BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Application	10

Exercice 1

Résoudre, puis factoriser un trinôme

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

INDICE

Outil : relève a, b et c avec leur signe, puis calcule le discriminant.

CORRIGÉ

Coefficients. On a $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) \\ &= 25 + 24 = 49\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions, et $\sqrt{\Delta} = 7$.

Solutions.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-5 - 7}{6} = -2 \\ x_2 &= \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Contrôle. $3 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{-2 ; \frac{1}{3}\right\}$.

2.

En déduire une factorisation du trinôme $3x^2 + 5x - 2$.

INDICE

Outil : quand le discriminant est strictement positif, le trinôme s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$.

CORRIGÉ

Le discriminant est strictement positif et les racines sont -2 et $\frac{1}{3}$. D'après la factorisation du trinôme, avec $a = 3$, $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{3}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&3x^2 + 5x - 2 \\ &= 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ &= (x + 2)(3x - 1)\end{aligned}$$

Contrôle. En développant :

$$\begin{aligned}&(x + 2)(3x - 1) \\ &= 3x^2 - x + 6x - 2 \\ &= 3x^2 + 5x - 2\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$.

Exercice 2

Trois équations, trois situations

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$.

INDICE

Outil : le discriminant ; s'il est nul, une seule solution.

CORRIGÉ

Discriminant. Avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 9$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 \\ &= 36 - 36 = 0\end{aligned}$$

Solution. Comme $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Contrôle. Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, qui ne s'annule que pour $x = 3$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{3\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + x + 4 = 0$.

INDICE

Outil : le signe du discriminant.

CORRIGÉ

Discriminant. Avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = 4$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times 2 \times 4 \\ &= 1 - 32 = -31\end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \varnothing$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

INDICE

Outil : pose $X = x^2$, résous l'équation en X, puis reviens à x ; un carré n'est jamais négatif.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. On pose $X = x^2$. L'équation devient :

$$X^2 - 5X - 36 = 0$$

Équation en X. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-36)$, soit $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Les deux solutions en X sont :

$$X_1 = \frac{5 - 13}{2} = -4$$
$$X_2 = \frac{5 + 13}{2} = 9$$

Retour à x.

- L'équation $x^2 = -4$ n'a aucune solution, car un carré n'est jamais strictement négatif.
- L'équation $x^2 = 9$ donne $x = -3$ ou $x = 3$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{-3; 3\}$.

Exercice 3

Le signe d'un trinôme

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.

1.

Calculer les racines de f.

INDICE

Outil : le discriminant, avec $a = -2$.

CORRIGÉ

Discriminant. On a $a = -2$, $b = 5$ et $c = 3$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 \\ &= 25 + 24 = 49\end{aligned}$$

Racines. Comme $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 7$, le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{-4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-5 - 7}{-4} = 3$$

Conclusion. Les racines de f sont $-\dfrac{1}{2}$ et 3.

2.

Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Outil : le signe du trinôme : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles.

CORRIGÉ

Ici $a = -2 < 0$ et $\Delta > 0$. D'après le signe du trinôme, $f(x)$ a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire entre elles. Pour tout réel x :

- si $x < -\dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$, alors $f(x) < 0$;
- si $-\dfrac{1}{2} < x < 3$, alors $f(x) > 0$;
- $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et pour $x = 3$.

Contrôle. $f(0) = 3 > 0$, et 0 est bien compris entre les racines.

Conclusion. $f(x)$ est strictement négatif pour $x < -\dfrac{1}{2}$ et pour $x > 3$, strictement positif pour $-\dfrac{1}{2} < x < 3$, et nul en $-\dfrac{1}{2}$ et en 3.

3.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

INDICE

Outil : lis la réponse de la question 2 ; l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $f(x) > 0$ exactement lorsque x est strictement compris entre les racines $-\frac{1}{2}$ et 3. L'inégalité est stricte : les racines ne sont pas solutions.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est :

$$S = \left]-\frac{1}{2}; 3\right[$$

Exercice 4

Trois inéquations

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + 4x - 12 \leq 0$.

INDICE

Outil : cherche les racines, puis applique le signe du trinôme.

CORRIGÉ

Racines. Avec $a = 1, b = 4$ et $c = -12$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4 \times 1 \times (-12) \\ &= 16 + 48 = 64\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{\Delta} = 8$, les racines sont $\dfrac{-4 - 8}{2} = -6$ et $\dfrac{-4 + 8}{2} = 2$.

Signe. Ici $a = 1 > 0$: d'après le signe du trinôme, $x^2 + 4x - 12$ est négatif ou nul entre les racines, bornes comprises.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = [-6; 2]$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 2x + 5 > 0$.

INDICE

Outil : quand $\Delta < 0$, l'expression ne s'annule jamais et a, pour tout réel, le même signe que a.

CORRIGÉ

Discriminant. Avec $a = 1, b = -2$ et $c = 5$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ &= 4 - 20 = -16\end{aligned}$$

Signe. On a $\Delta < 0$ et $a = 1 > 0$. D'après le signe du trinôme, $x^2 - 2x + 5$ ne s'annule jamais et a le signe de a : pour tout réel x, $x^2 - 2x + 5 > 0$.

Conclusion. Tout réel est solution : $S = \mathbb{R}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x-6}{x+4} \geq 0$.

INDICE

Outil : un tableau de signes avec une ligne pour $2x-6$, une pour $x+4$; n'oublie pas la valeur interdite.

CORRIGÉ

Valeur interdite. Le quotient est défini lorsque $x+4 \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq -4$.

Signe de chaque terme.

- $2x-6$ est négatif pour $x < 3$, nul pour $x = 3$ et positif pour $x > 3$.
- $x+4$ est négatif pour $x < -4$ et positif pour $x > -4$.

Signe du quotient. D'après la règle des signes, le quotient est :

- positif pour $x < -4$, les deux termes étant négatifs ;
- négatif pour $-4 < x < 3$;
- nul pour $x = 3$;
- positif pour $x > 3$.

Conclusion. Le quotient est positif ou nul pour $x < -4$ et pour $x \geq 3$, la valeur -4 étant exclue. L'ensemble des solutions est :

$$S =]-\infty ; -4[\cup [3 ; +\infty[$$

Exercice 5

La méthode du déterminant

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$

1.

Calculer le déterminant D de (S). Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : $D = ab' - a'b$.

CORRIGÉ

Avec $a = 4, b = 3, a' = 5$ et $b' = -2$:

$$\begin{aligned} D &= 4 \times (-2) - 5 \times 3 \\ &= -8 - 15 = -23 \end{aligned}$$

Conclusion. $D \neq 0$: d'après la méthode du déterminant, (S) a une unique solution.

2.

Calculer D_x et D_y, puis résoudre (S).

INDICE

Outil : $D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$; puis $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$.

CORRIGÉ

Déterminants. Avec $c = 18$ et $c' = 11$:

$$\begin{aligned} D_x &= 18 \times (-2) - 11 \times 3 \\ &= -36 - 33 = -69 \\ D_y &= 4 \times 11 - 5 \times 18 \\ &= 44 - 90 = -46 \end{aligned}$$

Solution.

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-69}{-23} = 3 \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2 \end{aligned}$$

Contrôle. $4 \times 3 + 3 \times 2 = 18$ et $5 \times 3 - 2 \times 2 = 11$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de (S) est $S = \{(3; 2)\}$.

Exercice 6

Combien de solutions ?

Le plan est muni d'un repère. On considère les trois systèmes suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -3x + 6y = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 6x - 4y = 10 \\ 9x - 6y = 15 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

1.

Calculer le déterminant de (S_1), puis résoudre (S_1).

INDICE

Outil : si le déterminant est nul, multiplie la première équation par un réel bien choisi et compare-la à la seconde.

CORRIGÉ

Déterminant.

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 6 - (-3) \times (-2) \\ &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Comparaison des équations. En multipliant la première équation par -3, on obtient $-3x + 6y = -9$. Un couple solution vérifierait donc à la fois $-3x + 6y = -9$ et $-3x + 6y = 1$, d'où $-9 = 1$: c'est impossible.

Conclusion. (S_1) n'a aucune solution : $S = \varnothing$. Les deux droites associées sont strictement parallèles.

2.

Même question pour (S_2).

INDICE

Outil : même démarche ; compare les coefficients de x pour trouver le réel qui transforme la première équation en la seconde.

CORRIGÉ

Déterminant.

$$\begin{aligned} D &= 6 \times (-6) - 9 \times (-4) \\ &= -36 + 36 = 0 \end{aligned}$$

Comparaison des équations. En multipliant la première équation par $\dfrac{3}{2}$, on obtient exactement la seconde, $9x - 6y = 15$. Les deux équations ont donc les mêmes solutions.

Conclusion. Les deux droites sont confondues : (S_2) a une infinité de solutions, les couples $(x ; y)$ tels que $6x - 4y = 10$, par exemple $(1 ; -1)$ et $(3 ; 2)$.

3.

Calculer le déterminant de (S_3), puis le résoudre et interpréter le résultat.

INDICE

Outil : déterminant non nul ; ensuite, une combinaison des deux équations élimine y.

CORRIGÉ

Déterminant.

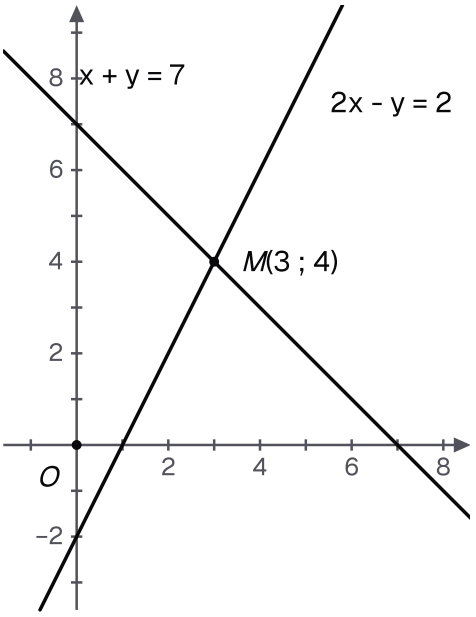
$$\begin{aligned} D &= 1 \times (-1) - 2 \times 1 \\ &= -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Les deux droites sont donc sécantes et (S_3) a une unique solution.

Résolution. En additionnant membre à membre les deux équations, on élimine y : $3x = 9$, donc $x = 3$. La première équation donne alors $y = 7 - 3 = 4$.

Contrôle. $3 + 4 = 7$ et $2 \times 3 - 4 = 2$.

Conclusion. $S = \{(3; 4)\}$: les deux droites se coupent au point de coordonnées $(3; 4)$.



Les droites d'équations x + y = 7 et 2x - y = 2 se coupent au point de coordonnées (3 ; 4), unique solution du système.

Exercice 7

Remonter un système triangulaire

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3y - z = 7 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

1.

Justifier que (S) est triangulaire et qu'il a une unique solution.

INDICE

Outil : la définition d'un système triangulaire, puis la résolution par remontée.

CORRIGÉ

Forme triangulaire. La deuxième équation ne contient pas x, et la troisième ne contient ni x ni y : (S) est triangulaire.

Coefficients. Le coefficient de x dans la première équation, celui de y dans la deuxième et celui de z dans la troisième valent 1, 3 et 4 : aucun n'est nul.

Conclusion. D'après la résolution par remontée, le système triangulaire (S) a une unique solution.

2.

Résoudre (S).

INDICE

Outil : commence par la dernière équation, puis remonte.

CORRIGÉ

Remontée.

- La troisième équation, $4z = 8$, donne $z = 2$.
- La deuxième donne $3y = 7 + z = 9$, donc $y = 3$.
- La première donne $x = 5 + y - 2z = 5 + 3 - 4 = 4$.

Contrôle. $4 - 3 + 4 = 5$, $9 - 2 = 7$ et $4 \times 2 = 8$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de (S) est $S = \{(4; 3; 2)\}$.

Exercice 8

Les étapes de la méthode de Gauss

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

1.

Effectuer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Écrire le système obtenu.

INDICE

Outil : soustrais membre à membre, coefficient par coefficient, sans oublier les seconds membres.

CORRIGÉ

Opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. Coefficient par coefficient :

$$\begin{aligned}(2-2)x + (-1-2)y \\ + (1+2)z = 9 - 0\end{aligned}$$

Le terme en x disparaît : on obtient la nouvelle deuxième équation, soit $-3y + 3z = 9$.

Opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. De même :

$$\begin{aligned}(1-1)x + (2-1)y \\ + (1+1)z = 9 - 0\end{aligned}$$

On obtient la nouvelle troisième équation, soit $y + 2z = 9$.

Conclusion. D'après les opérations élémentaires, qui donnent un système équivalent, (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 3z = 9 \\ y + 2z = 9 \end{cases}$$

2.

Effectuer $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. Justifier que le système obtenu est triangulaire.

INDICE

Outil : multiplier une équation par un réel non nul donne un système équivalent.

CORRIGÉ

Opération $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$. La multiplication de $-3y + 3z = 9$ par le réel non nul $-\frac{1}{3}$ donne $y - z = -3$.

Opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. Avec L_3 : $y + 2z = 9$ et la nouvelle L_2 : $y - z = -3$:

$$\begin{aligned}&(1-1)y + (2+1)z \\ &= 9 + 3\end{aligned}$$

soit $3z = 12$.

Conclusion. Le système obtenu est

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = -3 \\ 3z = 12 \end{cases}$$

Il est triangulaire : la deuxième équation ne contient pas x, la troisième ne contient ni x ni y, et les coefficients 1, 1 et 3 sont non nuls.

3.

Résoudre (S) et vérifier la solution.

INDICE

Outil : la remontée, puis un contrôle dans les trois équations de départ.

CORRIGÉ

Remontée.

- $3z = 12$ donne $z = 4$.
- $y - z = -3$ donne $y = -3 + z = 1$.
- $x + y - z = 0$ donne $x = -y + z = 3$.

Contrôle dans les équations de départ. $3 + 1 - 4 = 0$; $6 - 1 + 4 = 9$; $3 + 2 + 4 = 9$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de (S) est $S = \{(3; 1; 4)\}$.

Exercice 9

Deux demi-plans

Le plan est muni d'un repère. On considère les inéquations (I_1) : $2x + 3y \leq 12$ et (I_2) : $x - y > 1$.

1.

Représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient (I_1).

INDICE

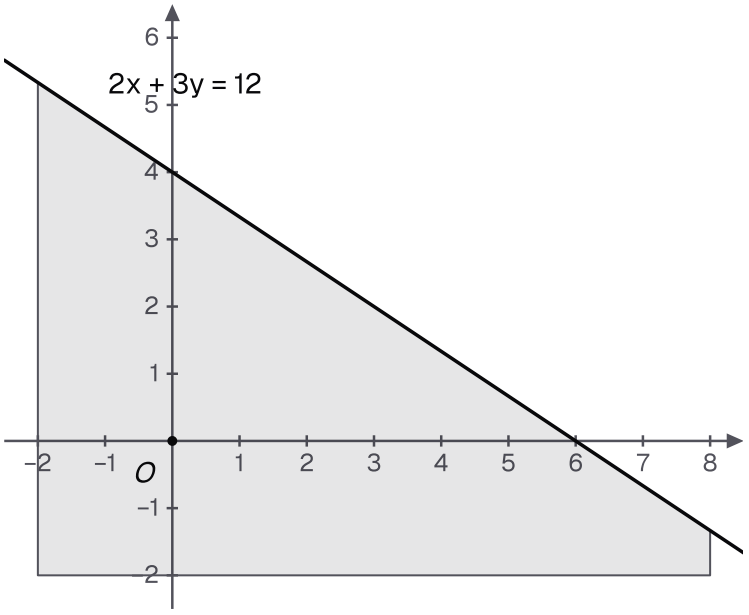
Outil : trace la droite d'équation $2x + 3y = 12$, puis teste l'origine ; hachure la partie rejetée, la partie restée blanche est la solution.

CORRIGÉ

Frontière. La droite d'équation $2x + 3y = 12$ passe par les points $(6; 0)$ et $(0; 4)$.

Test de l'origine. Pour $O(0; 0)$: $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$, et $0 \leq 12$ est vrai.

Conclusion. D'après la propriété des demi-plans, les points qui vérifient (I_1) forment le demi-plan qui contient O : on hachure l'autre demi-plan. L'inégalité est large : la droite en fait partie, tracée en trait plein.



Solutions de 2x + 3y ≤ 12 : le demi-plan teinté, du côté de O, avec la droite frontière en trait plein.

2.

Représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient (I_2).

INDICE

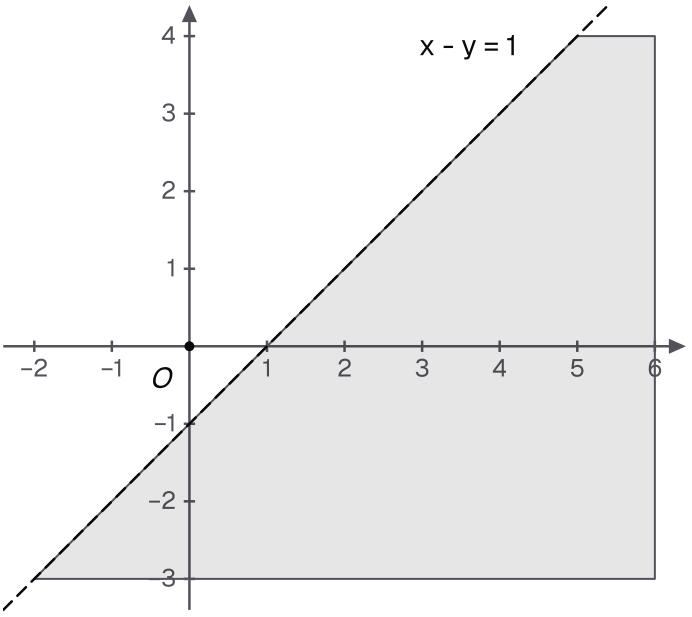
Outil : même méthode, hachures comprises ; l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

Frontière. La droite d'équation $x-y=1$ passe par les points $(1;0)$ et $(0;-1)$.

Test de l'origine. Pour $O(0;0)$: $0-0=0$, et $0>1$ est faux.

Conclusion. Les points qui vérifient (I_2) forment le demi-plan qui ne contient pas O : on hachure le demi-plan de O. L'inégalité est stricte : la droite n'en fait pas partie, tracée en pointillés.



Solutions de x - y > 1 : le demi-plan teinté, qui ne contient pas O ; la droite frontière, en pointillés, en est exclue.

3.

Les points $P(4;1)$ et $Q(1;3)$ vérifient-ils le système formé par (I_1) et (I_2) ?

INDICE

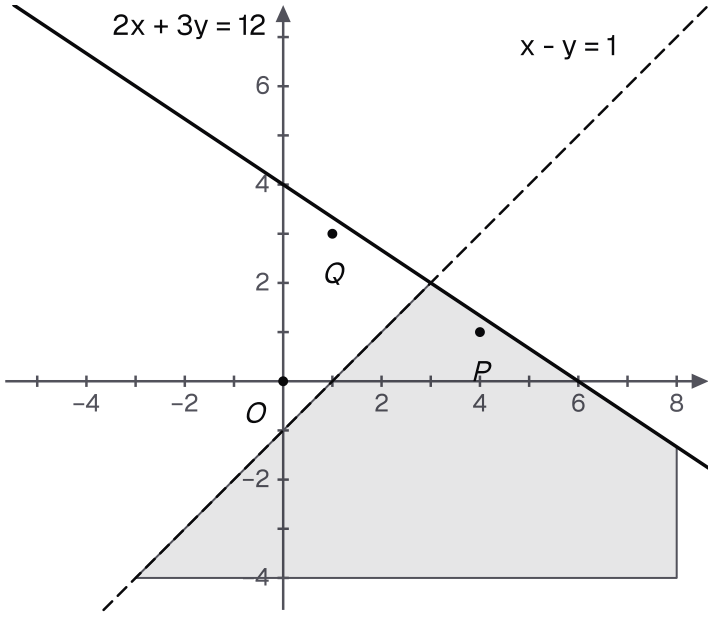
Outil : remplace les coordonnées dans chaque inéquation ; les deux doivent être vraies.

CORRIGÉ

Point P. $2\times 4+3\times 1=11\leq 12$ et $4-1=3>1$: les deux inéquations sont vérifiées.

Point Q. $2\times 1+3\times 3=11\leq 12$, mais $1-3=-2$, qui n'est pas strictement supérieur à 1 : (I_2) n'est pas vérifiée.

Conclusion. P vérifie le système formé par (I_1) et (I_2) ; Q ne le vérifie pas.



La partie teintée vérifie à la fois (I1) et (I2) : P(4 ; 1) y est, Q(1 ; 3) est sous la droite 2x + 3y = 12 mais du mauvais côté de x - y = 1.

Exercice 10

Un budget et un stock

Situation fictive. Un commerçant achète x kilogrammes d'un produit A à 20 dirhams le kilogramme et y kilogrammes d'un produit B à 30 dirhams le kilogramme. Il dispose de 600 dirhams au plus et peut stocker 25 kilogrammes au plus.

1.

Écrire les contraintes que doivent vérifier x et y.

INDICE

Outil : une inéquation par donnée, sans oublier que les quantités sont positives.

CORRIGÉ

- Les quantités sont positives : $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
- Le budget : l'achat coûte $20x + 30y$ dirhams, au plus 600, donc $20x + 30y \leq 600$. En divisant par 10, qui est positif : $2x + 3y \leq 60$.
- Le stock : $x + y \leq 25$.

Conclusion. Les contraintes sont :

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \leq 25 \end{cases}$$

2.

Les achats $(x ; y) = (15 ; 8)$ et $(x ; y) = (12 ; 14)$ sont-ils possibles ?

INDICE

Outil : teste chaque couple dans chaque contrainte.

CORRIGÉ

Achat $(15 ; 8)$. Le prix, en dirhams, est :

$$\begin{aligned} &20 \times 15 + 30 \times 8 \\ &= 300 + 240 = 540 \leq 600 \end{aligned}$$

De plus, $15 + 8 = 23 \leq 25$: le budget et le stock sont respectés.

Achat $(12 ; 14)$. Le prix, en dirhams, est :

$$\begin{aligned} &20 \times 12 + 30 \times 14 \\ &= 240 + 420 = 660 \end{aligned}$$

Ce prix dépasse 600 ; de plus, $12 + 14 = 26$ dépasse 25.

Conclusion. L'achat $(15 ; 8)$ est possible ; l'achat $(12 ; 14)$ est impossible.

3.

Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $2x + 3y = 60$ et $x + y = 25$.

INDICE

Outil : un système de deux équations ; la substitution $x = 25 - y$ convient.

CORRIGÉ

Substitution. La seconde équation donne $x = 25 - y$. En remplaçant dans la première :

$$\begin{aligned} 2(25 - y) + 3y &= 60 \\ 50 + y &= 60 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Puis $x = 25 - 10 = 15$.

Contrôle. $2 \times 15 + 3 \times 10 = 30 + 30 = 60$ et $15 + 10 = 25$.

Conclusion. Le point d'intersection est $(15; 10)$.