BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Entraînement	8

Exercice 1

Une inéquation quotient

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2} \leq 0.$$

1.

Calculer les racines du trinôme $x^2 - 4x - 5$ et préciser la valeur interdite.

INDICE

Outil : le discriminant pour le numérateur ; le dénominateur ne doit pas s'annuler.

2.

Donner le signe du quotient selon les valeurs de x.

INDICE

Outil : le signe du trinôme (ici $a = 1 > 0$) et le signe de $x - 2$, sur chacun des intervalles délimités par -1, 2 et 5.

3.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation.

INDICE

Outil : l'inégalité est large : les racines du numérateur sont solutions, la valeur interdite ne l'est jamais.

Exercice 2

Recette, coût et bénéfice d'un atelier

Situation fictive. Un atelier fabrique et vend x centaines d'objets, avec $0 \leq x \leq 30$. La recette et le coût, en centaines de dirhams, valent

$$R(x) = -2x^2 + 80x$$

et

$$C(x) = 20x + 400.$$

1.

Exprimer le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ en fonction de x.

INDICE

Outil : attention au signe devant chaque terme de $C(x)$.

2.

Pour quelles quantités l'atelier réalise-t-il un bénéfice strictement positif ?

INDICE

Outil : racines de B, puis signe du trinôme avec $a = -2$.

3.

L'atelier veut un bénéfice d'au moins $4\,200$ dirhams. Pour quelles quantités est-ce le cas ?

INDICE

Début : $4\,200$ dirhams font 42 centaines de dirhams ; écris $B(x) \geq 42$, puis divise par -2 en changeant le sens de l'inégalité.

Exercice 3

Deux sortes de paquets

Situation fictive. Une épicerie vend deux sortes de paquets de thé. Trois paquets de la première sorte et quatre de la seconde coûtent 166 dirhams. Cinq paquets de la première sorte et deux de la seconde coûtent 160 dirhams. On note x et y les prix, en dirhams, d'un paquet de chaque sorte.

1.

Traduire l'énoncé par un système de deux équations.

INDICE

Outil : une équation par achat, sous la forme $ax + by = c$.

2.

Résoudre ce système par la méthode du déterminant.

INDICE

Outil : calcule D, puis D_x et D_y.

3.

Un client dispose de 200 dirhams. Peut-il acheter quatre paquets de chaque sorte ? Combien lui reste-t-il ?

INDICE

Outil : utilise les prix trouvés à la question 2.

Exercice 4

La méthode de Gauss avec un échange de lignes

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = 9 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

1.

Échanger les deux premières équations, puis éliminer x des deux dernières.

INDICE

Outil : place en tête une équation où le coefficient de x vaut 1, puis élimine x des deux autres.

2.

Rendre le système triangulaire.

INDICE

Début : les coefficients de la troisième équation sont multiples de 5. **Point délicat :** choisis ensuite comme pivot une équation où y a pour coefficient 1.

3.

Résoudre (S) et vérifier la solution.

INDICE

Outil : la remontée, puis un contrôle dans les équations de départ.

Exercice 5

Un système de quatre équations

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ x + 2y - z + t = 8 \\ 2x + y + 3z + 3t = 11 \\ x + y + 2z - t = -2 \end{cases}$$

1.

Éliminer x des trois dernières équations.

INDICE

Outil : élimine x avec L_1 : une opération par équation à modifier ; transforme aussi les seconds membres.

2.

Poursuivre l'élimination pour rendre le système triangulaire. Justifier.

INDICE

Outil : utilise L_2 pour éliminer y de L_3, puis la nouvelle L_3 pour éliminer z de L_4.

3.

Résoudre (S).

INDICE

Outil : la remontée, de t jusqu'à x.

Exercice 6

Trois tickets de caisse

Situation fictive. Une librairie vend des cahiers, des stylos et des règles. On note x, y et z leurs prix unitaires, en dirhams. Trois tickets de caisse indiquent :

- un cahier, quatre stylos et deux règles : 40 dirhams ;
- deux cahiers, sept stylos et trois règles : 71 dirhams ;
- trois cahiers, dix stylos et cinq règles : 106 dirhams.

1.

Traduire les trois tickets par un système de trois équations.

INDICE

Outil : une équation par ticket.

2.

Rendre ce système triangulaire par la méthode de Gauss, puis calculer le prix de chaque article.

INDICE

Début : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$; **ensuite :** élimine y de la troisième équation, puis remonte.

3.

On remplace le troisième ticket par : trois cahiers, onze stylos et cinq règles pour 112 dirhams. Que peut-on dire du nouveau système ?

INDICE

Début : garde L_1 et L_2, remplace L_3 par $L_3 - 3L_1$, puis compare avec $L_2 - 2L_1$.

Exercice 7

Programmer la production de deux lots

Situation fictive. Un atelier fabrique x lots d'un produit A et y lots d'un produit B par jour.

- Un lot de A demande 1 heure de machine, 1 heure de montage et 2 kilogrammes de matière.
- Un lot de B demande 1 heure de machine, 3 heures de montage et 1 kilogramme de matière.
- Chaque jour, l'atelier dispose de 7 heures de machine, 15 heures de montage et 12 kilogrammes de matière.

Un lot de A rapporte 30 centaines de dirhams, un lot de B 40 centaines de dirhams.

1.

Écrire les contraintes et la fonction économique z à maximiser.

INDICE

Outil : une contrainte par ressource, plus les contraintes de signe.

2.

Représenter le polygone des contraintes et calculer les coordonnées de ses sommets.

INDICE

Début : trace les trois droites frontières et teste l'origine ; hachure la partie rejetée, la partie restée blanche est la solution. **Ensuite :** chaque sommet est l'intersection de deux droites.

3.

Déterminer la production qui rend le bénéfice maximal.

INDICE

Outil : l'optimum de la fonction économique est atteint en un sommet du polygone.

Exercice 8

Un polygone et un coût minimal

Le plan est muni d'un repère. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$$

1.

Représenter $\mathcal{P}$.

INDICE

Outil : test d'un point pour chaque droite frontière ; la droite $x - 2y = 0$ passe par l'origine, teste donc un autre point. Hachure la partie rejetée : la partie restée blanche est la solution.

2.

Calculer les coordonnées des sommets de $\mathcal{P}$. Pour le sommet situé sur les droites $x + y = 6$ et $x - 2y = 0$, utiliser la méthode du déterminant.

INDICE

Outil : chaque sommet est l'intersection de deux droites frontières ; vérifie ensuite qu'il satisfait les autres contraintes.

3.

Le coût fictif d'un choix $(x;y)$ vaut $z = 3x + 2y$. En quel point de $\mathcal{P}$ ce coût est-il minimal ?

INDICE

Outil : l'optimum est atteint en un sommet ; compare les valeurs de z.