BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le bénéfice d'une coopérative et sa zone de rentabilité

Situation fictive. Une coopérative produit et vend x tonnes d'un produit, avec $0 \leq x \leq 12$. Le coût de production, en milliers de dirhams, vaut $C(x) = x^2 + 2x + 20$. Chaque tonne est vendue 14 milliers de dirhams. On note $B(x)$ le bénéfice, en milliers de dirhams.

1. 0,75 pts

Montrer que $B(x) = -x^2 + 12x - 20$.

INDICE

Début : la recette vaut $14x$; le bénéfice est la recette moins le coût.

2. 1 pts

Calculer le discriminant de $B(x)$, puis résoudre l'équation $B(x) = 0$.

INDICE

Outil : lis a, b et c avec leur signe sur $B(x) = -x^2 + 12x - 20$, puis calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

3. 0,75 pts

En déduire que $B(x) = -(x - 2)(x - 10)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la factorisation du trinôme $a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a = -1$.

4. 1 pts

Déterminer la zone de rentabilité, c'est-à-dire les quantités pour lesquelles $B(x) > 0$.

INDICE

Outil : le signe du trinôme ; ici $a = -1 < 0$.

5. 1 pts

Montrer que $B(x) = 16 - (x - 6)^2$. En déduire le bénéfice maximal et la quantité correspondante.

INDICE

Début : développe $(x - 6)^2$. **Ensuite :** un carré est toujours positif ou nul.

6. 0,5 pts

Pour quelles quantités le bénéfice est-il d'au moins 7 milliers de dirhams ?

INDICE

Outil : la forme de la question 5 ; $(x - 6)^2 \leq 9$ équivaut à $-3 \leq x - 6 \leq 3$.

Exercice 2 5 pts

La production de trois produits par la méthode de Gauss

Situation fictive. Un atelier fabrique chaque semaine x objets du modèle A, y du modèle B et z du modèle C. Il utilise entièrement trois ressources :

- la découpe : 1 heure pour chaque objet, quel que soit le modèle ; 22 heures disponibles ;
- l'assemblage : 1 heure pour A, 2 heures pour B et 3 heures pour C ; 46 heures disponibles ;
- la matière : 2 kilogrammes pour A, 5 pour B et 7 pour C ; 110 kilogrammes disponibles.

1. 1 pts

Montrer que $(x ; y ; z)$ est solution du système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 22 \\ x + 2y + 3z = 46 \\ 2x + 5y + 7z = 110 \end{cases}$$

INDICE

Outil : une équation par ressource : la quantité utilisée égale la quantité disponible.

2. 1 pts

Effectuer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. Écrire le système obtenu.

INDICE

Outil : les opérations élémentaires donnent un système équivalent.

3. 1 pts

Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ et justifier que (S) a une unique solution.

INDICE

Outil : un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls a une unique solution.

4. 1 pts

En déduire le nombre d'objets de chaque modèle fabriqués chaque semaine.

INDICE

Outil : la remontée.

5. 1 pts

Vérifier la solution dans les trois équations de (S). Les objets A, B et C se vendent 300, 200 et 250 dirhams. Calculer la recette d'une semaine.

INDICE

Outil : remplace x, y et z ; puis recette = somme des quantités multipliées par les prix.

Exercice 3 — 5 pts

Deux modèles de paniers : une programmation linéaire

Situation fictive. Un artisan tresse chaque semaine x paniers ronds et y paniers carrés.

- Un panier rond demande 2 heures de tressage et 1 kilogramme d'osier ; un panier carré, 1 heure et 2 kilogrammes.
- Il dispose de 16 heures de tressage et de 14 kilogrammes d'osier par semaine.
- Il ne peut pas vendre plus de 6 paniers carrés par semaine.

Un panier rond rapporte 50 dirhams, un panier carré 60 dirhams.

1. — 1 pts

Montrer que les contraintes s'écrivent $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 16$, $x + 2y \leq 14$ et $y \leq 6$. Écrire la fonction économique z.

INDICE

Outil : une inéquation par ressource ; les quantités sont positives.

2. — 1 pts

Représenter le polygone des contraintes $\mathcal{P}$.

INDICE

Outil : deux points par droite frontière, puis le test de l'origine ; hachure la partie rejetée, la partie restée blanche est la solution.

3. — 1,5 pts

Montrer que les sommets de $\mathcal{P}$ sont $O(0;0)$, $E(8;0)$, $F(6;4)$, $G(2;6)$ et $H(0;6)$.

INDICE

Outil : pour F et G, résous le système formé par les équations des deux droites qui se coupent.

4. — 0,5 pts

Calculer la valeur de z en chaque sommet de $\mathcal{P}$.

INDICE

Outil : $z = 50x + 60y$.

5. — 1 pts

En déduire la production qui rend le bénéfice maximal. Reste-t-il du temps ou de l'osier ?

INDICE

Outil : l'optimum est atteint en un sommet ; puis remplace dans chaque contrainte.

Exercice 4 5 pts

Prix d'équilibre d'un marché et recette

Situation fictive. Sur un marché, pour un prix unitaire de p dirhams, avec $20 \leq p \leq 50$, la quantité demandée par les acheteurs et la quantité offerte par les vendeurs valent, en centaines d'unités :

$$q_d = 100 - 2p$$

et

$$q_o = 3p - 50.$$

Le marché est à l'équilibre lorsque la quantité demandée est égale à la quantité offerte ; on note alors q cette quantité commune.

1. 1 pts

Montrer que le couple $(p ; q)$ d'équilibre est solution du système

$$\begin{cases} 2p + q = 100 \\ 3p - q = 50 \end{cases}$$

Calculer son déterminant D.

INDICE

Début : écris $q = 100 - 2p$ et $q = 3p - 50$, puis passe les inconnues dans le premier membre.

2. 1 pts

En déduire le prix et la quantité d'équilibre.

INDICE

Outil : la méthode du déterminant, avec D_p et D_q.

3. 0,5 pts

Dans un repère, interpréter ce résultat à l'aide des droites d'équations $2p + q = 100$ et $3p - q = 50$.

INDICE

Outil : l'interprétation graphique d'un système de deux équations.

4. 1 pts

Les vendeurs écoulent la quantité demandée q_d. Montrer que leur recette, en centaines de dirhams, vaut $R(p) = -2p^2 + 100p$.

INDICE

Outil : recette = prix unitaire $\times$ quantité vendue.

5. 1,5 pts

Pour quels prix la recette est-elle d'au moins $1\,200$ centaines de dirhams ? Le prix d'équilibre convient-il ?

INDICE

Début : écris $R(p) \geq 1\,200$, puis divise par -2 en changeant le sens de l'inégalité.

Exercice 5 5 pts

Un système de quatre équations, pas à pas

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x + 2y + 2z + 3t = 23 \\ 2x + 4y + 5z + 5t = 45 \\ x + 2y + 3z + 5t = 34 \end{cases}$$

1. 1 pts

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.

INDICE

Outil : les opérations élémentaires ; vérifie chaque second membre.

2. 1 pts

Effectuer ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$.

INDICE

Outil : on utilise maintenant la nouvelle équation L_2 : $y + z + 2t = 13$.

3. 1 pts

Effectuer $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$. Montrer que (S) a une unique solution.

INDICE

Outil : un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls a une unique solution.

4. 1 pts

Résoudre (S).

INDICE

Outil : la remontée, de t jusqu'à x.

5. 0,5 pts

Vérifier la solution dans les quatre équations de (S).

INDICE

Outil : remplace x, y, z et t dans chaque équation de départ.

6. 0,5 pts

En déduire, sans nouveau calcul de Gauss, la solution du système (S') qui a les mêmes premiers membres que (S) et les seconds membres 20, 46, 90 et 68.

INDICE

Début : compare les seconds membres de (S') à ceux de (S), puis double chaque inconnue.