 3.

Devine : Le pli de la parabole

Quelle droite semble être un axe de symétrie de la parabole de p ?

A. La droite d'équation $y = 1$.

Faux.
Une droite horizontale échangerait le haut et le bas ; ici, deux points de même ordonnée se répondent.

B. La droite d'équation $x = -3$.

Faux.
-3 est l'ordonnée $p(0)$, pas le milieu des abscisses.

C. La droite d'équation $x = 1$.

Juste.
Juste : c'est le milieu de 0 et 2, et de -1 et 3.

D. La droite d'équation $x = 0$.

Faux.
$p(-1) = 0$ mais $p(1) = -4$: l'axe des ordonnées ne convient pas.

Correction
Les points d'abscisses 0 et 2 ont la même ordonnée -3 ; le milieu de leurs abscisses est 1. De même pour -1 et 3.

La droite d'équation $x = 1$ semble être un axe de symétrie : on va le démontrer.

Un axe de symétrie

Pour le démontrer, il faut savoir où va un point par la symétrie d'axe la droite d'équation $x = a$.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un repère orthogonal, le symétrique de $M(x, y)$ garde son ordonnée. Son abscisse x devient $2a - x$: le milieu des deux abscisses est a.

Propriété : Axe de symétrie d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère **orthogonal**. Soit f une fonction de domaine de définition D_f et a un réel. La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x).$$

Démonstration

Étape 1. Dans un repère orthogonal, le symétrique du point $M(x, y)$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = a$ est le point $M'(2a - x, y)$: le segment $[MM']$ est horizontal, donc perpendiculaire à (Δ), et son milieu, d'abscisse $\dfrac{x + (2a - x)}{2} = a$, est sur (Δ).

Étape 2. La droite (Δ) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si le symétrique de chaque point de $\mathcal{C}_f$ est encore un point de $\mathcal{C}_f$. Pour le point $M(x, f(x))$, avec x dans D_f, cela signifie que $M'(2a - x, f(x))$ est sur $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire que $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Étape 3. Réciproquement, si ces deux conditions sont vraies pour tout x de D_f, le symétrique de chaque point de $\mathcal{C}_f$ est sur $\mathcal{C}_f$: (Δ) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

À retenir **: Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Le geste : **traduire la symétrie en coordonnées**. Le symétrique de $M(x, f(x))$ est $M'(2a - x, f(x))$.

Il est sur la courbe exactement quand $2a - x$ est dans le domaine et $f(2a - x) = f(x)$.

Le repère doit être orthogonal : sinon, ce point n'est pas le symétrique de M.

Vérifie : Le symétrique d'un point

Le repère est orthogonal. Quel est le symétrique du point $M(5, 4)$ par rapport à la droite d'équation $x = 3$?

A. $(1, 4)$
Juste.
Juste : même ordonnée, et $2 \times 3 - 5 = 1$.

B. $(-2, 4)$
Faux.
C'est $3 - 5$: le milieu de 5 et de -2 est $\dfrac{3}{2}$, pas 3.

C. $(1, -4)$
Faux.
Une symétrie d'axe vertical ne change pas l'ordonnée.

D. $(-1, 4)$
Faux.
C'est $5 - 6$: le milieu de 5 et de -1 est 2, pas 3.

Correction
Le symétrique garde l'ordonnée 4. Son abscisse est $2 \times 3 - 5 = 1$: le milieu de 5 et de 1 vaut bien 3 .

> C'est le geste de la preuve : $M(x, y)$ a pour symétrique $M'(2a - x, y)$.

Exemple : deux axes de symétrie

Une parabole. Pour p, avec $a = 1$: pour tout réel x, $2 - x$ est réel, et

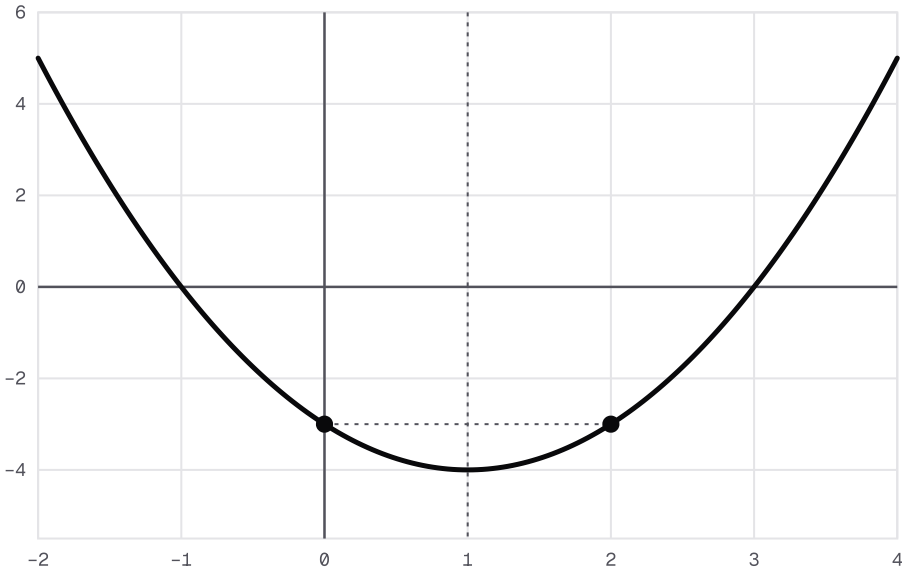
$$\begin{aligned} &p(2 - x) \\ &= (2 - x)^2 - 2(2 - x) - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ &= p(x). \end{aligned}$$

D'après la propriété de l'axe de symétrie, dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_p$.

Une fonction rationnelle. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $G(x) = 1 + \dfrac{4}{(x+1)^2}$, et $a = -1$. Si $x \neq -1$, alors $-2 - x \neq -1$, et

$$\begin{aligned} G(-2 - x) &= 1 + \frac{4}{(-1 - x)^2} \\ &= G(x), \end{aligned}$$

car $(-1 - x)^2 = (x + 1)^2$. Dans un repère orthogonal, d'après la propriété de l'axe de symétrie, la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_G$.



La droite verticale d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la parabole de p : les points M et M', d'abscisses 0 et 2, ont la même ordonnée −3.

Un centre de symétrie

Pour un centre $\Omega(a, b)$, le symétrique de $M(x, y)$ est le point M' tel que Ω soit le milieu de $[MM']$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les coordonnées du milieu donnent directement celles de M'. Il reste à écrire que M' est sur la courbe.

Propriété : Centre de symétrie d'une courbe

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et $\Omega(a, b)$ un point du plan. Le point Ω est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Démonstration

Étape 1. Le symétrique du point $M(x, y)$ par rapport à $\Omega(a, b)$ est le point $M'(x', y')$ tel que Ω soit le milieu de $[MM']$: $\dfrac{x + x'}{2} = a$ et $\dfrac{y + y'}{2} = b$, donc $M'(2a - x, 2b - y)$.

Étape 2. Le point Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si le symétrique de chaque point de $\mathcal{C}_f$ est encore un point de $\mathcal{C}_f$. Pour $M(x, f(x))$, avec x dans D_f, cela signifie que $M'(2a - x, 2b - f(x))$ est sur $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire que $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$, soit $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Étape 3. Réciproquement, si ces deux conditions sont vraies pour tout x de D_f, le symétrique de chaque point de $\mathcal{C}_f$ est sur $\mathcal{C}_f$: Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même geste que pour l'axe, avec le milieu. Le symétrique de $M(x, f(x))$ est $M'(2a - x, 2b - f(x))$.

Il est sur la courbe quand $f(2a - x) = 2b - f(x)$, soit $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Aucune condition sur le repère : un milieu se calcule dans tout repère.

Vérifie : Le symétrique par un point

Le point $\Omega(2, 1)$ est le milieu de $[MM']$, avec $M(5, 4)$. Quelles sont les coordonnées de M' ?

A. $(-1, 4)$
Faux.
C'est le symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$; ici, l'ordonnée change aussi.

B. $(-3, -3)$
Faux.
C'est $(2 - 5, 1 - 4)$: le milieu avec M serait $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, pas Ω.

C. $(1, 2)$
Faux.

C'est $(5-4, 4-2)$: le milieu avec M serait $(3,3)$, pas Ω.

D. $(-1,-2)$

Juste.

Juste : $\dfrac{5+(-1)}{2}=2$ et $\dfrac{4+(-2)}{2}=1$.

Correction

Le point Ω est le milieu de $[MM']$, donc :

$$\begin{aligned} x' &= 2\times 2-5=-1,\\ y' &= 2\times 1-4=-2. \end{aligned}$$

Le point M' a pour coordonnées $(-1,-2)$.

C'est le geste de la preuve : $M(x,y)$ a pour symétrique $M'(2a-x,2b-y)$.

Exemple : le centre d'un polynôme de degré 3

Reprenons $P(x)=x^3-3x^2-9x+5$ et le point $\Omega(1,-6)$.

Domaine. Pour tout réel x, $2-x$ est réel.

Calcul. En développant, on obtient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(2-x)\\ &=-x^3+3x^2+9x-17. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &P(2-x)+P(x)\\ &=-12=2\times(-6). \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $\Omega(1,-6)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_P$. C'est le point d'inflexion $I(1,-6)$ trouvé plus haut.

Réduire le domaine d'étude

Méthode : montrer une symétrie et réduire le domaine d'étude

1. **Vérifie le domaine** : pour tout x de D_f, le réel $2a-x$ est dans D_f.
2. **Calcule** $f(2a-x)$. Pour un axe d'équation $x=a$, montre que $f(2a-x)=f(x)$. Pour un centre $\Omega(a,b)$, montre que $f(2a-x)+f(x)=2b$.
3. **Réduis** : étudie f sur $D_f\cap[a,+\infty[$, puis complète la courbe par la symétrie.

Exemple : la symétrie et le sens de variation

Une symétrie de centre Ω garde le sens de variation : une partie croissante de la courbe a pour image une partie croissante. Une symétrie d'axe vertical l'inverse : une partie croissante devient décroissante.

- Pour P, de centre $I(1,-6)$: P est décroissante sur $[1,3]$, donc aussi sur $[-1,1]$. Le signe de $P'(x)=3(x+1)(x-3)$ le confirme.
- Pour p, d'axe la droite d'équation $x=1$: p est croissante sur $[1,+\infty[$, donc décroissante sur $]-\infty,1]$.

Attention : le domaine et le repère d'abord

✗ « Sur $[-1,4]$, $p(2-x)=p(x)$, donc la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe de p restreinte à $[-1,4]$. »

✓ Pour $x=4$, le réel $2-x=-2$ n'est pas dans $[-1,4]$. Le point $(4,5)$ n'a pas de symétrique sur cette courbe : la condition de domaine échoue.

De plus, un axe de symétrie exige un repère orthogonal ; un centre de symétrie ne demande rien au repère.

À toi : Le centre de la courbe de Q

Reprends la fonction Q, avec $Q(x)=-x^3-3x^2+1$, et son point d'inflexion $J(-1,-1)$. Montre que J est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_Q$. Dis ensuite sur quel intervalle il suffit d'étudier Q. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1
Ici $a=-1$ et $b=-1$: calcule $Q(-2-x)$.
Indice 2
Écris $-2-x=-(x+2)$, puis remplace x par $-(x+2)$ partout dans $Q(x)$.
Indice 3
Point délicat : $(-2-x)^2=(x+2)^2$, mais $(-2-x)^3=-(x+2)^3$; garde bien le signe.

Réponse
Domaine. Ici $a=-1$ et $b=-1$. Pour tout réel x, $-2-x$ est réel.

Calcul. Comme $(-2-x)^3=-(x+2)^3$ et $(-2-x)^2=(x+2)^2$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &Q(-2-x)\\ &=(x+2)^3\\ &\quad -3(x+2)^2+1\\ &=x^3+3x^2-3. \end{aligned}$$

Donc :

$$Q(-2-x)+Q(x) \\ =-2=2\times(-1).$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $J(-1,-1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_Q$. Il suffit d'étudier Q sur $[-1,+\infty[$, puis de compléter la courbe par la symétrie de centre J.

Étude complète d'une fonction

Un plan d'étude

En clair. Étudier une fonction, c'est réunir les gestes du chapitre pour tracer sa courbe sans surprise.

L'ordre compte : les symétries réduisent le travail, les asymptotes guident le tracé. Voici le plan, puis deux études complètes.

Devine : Par quoi commencer le dessin ?

Pour tracer à la main la courbe d'une fonction rationnelle, que places-tu en premier sur ton dessin ?

A. Quelques points pris au hasard.
Faux.
Des points isolés ne montrent ni les branches infinies, ni les variations.

B. Les asymptotes.
Juste.
Juste : elles guident les branches infinies.

C. Une tangente en chaque point.
Faux.
Il y en a une infinité : on n'en trace que quelques-unes, utiles.

D. La courbe, d'un seul trait.
Faux.
Sans repères, le trait risque de traverser une asymptote.

Correction
Les asymptotes d'abord : elles guident les branches infinies.

Viennent ensuite les points particuliers (extremums, point d'inflexion, intersections avec les axes).

La courbe vient en dernier, en respectant le tableau de variations.

Méthode : plan d'étude d'une fonction

1. **Domaine** de définition, puis éléments de symétrie éventuels.
2. **Limites aux bornes** et branches infinies : asymptotes ou branches paraboliques.

3. **Dérivée**, signe de $f'(x)$ et **tableau de variations**.
4. **Dérivée seconde** : concavité et points d'inflexion.
5. **Points particuliers** : intersections avec les axes, tangentes utiles, position par rapport aux asymptotes.
6. **Tracé** : les asymptotes, puis les points particuliers, puis la courbe.

Une famille de fonctions rationnelles

Les fonctions f, s, j et m de ce chapitre ont la même forme : $ax + b + \dfrac{c}{x-d}$. Leurs courbes ont deux asymptotes qui se coupent en un point.

Pourquoi est-ce vrai ? Les limites donnent les deux asymptotes. Le calcul de $f(2d-x)+f(x)$ montre que le point d'intersection est un centre de symétrie.

Propriété : Fonctions de la forme ax + b + c/(x – d)

Soit a, b, c, d quatre réels avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{d\}$ par

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}.$$

Alors :

- la droite d'équation $x = d$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$;
- la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$;
- le point $\Omega(d, ad+b)$, intersection des deux asymptotes, est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration

Étape 1. Quand x tend vers d, $ax+b$ tend vers $ad+b$ et $x-d$ tend vers 0 ; comme $c \neq 0$, $\dfrac{c}{x-d}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ à droite et à gauche de d. D'après les opérations sur les limites, $f(x)$ a une limite infinie en d : par définition, la droite d'équation $x = d$ est une asymptote verticale.

Étape 2. Posons $\varphi(x) = \dfrac{c}{x-d}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$. D'après la propriété de l'asymptote oblique d'une fonction de la forme $ax+b+\varphi(x)$, avec $a \neq 0$, la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étape 3. Pour tout $x \neq d$, on a $2d - x \neq d$, donc $2d-x \in \mathbb{R}\setminus\{d\}$, et

$$f(2d-x)+f(x) = a(2d-x)+b+\frac{c}{d-x} + ax+b+\frac{c}{x-d} = 2ad+2b = 2(ad+b).$$

D'après la caractérisation du centre de symétrie, $\Omega(d, ad+b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Il appartient aux deux asymptotes, car $a \times d + b = ad + b$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois gestes, trois conclusions.

- La limite en d donne l'asymptote verticale.
- Le terme $\dfrac{c}{x-d}$, qui tend vers 0 à l'infini, donne l'asymptote oblique.
- Dans $f(2d-x)+f(x)$, les termes en x s'éliminent et les deux fractions sont opposées : la somme vaut $2(ad+b)$.

Vérifie : Deux fractions qui s'annulent

Prends $c=3$, $d=4$ et $x=7$. Que valent $\dfrac{c}{d-x}$ et $\dfrac{c}{x-d}$?

A. 1 et 1

Faux.

$d-x=4-7$ est négatif : la première fraction est négative.

B. -1 et -1

Faux.

$x-d=7-4$ est positif : la seconde fraction est positive.

C. -1 et 1

Juste.

Juste : $\dfrac{3}{4-7}=-1$ et $\dfrac{3}{7-4}=1$.

D. $\dfrac{3}{11}$ et 1

Faux.

Le premier dénominateur est $d-x=4-7$, pas $d+x$.

Correction

On a $\dfrac{3}{4-7}=-1$ et $\dfrac{3}{7-4}=1$: les deux fractions sont opposées, car $d-x=-(x-d)$. Leur somme est nulle.

C'est le geste de la preuve : dans $f(2d-x)+f(x)$, il reste

$$\begin{aligned} &a(2d-x)+b+ax+b \\ &=2ad+2b. \end{aligned}$$

Exemple : les asymptotes et le centre de h

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par :

$$h(x)=x-1+\frac{4}{x-4}.$$

Ici $a=1, b=-1, c=4$ et $d=4$. D'après la propriété des fonctions de la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-d}$:

- la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$;
- la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$;
- le point $\Omega(4,3)$ est un centre de symétrie, car $1\times 4-1=3$.

Les variations de h

Grâce au centre Ω, il suffit d'étudier h sur $]4,+\infty[$. Pour tout $x\neq 4$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1-\frac{4}{(x-4)^2} \\ &= \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}. \end{aligned}$$

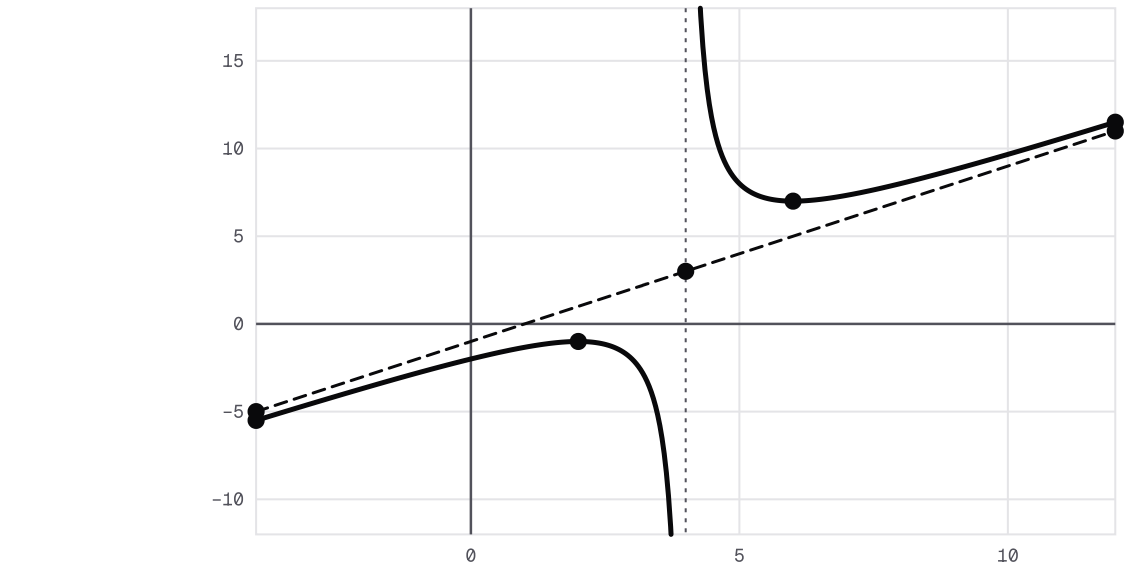
Sur $]4,+\infty[$, on a $x-2>0$: $h'(x)$ a le signe de $x-6$.

De plus, $h(6)=5+2=7$, et :

$$\lim_{x\to 4^+} h(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty.$$

Variations de h sur]4, +∞[(4 exclu : h(x) tend vers +∞ quand x tend vers 4 par la droite)

x	4		6		$+\infty$
$h'(x)$	‖	−	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$



Courbe de h(x) = x - 1 + 4/(x - 4), avec l'asymptote verticale x = 4, l'asymptote oblique y = x - 1 en pointillés et le centre de symétrie Ω(4, 3).

La symétrie de centre $\Omega(4, 3)$ complète l'étude.

Extremums. Le minimum local 7, atteint en 6, devient un maximum local en 2 : $h(2) = 1 - 2 = -1$, et $-1 + 7 = 6 = 2 \times 3$.

Concavité. Sur $]4, +\infty[$, $h''(x) = \dfrac{8}{(x-4)^3} > 0$: la courbe est convexe. Elle est concave sur $]-\infty, 4[$; aucun point d'inflexion.

Tracer à la main, dans l'ordre.

1. Trace les droites d'équations $x = 4$ et $y = x - 1$: elles se coupent en $\Omega(4, 3)$.
2. Place $(6, 7)$, puis son symétrique $(2, -1)$.
3. Place $(0, -2)$, puis son symétrique $(8, 8)$.
4. Dessine la branche de droite en suivant le tableau de variations.
5. Complète par la symétrie de centre Ω.

L'étude d'un polynôme de degré 3

Exemple : l'étude de S

Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $S(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

Branches infinies. Les limites sont celles du terme de plus haut degré, x^3 :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} S(x) = -\infty.$$

D'après la propriété des branches infinies d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3, ce sont des branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.

Variations. Pour tout réel x, $S'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. Le tableau donne un maximum local $S(-2) = 3$ et un minimum local $S(0) = -1$.

Concavité. $S''(x) = 6x + 6$ s'annule en -1 en changeant de signe, et $S(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$. D'après la propriété du point d'inflexion et de la dérivée seconde, $L(-1, 1)$ est un point d'inflexion.

Symétrie. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &S(-2-x) \\ &= -(x+2)^3 + 3(x+2)^2 - 1 \\ &= -x^3 - 3x^2 + 3. \end{aligned}$$

Donc $S(-2-x) + S(x) = 2 = 2 \times 1$. D'après la propriété du centre de symétrie, L est centre de symétrie de la courbe. Contrôle pour $x = 0$: $S(-2) + S(0) = 3 - 1 = 2$.

Variations de S(x) = x³ + 3x² - 1 : S'(x) = 3x(x + 2) s'annule en -2 et en 0

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$S'(x)$		+	0	-	0	+	
$S(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

À toi, puis le Coin devoir

À toi : L'étude de V

Soit V la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $V(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Donne ses asymptotes et son centre de symétrie. Étudie ensuite ses variations sur $]-1, +\infty[$. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1
Applique la propriété des fonctions de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-d}$, avec $d = -1$.

Indice 2
On trouve $V'(x) = -1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Indice 3
Point délicat : ici $c = -1$; sur $]-1, +\infty[$, quel facteur de $-x(x+2)$ garde un signe constant ?

Réponse

Asymptotes et centre. Ici $a = -1, b = 1, c = -1$ et $d = -1$. D'après la propriété des fonctions de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x - d}$:

- la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale ;
- la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique ;
- $E(-1, 2)$ est centre de symétrie, car $(-1) \times (-1) + 1 = 2$.

Variations. Pour tout $x \neq -1$:

$$V'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Sur $]-1, +\infty[$, on a $x + 2 > 0$: $V'(x)$ a le signe de $-x$. Donc V est croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, avec un maximum local $V(0) = 1 - 1 = 0$.

Limites. Quand x tend vers -1 par la droite, $V(x)$ tend vers $-\infty$; en $+\infty$, $V(x)$ tend aussi vers $-\infty$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger les asymptotes**

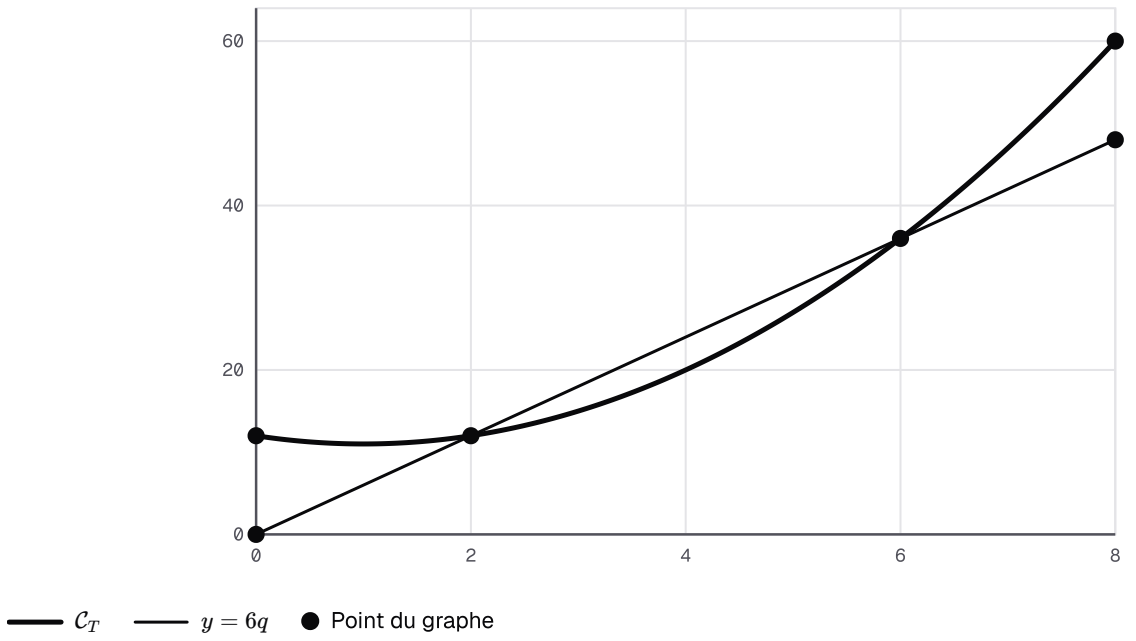
En devoir, chaque asymptote se justifie par une limite écrite, puis par la propriété nommée.

Pour h, une rédaction attendue : « On a $\lim\limits_{x \to 4^+} h(x) = +\infty$, donc, d'après la définition de l'asymptote verticale, la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$. De plus, $h(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{x - 4}$ tend vers 0 en $+\infty$: d'après la définition de l'asymptote oblique, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$. »

Termine par la position : $\dfrac{4}{x - 4} > 0$ sur $]4, +\infty[$, donc la courbe y est au-dessus de l'asymptote.

Résolution graphique

Lire sur le graphique



Atelier fictif, tables : coût total T(q) = q^2 - 2q + 12 et recette R(q) = 6q, en milliers de dirhams, pour q centaines de tables entre 0 et 8.

Devine : Quand l'atelier gagne-t-il de l'argent ?

L'atelier vend ses tables 6 milliers de dirhams la centaine : pour q centaines de tables, sa recette est $R(q) = 6q$. Son coût total est $T(q) = q^2 - 2q + 12$ (données fictives). Lis sur la figure les quantités pour lesquelles l'atelier ne perd pas d'argent.

A. De 2 à 6 centaines de tables.

Juste.

Juste : la droite de la recette y est au-dessus de la courbe du coût, ou la coupe.

B. De 0 à 2 centaines de tables.

Faux.

Là, la courbe du coût est au-dessus de la droite : l'atelier perd de l'argent.

C. À partir de 6 centaines de tables.

Faux.

Au-delà de 6, le coût repasse au-dessus de la recette.

D. Pour 4 centaines de tables seulement.

Faux.

En 4, le bénéfice est le plus grand, mais il est positif sur tout un intervalle.

Correction

L'atelier ne perd pas d'argent quand $R(q) \geq T(q)$: la droite est au-dessus de la courbe, ou la coupe. On lit les abscisses des points d'intersection, 2 et 6.

Calcul de contrôle : pour tout $q \geq 0$,

$$\begin{aligned} R(q) - T(q) &= -q^2 + 8q - 12 \\ &= -(q-2)(q-6). \end{aligned}$$

Ce produit est positif ou nul pour q dans $[2, 6]$.

Le bénéfice est $B(q) = R(q) - T(q) = -q^2 + 8q - 12$. Résoudre $R(q) \geq T(q)$, c'est chercher où $\mathcal{C}_T$ est en dessous de la droite de la recette.

Le bénéfice est le plus grand pour $q = 4$, abscisse du sommet de la parabole :

$$B(4) = -16 + 32 - 12 = 4,$$

soit 4 milliers de dirhams.

Exemple : le coût moyen

Le **coût moyen** est le coût total divisé par la quantité : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, pour $q > 0$.

Pour q centaines d'étagères, l'atelier a un coût total $E(q) = q^2 + 2q + 9$, en milliers de dirhams (données fictives). Son coût moyen est, pour $q > 0$:

$$\begin{aligned} C_M(q) &= \frac{E(q)}{q} \\ &= q + 2 + \frac{9}{q}. \end{aligned}$$

Près de 0. $\lim\limits_{q \to 0^+} C_M(q) = +\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale. Les frais fixes, 9 milliers de dirhams, pèsent sur très peu d'étagères.

Minimum. Pour $q > 0$:

$$\begin{aligned} C_M'(q) &= 1 - \frac{9}{q^2} \\ &= \frac{(q-3)(q+3)}{q^2}. \end{aligned}$$

Comme $q + 3 > 0$, $C_M'(q)$ a le signe de $q - 3$: C_M décroît sur $]0, 3]$ et croît sur $[3, +\infty[$.

Le coût moyen est minimal pour 3 centaines : $C_M(3) = 3 + 2 + 3 = 8$ milliers de dirhams la centaine, soit 80 dirhams par étagère.

La méthode et le nombre de solutions

Méthode : résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

1. **Traduis** : les solutions de $f(x) = c$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée c. Celles de $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$, ou la coupe.

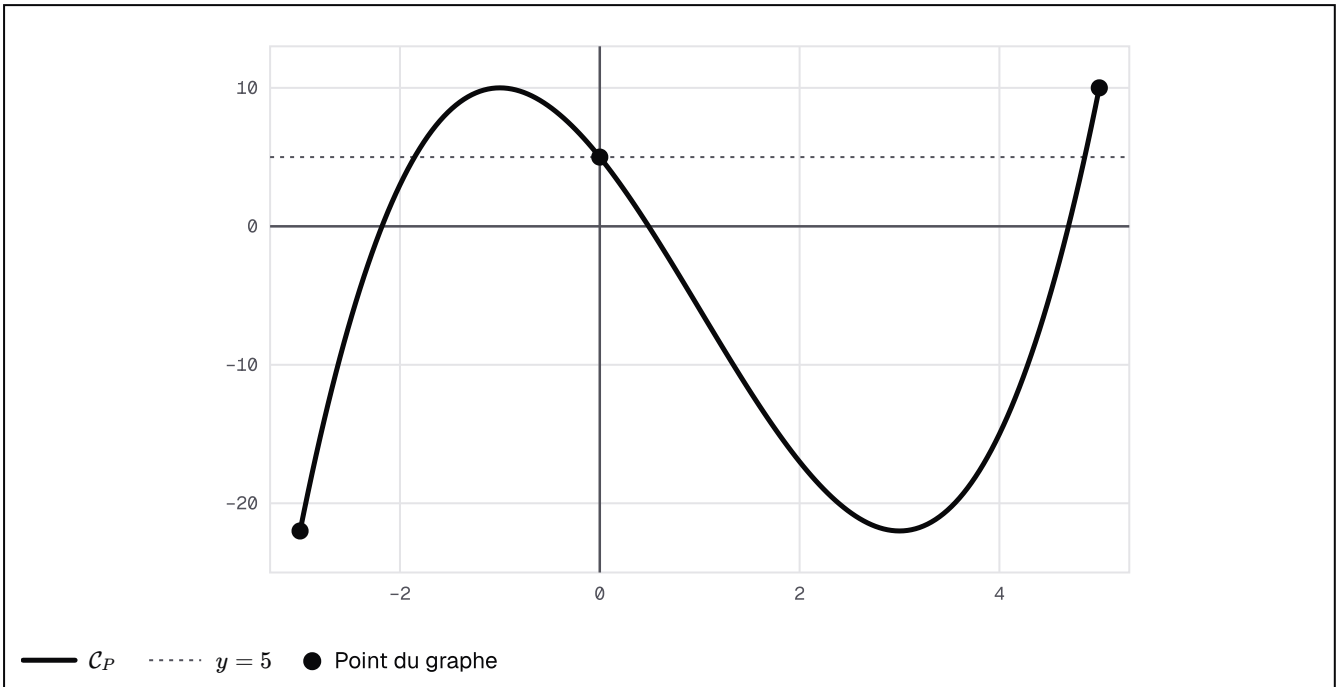
2. **Trace** la droite d'équation $y = c$, ou la courbe $\mathcal{C}_g$.
3. **Lis** les abscisses des points d'intersection et les intervalles ; **contrôle** par le calcul quand c'est possible.

Exemple : compter des solutions sur une courbe

Combien de solutions l'équation $P(x) = 5$ a-t-elle, avec $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$?

Lecture. Sur la figure de la section sur la concavité, la droite d'équation $y = 5$ coupe $\mathcal{C}_P$ en trois points : trois solutions.

Calcul. Pour tout réel x, $P(x) = 5$ équivaut à $x^3 - 3x^2 - 9x = 0$, soit $x(x^2 - 3x - 9) = 0$. Le trinôme $x^2 - 3x - 9$ a pour discriminant 45, et $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Les solutions sont 0, $\dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$: le calcul confirme la lecture.



La droite d'équation y = 5 coupe la courbe de P(x) = x³ − 3x² − 9x + 5 en trois points, sur [−3, 5] : l'équation P(x) = 5 a trois solutions.

Vérifie : Une droite qui touche la courbe

Sur la figure de la courbe de P, combien de solutions l'équation $P(x) = 10$ a-t-elle dans $[-3, 5]$?

A. Une seule.

Faux.
La droite d'équation $y = 10$ touche aussi la courbe en son sommet, en $x = -1$.

B. Trois.

Faux.
Au sommet, la droite touche la courbe sans la traverser : un seul point, pas deux.

C. Aucune.
Faux.
$P(5) = 10$: le point d'abscisse 5 convient déjà.

D. Deux.
Juste.
Juste : un point de contact au sommet, un point d'intersection en 5.

Correction
La droite d'équation $y = 10$ touche $\mathcal{C}_P$ en son sommet $(-1, 10)$ et la coupe au point d'abscisse 5. Il y a deux solutions : -1 et 5.

Contrôle par le calcul : pour tout réel x,

$$\begin{aligned} &P(x) - 10 \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \\ &= (x+1)^2(x-5). \end{aligned}$$

Une inéquation, puis à toi

Exemple : une inéquation avec h

Résolvons $h(x) \leq 7$, avec $h(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-4}$.

Lecture. Sur la figure de h, la droite d'équation $y = 7$ touche le morceau de droite en son creux $(6, 7)$. Tout le morceau de gauche est en dessous, sous son sommet d'ordonnée -1. On lit :

$$S =]-\infty, 4[\cup \{6\}.$$

Calcul. Pour tout $x \neq 4$:

$$h(x) - 7 = \frac{(x-6)^2}{x-4}.$$

Ce quotient est négatif ou nul exactement pour $x < 4$ et pour $x = 6$: le calcul confirme la lecture.

À toi : Une inéquation avec f

Avec la figure des asymptotes de f, où $f(x) = x + 1 + \dfrac{9}{x-2}$, résous graphiquement $f(x) \geq 13$.
Contrôle ensuite par le calcul. Rédige sur ton cahier, puis compare avec la correction.

Indice 1
Trace la droite d'équation $y = 13$ et cherche où la courbe est au-dessus.
Indice 2
Pour le contrôle : $f(x) - 13 = \dfrac{x^2 - 14x + 33}{x-2} = \dfrac{(x-3)(x-11)}{x-2}$.

Indice 3

Point délicat : que fait la courbe à gauche de 2, et la valeur 2 est-elle dans le domaine ?

Réponse

Lecture. La droite d'équation $y = 13$ coupe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 3 et 11, sur le morceau de droite. La courbe est au-dessus de cette droite sur $]2, 3]$ et sur $[11, +\infty[$.

À gauche de 2, $f(x) \leq -3$: aucune solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq 13$ est :

$$S =]2, 3] \cup [11, +\infty[\,.$$

Contrôle. Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} &f(x) - 13 \\ &= \frac{(x-3)(x-11)}{x-2}. \end{aligned}$$

Un tableau de signes donne ce quotient positif ou nul exactement sur $]2, 3]$ et sur $[11, +\infty[$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution graphique

En devoir, une lecture graphique se rédige en trois temps : ce qu'on trace, ce qu'on lit, ce qu'on conclut.

Pour les tables : « Les solutions de $R(q) \geq T(q)$ sont les abscisses des points où la droite de la recette est au-dessus de $\mathcal{C}_T$, ou la coupe. Par lecture graphique, $S = [2, 6]$. »

Si le calcul est possible, ajoute-le : il change une lecture en preuve.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel geste pour quelle question

- **Asymptote verticale** : une limite infinie en un réel a ; **horizontale** : une limite réelle à l'infini.
- **Asymptote oblique** : écrire $f(x) = ax + b + \varphi(x)$, puis contrôler que $\varphi(x)$ tend vers 0.
- **Polynôme de degré 2 ou 3** : aucune asymptote, des branches paraboliques.
- **Position** : le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- **Concavité** : le signe de f'' ; **inflexion** : f'' s'annule en changeant de signe.
- **Symétrie** : $f(2a - x) = f(x)$ pour un axe, $f(2a - x) + f(x) = 2b$ pour un centre.
- **Résolution graphique** : tracer, lire les abscisses, contrôler par le calcul.

Le mot du prof. Une courbe se prépare comme un plan d'atelier : les repères d'abord, le trait ensuite. Avant chaque conclusion, écris la limite ou le signe qui la justifie, puis nomme la propriété employée. Le Résumé du chapitre et les exercices t'attendent pour t'entraîner.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Étude et représentation des fonctions » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)