BURHAN

Résumé : Équations, inéquations et systèmes

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/resume

Chapitre	Semestre
Équations, inéquations et systèmes	Semestre 1

Équation du second degré

> **À retenir : Un rappel au service de l'économie**
>
> Tu as déjà résolu des équations du second degré : ce chapitre les reprend pour répondre à des questions d'entreprise.
>
> À partir de quelle quantité un bénéfice devient-il positif ? Le discriminant décide : son signe donne le nombre de solutions.

Définition : Trinôme du second degré et discriminant

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ s'appelle un **trinôme du second degré** (d'inconnue x). Son **discriminant** est le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Une **racine** du trinôme est un réel x tel que $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Solutions de l'équation du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- si $\Delta > 0$, a **deux** solutions distinctes, $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, a **une seule** solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, n'a **aucune** solution.

Propriété : Factorisation du trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$: pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: le trinôme ne peut pas s'écrire comme un produit de deux facteurs du premier degré.

Méthode : résoudre une équation du second degré

1. **Écris** l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et relève a, b, c avec leur signe.
2. **Cas simples** : si $c = 0$, mets x en facteur ; si $b = 0$, isole x^2.
3. **Sinon**, calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. **Conclus** selon le signe de Δ : deux solutions, une seule ou aucune.
5. **Contrôle** en remplaçant x par chaque solution dans l'équation de départ.

Exemple

Énoncé. Résous $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Discriminant. Ici $a = 2$, $b = -7$ et $c = 3$, donc

$$\begin{aligned}\Delta &= (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 \\ &= 49 - 24 = 25.\end{aligned}$$

Solutions. Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{7 + 5}{4} = 3.\end{aligned}$$

Donc $S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.

Factorisation. D'après la factorisation du trinôme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&2x^2 - 7x + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) \\ &= (2x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Résous $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 \\ &= 144 - 144 = 0.\end{aligned}$$

Solution. Comme $\Delta = 0$, il y en a une seule :

$$x_0 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Pour tout réel x, le trinôme s'écrit alors

$$\begin{aligned} &9x^2 - 12x + 4 \\ &= 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = (3x-2)^2. \end{aligned}$$

Attention : Relever chaque coefficient avec son signe

Dans $3x^2 - 4x - 7 = 0$, on a $b = -4$ et $c = -7$. Avec les bons signes, $\Delta = 16 + 84 = 100$: deux solutions, -1 et $\frac{7}{3}$.

En prenant $c = 7$ par erreur, on trouverait $\Delta = 16 - 84 = -68$. On conclurait alors à tort qu'il n'y a aucune solution.

Range aussi les termes avant de lire : dans $4 + 3x - x^2 = 0$, on a $a = -1$, $b = 3$ et $c = 4$, et non $a = 4$.

Signe du trinôme et inéquations

Propriété : Signe du trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: pour tout réel x, $f(x)$ est **du signe de** a.
- Si $\Delta = 0$: $f(x_0) = 0$, et pour tout réel $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$ les deux racines : $f(x)$ est du signe de a pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$, du **signe contraire** de celui de a pour $x_1 < x < x_2$, et nul en x_1 et en x_2.

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Ramène** l'inéquation à la forme $ax^2 + bx + c > 0$, ou avec $<, \geq, \leq$.
2. **Cherche** les racines grâce au discriminant.
3. **Dresse** le tableau de signes du trinôme : hors de l'intervalle des racines, le signe est celui de a ; strictement entre les racines, c'est l'autre signe.
4. **Lis** l'ensemble des solutions, avec des crochets fermés si l'inégalité est large.

Exemple

Énoncé. Résous $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Racines. Ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = 8$, donc

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 \\ &= 4 + 32 = 36. \end{aligned}$$

Les racines sont $\frac{-2+6}{-2} = -2$ et $\frac{-2-6}{-2} = 4$.

Signe. Ici $a = -1 < 0$: d'après le signe du trinôme, hors de l'intervalle des racines, l'expression prend le signe de a, donc elle y est strictement négative ; strictement entre les racines, elle est strictement positive.

Conclusion. L'inégalité est large, donc les racines sont incluses :

$$S = [-2; 4]\,.$$

Exemple : Une zone de bénéfice

Situation fictive. Une petite entreprise vend x centaines d'articles. Son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut $B(x) = -2x^2 + 22x - 48$.

Racines. Ici $a = -2$, $b = 22$ et $c = -48$, donc

$$\begin{aligned}\Delta &= 22^2 \\ &\quad - 4 \times (-2) \times (-48) \\ &= 484 - 384 = 100.\end{aligned}$$

Les racines sont $\frac{-22+10}{-4} = 3$ et $\frac{-22-10}{-4} = 8$.

Signe. Comme $a = -2 < 0$, d'après le signe du trinôme, $B(x) > 0$ strictement entre les racines.

Conclusion. L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle vend entre 300 et 800 articles, bornes exclues.

Attention : Entre les racines, le signe contraire de a

Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour racines -2 et 3, et $a = 1 > 0$. Il est donc négatif entre les racines : l'inéquation $x^2 - x - 6 < 0$ a pour ensemble de solutions $]-2; 3[$.

Contrôle avec $x = 0$: $0 - 0 - 6 = -6 < 0$.

Répondre $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$ inverserait les signes.

Méthode : se ramener au second degré

1. **Équation bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: pose $X = x^2$, résous en X, puis garde les seules valeurs $X \geq 0$.
2. **Quotient** : note les valeurs interdites, qui annulent le dénominateur.
3. **Inéquation quotient** : passe tout dans un membre et réduis au même dénominateur, sans multiplier par une expression de signe inconnu.
4. **Tableau de signes** : une ligne par facteur, puis la ligne du produit ou du quotient.

Exemple

Énoncé. Résous $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Changement d'inconnue. On pose $X = x^2$. L'équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$. Ici $\Delta = 9 + 16 = 25$, d'où $X = -1$ ou $X = 4$.

Retour à x. Un carré étant positif ou nul, l'équation $x^2 = -1$ n'a aucune solution ; $x^2 = 4$ donne $x = -2$ ou $x = 2$.

Conclusion. $S = \{-2; 2\}$.

Exemple

Énoncé. Résous $\dfrac{x-5}{x+1} \leq 2$.

Valeur interdite. Le dénominateur s'annule en -1 : on suppose $x \neq -1$.

Un seul membre. Pour tout réel $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x+1} - 2 &= \frac{x-5-2x-2}{x+1} \\ &= \frac{-x-7}{x+1}.\end{aligned}$$

L'inéquation équivaut donc à $\dfrac{-x-7}{x+1} \leq 0$.

Signes. Le numérateur $-x-7$ s'annule en -7 et le dénominateur $x+1$ en -1. D'après un tableau de signes, le quotient est négatif ou nul pour $x \leq -7$ et pour $x > -1$.

Conclusion.

$$S =]-\infty; -7] \cup]-1; +\infty[\,.$$

Attention : Ne pas multiplier par une expression de signe inconnu

Dans l'exemple précédent, multiplier les deux membres par $x+1$ donnerait $x - 5 \leq 2x + 2$, soit $x \geq -7$.

C'est faux : pour $x = -3$, on obtient $\dfrac{-8}{-2} = 4$, qui n'est pas inférieur ou égal à 2.

Le signe de $x+1$ change en -1 : on ne multiplie pas par cette expression.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

Définition : Système de deux équations linéaires à deux inconnues et déterminant

Soit a, b, c, a', b', c' six réels. Le système

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

d'inconnues réelles x et y est un **système linéaire de deux équations à deux inconnues**. Une **solution** de (S) est un couple $(x;y)$ de réels qui vérifie les deux équations.

Le **déterminant** de (S) est le réel

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Propriété : Méthode du déterminant

Avec les notations de la définition du système (S), si $D \neq 0$, le système (S) a une **unique** solution $(x;y)$:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D},$$

où les réels D_x et D_y sont donnés par

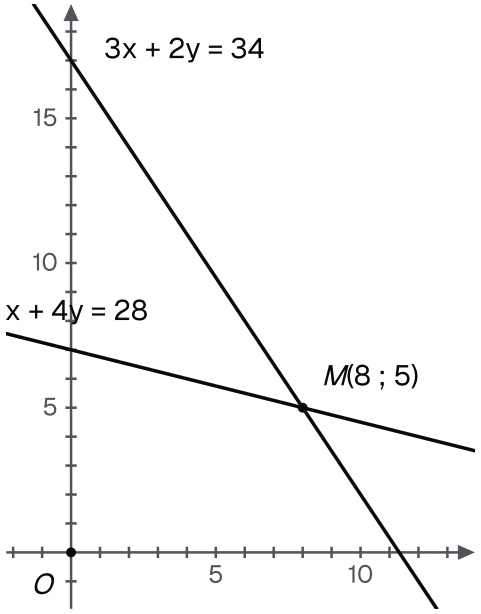
$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

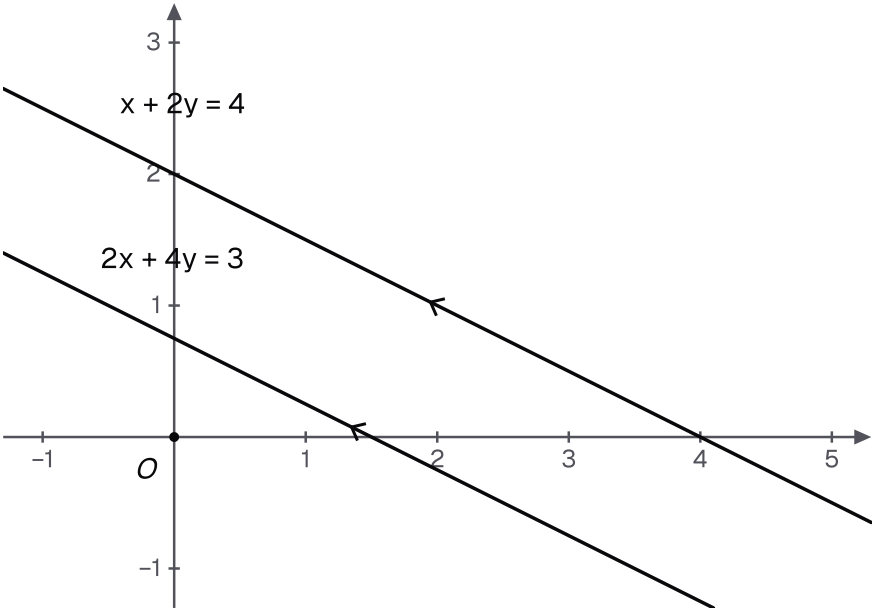
Propriété : Interprétation graphique d'un système de deux équations

Le plan est muni d'un repère. On suppose $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$. Les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont alors celles de deux droites (d) et (d'), et les solutions du système (S) sont les couples de coordonnées des points communs à (d) et (d').

- Si $D \neq 0$, les droites (d) et (d') sont **sécantes** : (S) a une seule solution.
- Si $D = 0$, les droites sont **parallèles** : soit strictement parallèles, et (S) n'a aucune solution ; soit confondues, et (S) a une infinité de solutions.



Cas D ≠ 0 : deux droites sécantes, un seul point commun M, dont le couple de coordonnées est l'unique solution du système.



Cas D = 0 sans solution : deux droites de même direction, x + 2y = 4 et 2x + 4y = 3, qui ne se coupent pas.

Méthode : résoudre un système de deux équations

1. **Écris** chaque équation sous la forme $ax + by = c$.
2. **Calcule** le déterminant $D = ab' - a'b$.
3. **Si** $D \neq 0$, calcule D_x et D_y, puis $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$; la substitution ou la combinaison conviennent aussi.
4. **Si** $D = 0$, compare les deux équations : aucune solution ou une infinité.

5. **Vérifie** le couple trouvé dans les deux équations.

Exemple : Le prix de deux articles

Situation fictive. Une papeterie vend des cahiers à x dirhams et des stylos à y dirhams. Trois cahiers et deux stylos coûtent 39 dirhams ; deux cahiers et cinq stylos coûtent 48 dirhams.

Système.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 39 \\ 2x + 5y = 48 \end{cases}$$

Déterminants. Le déterminant du système vaut

$$\begin{aligned} D &= 3 \times 5 - 2 \times 2 \\ &= 15 - 4 = 11. \end{aligned}$$

Il est non nul. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} D_x &= 39 \times 5 - 48 \times 2 \\ &= 195 - 96 = 99, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= 3 \times 48 - 2 \times 39 \\ &= 144 - 78 = 66. \end{aligned}$$

Solution. D'après la méthode du déterminant, $x = \dfrac{99}{11}$ et $y = \dfrac{66}{11}$, donc $x = 9$ et $y = 6$: un cahier coûte 9 dirhams et un stylo 6 dirhams.

Attention : Déterminant nul ne veut pas dire « aucune solution »

Considère le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases}$$

Son déterminant est nul :

$$\begin{aligned} D &= 2 \times 6 - (-4) \times (-3) \\ &= 12 - 12 = 0. \end{aligned}$$

Pourtant, la seconde équation est la première multipliée par -2. Les droites sont confondues : le système a une infinité de solutions, par exemple $(2 ; 0)$ et $(5 ; 2)$.

Avec le second membre 5 au lieu de -8, les droites seraient strictement parallèles, sans aucune solution.

Trois ou quatre inconnues : la méthode de Gauss

Définition : Système linéaire de n équations à n inconnues, systèmes équivalents, système triangulaire

Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq 4$.

- Un **système linéaire de n équations à n inconnues** est un système dont chaque équation s'écrit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, où les **coefficients** $a_1, \ldots, a_n$ et le **second membre** b sont des réels. Pour $n = 3$, on note en général les inconnues x, y, z ; pour $n = 4$, x, y, z, t. Une **solution** est une liste de n réels, écrite $(x; y; z)$ pour $n = 3$, qui vérifie toutes les équations.
- Deux systèmes sont **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.
- Un système est **triangulaire** lorsque, pour k allant de 2 à n, la k-ième équation ne contient aucune des $k - 1$ premières inconnues.

Par exemple, le système suivant est triangulaire :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Propriété : Opérations élémentaires sur les équations d'un système

Chacune des opérations suivantes transforme un système linéaire en un système **équivalent** :

1. échanger deux équations ;
2. multiplier les deux membres d'une équation par un réel **non nul** ;
3. remplacer une équation L_i par $L_i + kL_j$, où L_j est une **autre** équation du système, gardée telle quelle, et k un réel ; on note cette opération $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Propriété : Résolution d'un système triangulaire par remontée

Soit un système triangulaire de n équations à n inconnues ($2 \leq n \leq 4$) dans lequel, pour chaque k, le coefficient de la k-ième inconnue dans la k-ième équation est **non nul**. Alors ce système a une **unique** solution.

On l'obtient par **remontée** : la dernière équation donne la dernière inconnue, puis chaque équation, de la dernière à la première, donne l'inconnue correspondante en remplaçant celles déjà calculées.

Méthode : Méthode de Gauss

1. **Choisis** un pivot : une équation où le coefficient de x vaut 1 si possible, placée en première ligne.
2. **Élimine** x des autres équations par des opérations $L_i \leftarrow L_i + kL_1$.
3. **Recommence** avec y sur les équations restantes, puis avec z : le système devient triangulaire.
4. **Remonte** : la dernière équation donne la dernière inconnue, puis tu remplaces dans les précédentes.

5. **Vérifie** la solution dans chaque équation de départ.

Exemple : Un système de trois équations

Énoncé. Résous le système

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-z=-2 \\ x-2y+2z=10 \end{cases}$$

Élimination de x. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $y-3z=-10$; l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $-3y+z=6$.

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ donne $-8z=-24$. Le système est devenu triangulaire :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ y-3z=-10 \\ -8z=-24 \end{cases}$$

Remontée. D'après la résolution par remontée, $z=3$, puis $y=-10+3\times 3=-1$, puis $x=4-(-1)-3=2$.

Conclusion. $S=\{(2;-1;3)\}$.

Attention : Une opération élémentaire à la fois

Le système

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

a pour unique solution $(2;1)$. Remplacer en même temps L_1 par L_1-L_2 et L_2 par L_2-L_1 donne

$$\begin{cases} 2y=2 \\ -2y=-2 \end{cases}$$

Ce nouveau système a une infinité de solutions : il n'est plus équivalent au premier.

Chaque opération garde L_j intacte ; fais-les l'une après l'autre.

Remarque : Aucune solution ou une infinité

Si une ligne devient $0=k$ avec $k\neq 0$, le système n'a aucune solution. Par exemple, dans le système

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=6 \end{cases}$$

les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donnent $y + 2z = 3$ et $y + 2z = 2$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $0 = -1$: aucune solution.

Si une ligne devient $0 = 0$ et qu'aucune autre n'est impossible, il y a une infinité de solutions.

Méthode : mettre un problème économique en équations

1. **Nomme** les inconnues avec leur unité, par exemple « x : prix d'un article, en dirhams ».
2. **Traduis** chaque donnée par une équation : une ressource, un coût ou une recette par ligne.
3. **Résous** le système, par le déterminant ou par la méthode de Gauss.
4. **Interprète** : la solution doit avoir un sens, avec des quantités positives. Conclus par une phrase.

Exemple : Le prix de trois articles

Situation fictive. Un magasin vend trois articles aux prix x, y et z dirhams. Un article de chaque sorte coûte 45 dirhams. Deux du premier, un du deuxième et trois du troisième coûtent 85 dirhams ; trois du premier, deux du deuxième et un du troisième, 100 dirhams.

Système.

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ 3x + 2y + z = 100 \end{cases}$$

Gauss.

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $-y + z = -5$;
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $-y - 2z = -35$;
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $-3z = -30$.

Remontée. D'après la résolution par remontée, $z = 10$, puis $y = z + 5 = 15$ et $x = 45 - 15 - 10 = 20$.

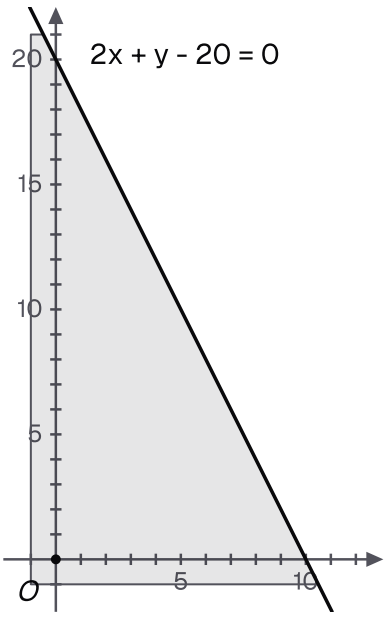
Conclusion. Les prix sont 20, 15 et 10 dirhams.

Inéquations à deux inconnues et régionnement

Propriété : Demi-plans définis par une inéquation du premier degré à deux inconnues

Le plan est muni d'un repère. Soit a, b, c trois réels avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, et (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$. La droite (D) partage le plan en deux **demi-plans** ouverts : l'un est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c > 0$, l'autre l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $ax + by + c < 0$.

En particulier, tous les points d'un même demi-plan donnent à $ax + by + c$ le même signe : il suffit de **tester un point** qui n'est pas sur (D) pour savoir quel demi-plan convient.



Pour 2x + y - 20, l'origine donne -20 : tout le demi-plan teinté, de son côté, rend l'expression négative, et le demi-plan blanc la rend positive.

Méthode : représenter les solutions d'un système d'inéquations

1. **Trace** chaque droite frontière à partir de deux de ses points.
2. **Choisis** un point de contrôle qui n'appartient pas à la droite ; $O(0;0)$ convient dès que la droite ne passe pas par l'origine.
3. **Garde** le demi-plan du point testé si l'inégalité est vraie en ce point, l'autre sinon.
4. **Hachure** la partie rejetée par chaque inéquation, et annonce cette convention sur la figure : la partie restée blanche est l'ensemble cherché.
5. **Lis** les sommets : chacun est l'intersection de deux droites frontières.

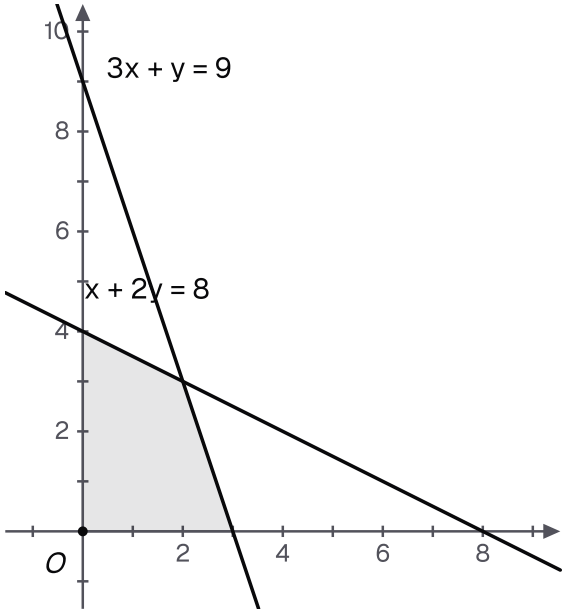
Exemple : Un polygone de solutions

Énoncé. Représente les points $M(x;y)$ tels que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 8$ et $3x + y \leq 9$.

Droites. La droite d'équation $x + 2y = 8$ passe par $(8;0)$ et $(0;4)$; celle d'équation $3x + y = 9$ passe par $(3;0)$ et $(0;9)$.

Test de l'origine. $0 \leq 8$ et $0 \leq 9$ sont vraies : pour chaque droite, on garde le demi-plan qui contient O.

Sommets. $O(0;0)$, $(3;0)$, $(0;4)$ et $(2;3)$. Le dernier est l'intersection des deux droites : $2 + 6 = 8$ et $6 + 3 = 9$.



Région teintée : les points qui vérifient x ≥ 0, y ≥ 0, x + 2y ≤ 8 et 3x + y ≤ 9, soit le quadrilatère de sommets O, (3 ; 0), (2 ; 3) et (0 ; 4).

Remarque : Quand l'origine est sur la droite

La droite d'équation $x - 2y = 0$ passe par O : tester l'origine ne permet pas de conclure. Teste plutôt $(1; 0)$: $1 - 2 \times 0 = 1 \geq 0$. Les solutions de $x - 2y \geq 0$ forment donc le demi-plan qui contient $(1; 0)$, droite comprise.

À retenir : Inégalité large ou stricte

Avec $\leq$ ou $\geq$, les points de la droite frontière sont des solutions : trace-la en trait plein. Avec $<$ ou $>$, ils ne le sont pas : trace-la en pointillés.

Par exemple, $(2; 3)$ vérifie $x + 2y \leq 8$, mais pas $x + 2y < 8$.

Programmation linéaire

Propriété : Optimum d'une fonction économique sur le polygone des contraintes

Le plan est muni d'un repère. On considère un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues x et y (les **contraintes**), dont l'ensemble des solutions est représenté par un polygone $\mathcal{P}$, non vide, appelé **polygone des contraintes**. Soit p et q deux réels et $z = px + qy$ la **fonction économique**.

Alors, lorsque le point $M(x; y)$ décrit $\mathcal{P}$, la valeur maximale et la valeur minimale de z sont atteintes en des **sommets** de $\mathcal{P}$.

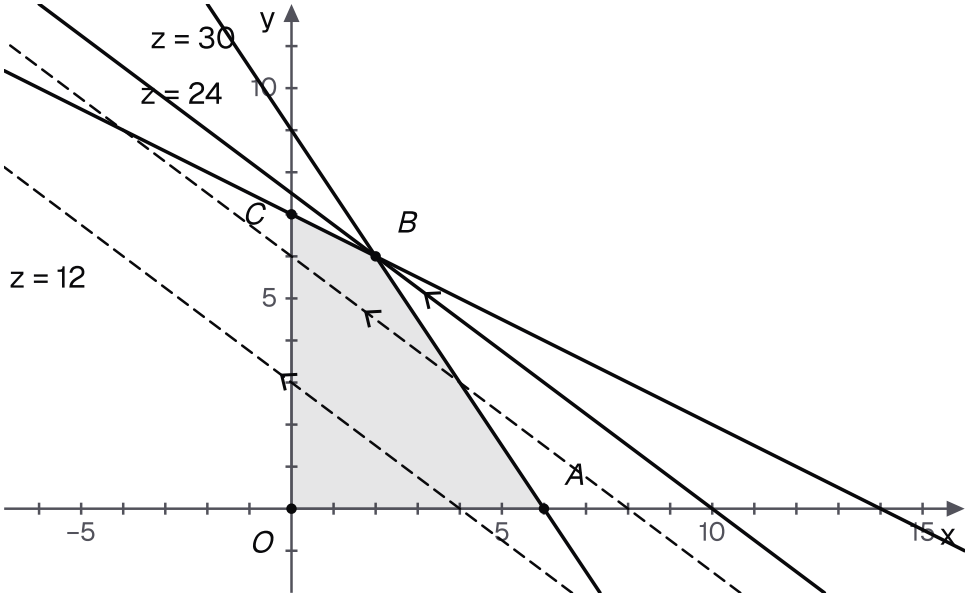


Illustration avec z = 3x + 4y sur le polygone OABC : les droites de niveau sont parallèles, et la plus haute qui touche encore le polygone passe par un sommet.

Méthode : résoudre un problème de programmation linéaire

1. **Choisis** les inconnues x et y, puis écris toutes les contraintes, sans oublier $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
2. **Écris** la fonction économique $z = px + qy$: bénéfice à maximiser ou coût à minimiser.
3. **Représente** le polygone des contraintes et calcule les coordonnées de ses sommets.
4. **Calcule** z en chaque sommet et retiens la plus grande ou la plus petite valeur.
5. **Conclus** par une phrase qui répond à la question posée.

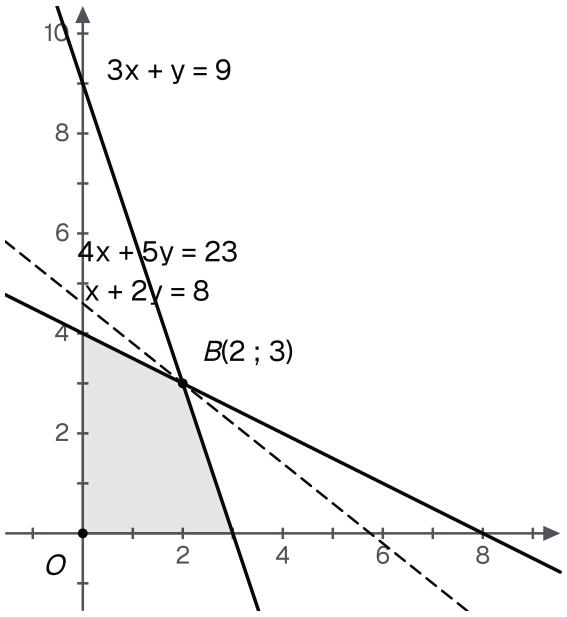
Exemple : Maximiser un bénéfice

Situation fictive. Un atelier fabrique x lots d'un produit A et y lots d'un produit B. Ses contraintes de temps et de matière sont celles du polygone précédent : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 8$ et $3x + y \leq 9$. Un lot rapporte 4 centaines de dirhams pour A et 5 pour B : $z = 4x + 5y$.

Valeurs aux sommets. D'après l'optimum d'une fonction économique, il suffit de calculer z aux sommets du polygone :

- $z = 0$ en O ;
- $z = 12$ en $(3; 0)$;
- $z = 20$ en $(0; 4)$;
- $z = 23$ en $(2; 3)$, car $4 \times 2 + 5 \times 3 = 23$.

Conclusion. Le bénéfice est maximal, $2\,300$ dirhams, pour 2 lots de A et 3 lots de B.



Le bénéfice z = 4x + 5y vaut 23 sur la droite en pointillés : elle touche le polygone au seul sommet B(2 ; 3), où z est maximal.

Attention : N'oublier aucune contrainte

Une quantité produite n'est jamais négative. Sans $x \geq 0$ et $y \geq 0$, le point $(-1; 4)$ vérifierait $x + 2y \leq 8$ et $3x + y \leq 9$, car $-1 + 8 = 7$ et $-3 + 4 = 1$.

Il ne correspond pourtant à aucune production. Relis l'énoncé et écris toutes les contraintes avant de tracer.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Résoudre** $ax^2 + bx + c = 0$: le discriminant.
- **Factoriser** un trinôme : ses racines.
- **Étudier un signe** ou résoudre une inéquation : le signe de a et un tableau de signes.
- **Équation bicarrée** : le changement d'inconnue $X = x^2$.
- **Inéquation quotient** : un seul membre, les valeurs interdites, un tableau de signes.
- **Deux équations, deux inconnues** : le déterminant, la substitution ou la combinaison.
- **Trois ou quatre inconnues** : la méthode de Gauss, puis la remontée.
- **Inéquations à deux inconnues** : la droite frontière et le test d'un point.
- **Optimiser** $z = px + qy$: les sommets du polygone des contraintes.

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Première racine, discriminant strictement positif

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Seconde racine, discriminant strictement positif

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Racine double, discriminant nul

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Factorisation, discriminant nul

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Factorisation, discriminant strictement positif

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Déterminant d'un système de deux équations

$$D = ab' - a'b$$

Déterminant associé à x

$$D_x = cb' - c'b$$

Déterminant associé à y

$$D_y = ac' - a'c$$

Solution unique, déterminant non nul

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Opération élémentaire

$$L_i \leftarrow L_i + kL_j$$

Fonction économique

$$z = px + qy$$

> **À retenir : Rédiger en devoir**
>
> Nomme chaque outil : « le discriminant est strictement positif », « par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ », « le point O vérifie l'inéquation ».
>
> Vérifie chaque solution dans l'énoncé de départ. Dans un problème économique, donne l'unité et conclus par une phrase.