BURHAN

Équations, inéquations et systèmes

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/cours

Chapitre	Semestre
Équations, inéquations et systèmes	Semestre 1

Entrée : quand le bénéfice devient positif

Un atelier fictif fabrique des sacs. Pour x centaines de sacs fabriqués dans le mois, avec $0 \leq x \leq 10$, son bénéfice, en milliers de dirhams, vaut

$$B(x) = -x^2 + 10x - 16.$$

Un bénéfice négatif est une perte.

Trois questions se posent. Pour quelle production le bénéfice est-il nul ? C'est une équation. Pour quelles productions est-il positif ? C'est une inéquation.

Si l'atelier fabrique trois produits, combien de chacun pour employer toutes ses heures ? C'est un système.

Devine : Une prédiction

Calcule $B(1)$, $B(2)$, $B(5)$, $B(8)$ et $B(9)$. Pour quelles productions l'atelier gagne-t-il de l'argent ?

A. Dès que x dépasse 2.

Faux.

Pour $x = 9$, $B(9) = -7$: au-delà de 8 centaines, l'atelier perd de l'argent.

B. Pour toute production.

Faux.

Pour $x = 0$, $B(0) = -16$: sans vente, les frais restent à payer.

C. Entre 2 et 8 centaines de sacs.

Juste.

Juste : $B(5) = 9$ est positif, $B(1)$ et $B(9)$ sont négatifs.

D. Pour moins de 8 centaines de sacs.

Faux.

Pour $x = 1$, $B(1) = -7$: une petite production ne couvre pas les frais.

Correction

On calcule les cinq valeurs :

$$B(1) = -1 + 10 - 16 = -7,$$
$$B(2) = -4 + 20 - 16 = 0,$$
$$B(5) = -25 + 50 - 16 = 9,$$
$$B(8) = -64 + 80 - 16 = 0,$$
$$B(9) = -81 + 90 - 16 = -7.$$

Le bénéfice est nul en 2 et en 8, positif entre ces deux valeurs et négatif aux extrémités.

Ce chapitre te donne la méthode pour trouver ces deux valeurs sans les deviner.

Dans ce chapitre, tu reprends d'abord, en rappel bref, ce que tu sais déjà : les équations et inéquations du second degré, les systèmes de deux équations et les inéquations à deux inconnues.

Puis tu apprends du neuf : la méthode de Gauss, pour trois ou quatre inconnues, et la programmation linéaire, pour choisir la meilleure production.

Toutes les situations économiques du cours sont fictives.

Équation du second degré : rappel

Ce que tu sais déjà

Devine : Combien de solutions ?

Combien de solutions réelles l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$ a-t-elle ?

A. Deux solutions.
Faux.
Le premier membre est un carré : il ne s'annule qu'en un seul point.

B. Une seule solution.
Juste.
Juste : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, nul seulement pour $x = 3$.

C. Aucune solution.
Faux.
Pour $x = 3$, on obtient $9 - 18 + 9 = 0$: il y a au moins une solution.

D. Une infinité de solutions.
Faux.
Pour $x = 0$, le premier membre vaut 9, et non 0.

Correction
On reconnaît une identité remarquable : pour tout réel x, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Un carré est nul si et seulement si le nombre élevé au carré est nul. Donc l'équation équivaut à $x - 3 = 0$: elle a une seule solution, 3.

Un rappel bref. Tu as déjà résolu des équations du second degré. Toutes ne se factorisent pas à vue, comme celle-ci.

Dans l'atelier de l'entrée, tu as trouvé 2 et 8 en tâtonnant : il faut une méthode qui marche à coup sûr.

Un seul nombre, le **discriminant**, dit à l'avance combien il y a de solutions. Il donne aussi des formules pour les calculer. Ces formules viennent d'une écriture du trinôme qui fait apparaître un carré ; l'idée de la preuve est jointe à l'énoncé.

Discriminant et solutions

Définition : Trinôme du second degré et discriminant

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ s'appelle un **trinôme du second degré** (d'inconnue x). Son **discriminant** est le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Une **racine** du trinôme est un réel x tel que $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Solutions de l'équation du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- si $\Delta > 0$, a **deux** solutions distinctes, $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, a **une seule** solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, n'a **aucune** solution.

Démonstration

Idée de la preuve. Comme $a \neq 0$, on vérifie en développant le second membre l'égalité, appelée **forme canonique**, valable pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Ce développement est omis ici. Comme $a \neq 0$, l'équation équivaut alors à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Un carré est positif ou nul : si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution ; si $\Delta = 0$, l'équation équivaut à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$; si $\Delta > 0$, les deux réels dont le carré vaut $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ sont $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, ce qui donne les deux solutions annoncées.

Exemple : les trois cas

Le bénéfice de l'atelier. Pour $B(x) = -x^2 + 10x - 16$, on a $a = -1$, $b = 10$ et $c = -16$. Donc

$$\begin{aligned}\Delta &= 10^2 \\ &\quad - 4 \times (-1) \times (-16) \\ &= 100 - 64 = 36.\end{aligned}$$

Le discriminant est positif, et $\sqrt{36} = 6$. D'après les solutions de l'équation du second degré, il y a deux solutions :

$$\frac{-10 + 6}{-2} = 2,$$
$$\frac{-10 - 6}{-2} = 8.$$

Le bénéfice est nul pour 2 et pour 8 centaines de sacs.

Un discriminant nul. Pour $4x^2 - 12x + 9 = 0$: $(-12)^2 = 144$ et $4 \times 4 \times 9 = 144$, donc $\Delta = 144 - 144 = 0$. Une seule solution :

$$x_0 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Un discriminant négatif. Pour $3x^2 - 2x + 1 = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 \\ &= 4 - 12 = -8.\end{aligned}$$

Le discriminant est négatif. Aucune solution réelle : $S = \varnothing$.

Garde les parenthèses autour des nombres négatifs : c'est là que les signes se perdent.

Factoriser le trinôme

Propriété : Factorisation du trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$: pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: le trinôme ne peut pas s'écrire comme un produit de deux facteurs du premier degré.

Démonstration

Idée de la preuve. On part de la forme canonique $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, vérifiée en développant, comme dans l'idée de la preuve des solutions de l'équation du second degré ; ce développement est omis ici. Si $\Delta > 0$, on écrit $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et on factorise la différence de deux carrés : on obtient $a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines. Si $\Delta = 0$, la forme cano-

nique est déjà $a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$, un produit de deux facteurs du premier degré s'annulerait en au moins un réel, qui serait une racine du trinôme, alors que l'équation n'a aucune solution d'après la propriété sur les solutions de l'équation du second degré.

Exemple : factoriser

Deux racines. Pour $2x^2 - 2x - 12$: $\Delta = 4 + 96 = 100$. Les racines sont

$$\frac{2 - 10}{4} = -2,$$
$$\frac{2 + 10}{4} = 3.$$

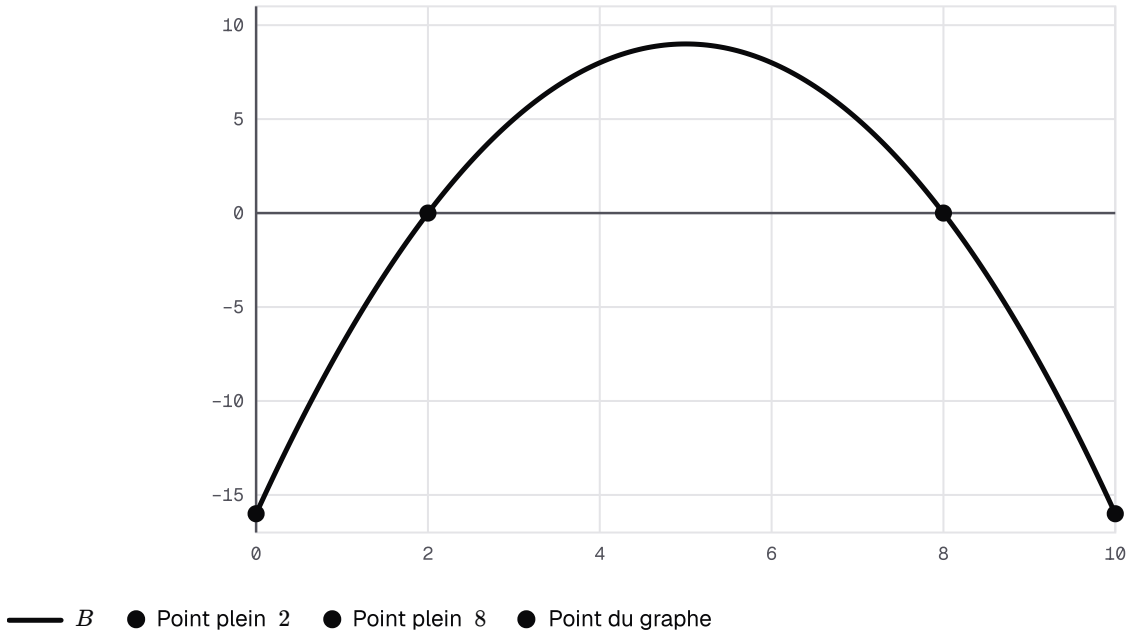
D'après la factorisation du trinôme, pour tout réel x :

$$2x^2 - 2x - 12 = 2(x + 2)(x - 3).$$

Contrôle, en développant :

$$\begin{aligned} 2(x + 2)(x - 3) &= 2(x^2 - x - 6) \\ &= 2x^2 - 2x - 12. \end{aligned}$$

Le bénéfice. De racines 2 et 8, le bénéfice de l'atelier s'écrit $B(x) = -(x - 2)(x - 8)$. N'oublie pas le facteur $a = -1$.



Bénéfice de l'atelier fictif, en milliers de dirhams, selon la production en centaines de sacs.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : résoudre une équation du second degré

1. **Écris** l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, puis lis a, b et c avec leurs signes.
2. **Repère** les cas simples : si $c = 0$, factorise par x, comme $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$; si $b = 0$, isole x^2.
3. **Sinon, calcule** $\Delta = b^2 - 4ac$, en gardant les parenthèses.
4. **Conclus** selon le signe de Δ : deux solutions, une seule, ou aucune.
5. **Contrôle** en remplaçant x par chaque solution dans l'équation de départ.

Attention : relever a, b et c avec leur signe

✗ « Pour $6 - x - x^2 = 0$, on lit $a = 6$, $b = -1$ et $c = -1$. »

✓ On range d'abord les termes : $-x^2 - x + 6 = 0$, donc $a = -1$, $b = -1$ et $c = 6$. Alors $\Delta = 1 + 24 = 25$, et les solutions sont

$$\frac{1 + 5}{-2} = -3,$$
$$\frac{1 - 5}{-2} = 2.$$

Avec la mauvaise lecture, on trouverait $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, qui ne vérifient pas l'équation.

✗ « Pour $x^2 = 5x - 6$, on lit $a = 1$, $b = 5$ et $c = -6$. »

✓ On écrit d'abord $x^2 - 5x + 6 = 0$: alors $b = -5$ et $c = 6$. Donc $\Delta = 25 - 24 = 1$, et les solutions sont 2 et 3. Contrôle : $2^2 = 5 \times 2 - 6$ et $3^2 = 5 \times 3 - 6$.

Avec la mauvaise lecture, on trouverait 1 et -6, qui ne vérifient pas l'équation.

À toi : Résoudre et factoriser

Résous $3x^2 - 7x + 2 = 0$, puis factorise $3x^2 - 7x + 2$. Résous ensuite $x^2 = 4x - 4$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par lire a, b et c, puis calcule Δ.
Indice 2
Pour la première équation, $\Delta = 25$ et $\sqrt{25} = 5$.
Indice 3
Point délicat : pour la seconde équation, passe tout dans le premier membre avant de lire les coefficients.

Réponse

Première équation. Pour $3x^2 - 7x + 2 = 0$: $\Delta = 49 - 24 = 25$. D'après les solutions de l'équation du second degré, les solutions sont

$$\frac{7 - 5}{6} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{7 + 5}{6} = 2.$$

D'après la factorisation du trinôme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &3x^2 - 7x + 2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) \\ &= (3x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Seconde équation. L'équation $x^2 = 4x - 4$ s'écrit $x^2 - 4x + 4 = 0$. Ici $\Delta = 16 - 16 = 0$: une seule solution,

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

Contrôle : $2^2 = 4 \times 2 - 4$.

Signe du trinôme et inéquations

Le signe d'un trinôme

Devine : Toujours positif ?

Quel est le signe de $x^2 - 4x + 5$ quand x parcourt $\mathbb{R}$?

A. Il change de signe en $x = 2$.

Faux.

Pour $x = 2$, on trouve $4 - 8 + 5 = 1$: le trinôme ne s'annule pas.

B. Il est toujours négatif.

Faux.

Pour $x = 0$, il vaut 5, qui est positif.

C. Il est négatif entre deux racines.

Faux.

Il n'a aucune racine : $\Delta = 16 - 20 = -4$.

D. Il est toujours strictement positif.

Juste.

Juste : $\Delta = -4$ et $a = 1$ est positif.

Correction

Développe $(x - 2)^2 + 1$: tu trouves $x^2 - 4x + 4 + 1$. Donc, pour tout réel x :

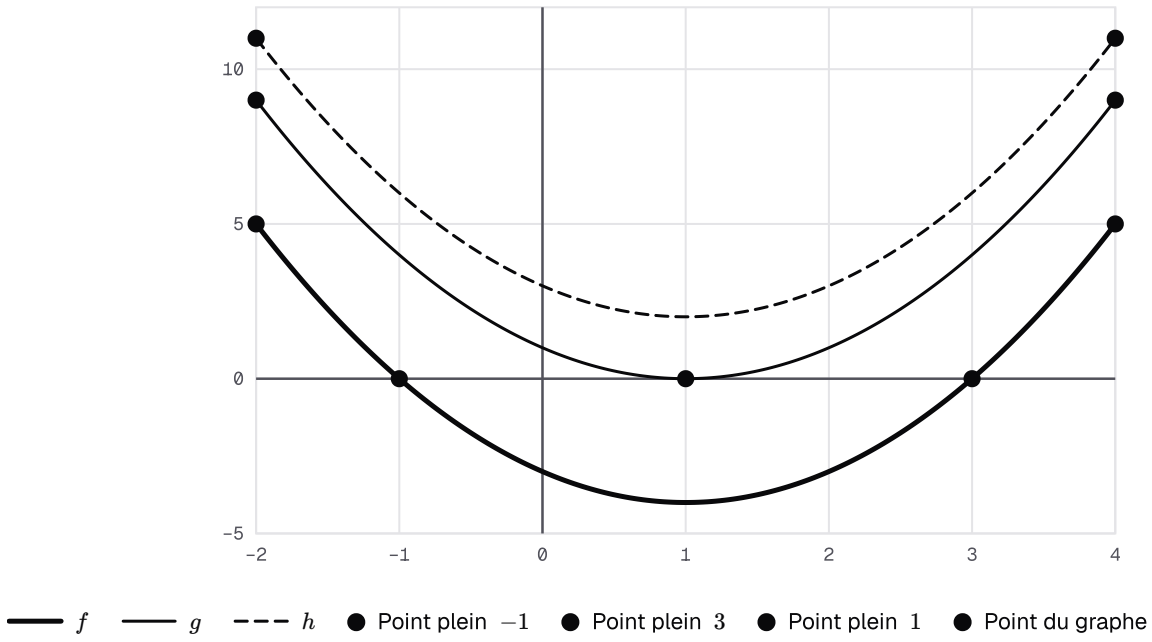
$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1.$$

> C'est un carré plus 1 : il vaut au moins 1, et le trinôme est toujours strictement positif.
>
> Son discriminant, $\Delta = 16 - 20 = -4$, est négatif : l'énoncé qui suit relie ces deux faits.

En clair. Pour l'atelier, la question « quand $B(x)$ est-il positif ? » est une question de signe d'un trinôme.

La courbe d'un trinôme est une parabole. Si $a > 0$, elle est tournée vers le haut ; si $a < 0$, vers le bas.

Le trinôme est positif là où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. Ses racines sont les abscisses des points où la courbe coupe cet axe.



Trois paraboles tournées vers le haut : deux racines, une racine double, aucune racine.

La règle des signes

Sur la figure, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Le nombre $f(x)$ est négatif entre les racines -1 et 3, et positif ailleurs.

D'où vient cette règle ? Pour tout réel x, $f(x) = (x+1)(x-3)$: cette factorisation permet un tableau de signes. Pour un discriminant négatif, on revient à l'écriture avec un carré.

Propriété : Signe du trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: pour tout réel x, $f(x)$ est **du signe de** a.
- Si $\Delta = 0$: $f(x_0) = 0$, et pour tout réel $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.

- Si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$ les deux racines : $f(x)$ est du signe de a pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$, du **signe contraire** de celui de a pour $x_1 < x < x_2$, et nul en x_1 et en x_2.

Démonstration

Idée de la preuve. Si $\Delta > 0$, la factorisation du trinôme donne $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: un tableau de signes des deux facteurs du premier degré montre que le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est négatif entre les racines et positif à l'extérieur. Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ et un carré est positif, nul seulement en x_0. Si $\Delta < 0$, dans la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, le crochet est une somme d'un carré et d'un nombre strictement positif : il est strictement positif. Le tableau de signes du premier cas n'est pas détaillé ici.

Exemple : deux trinômes

Deux racines. Étudions le signe de $-2x^2 + 2x + 12$. Ici $\Delta = 4 + 96 = 100$, et les racines sont -2 et 3.

Comme $a = -2$ est négatif, d'après le signe du trinôme, l'expression est :

- négative pour $x < -2$ et pour $x > 3$;
- positive pour $-2 < x < 3$;
- nulle en -2 et en 3.

Contrôle : pour $x = 0$, elle vaut 12, qui est positif.

Aucune racine. Pour $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3$, négatif, et $a = 1$ est positif. D'après le signe du trinôme, $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x.

L'inéquation $x^2 + x + 1 > 0$ a donc pour ensemble de solutions $S = \mathbb{R}$, et l'inéquation $x^2 + x + 1 < 0$ n'en a aucune : $S = \varnothing$.

Vérifie : Un discriminant nul

Quel est le signe de $-x^2 + 6x - 9$?

A. Positif ou nul, nul seulement en 3.

Faux.

Le coefficient $a = -1$ est négatif : hors de sa racine, le trinôme a le signe de a.

B. Négatif ou nul, nul seulement en 3.

Juste.

Juste : $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2$.

C. Positif avant 3, négatif après.

Faux.
Avec $\Delta = 0$, le trinôme ne change pas de signe.

D. Strictement négatif pour tout réel.

Faux.
Pour $x = 3$, il vaut $-9 + 18 - 9 = 0$.

Correction
Ici $a = -1$, $b = 6$ et $c = -9$, donc $\Delta = 36 - 36 = 0$ et

$$x_0 = \frac{-6}{-2} = 3.$$

D'après le signe du trinôme, l'expression est du signe de $a = -1$ pour $x \neq 3$, donc strictement négative, et elle est nulle en 3.

L'écriture $-x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$ le confirme.

Inéquations : exemple, méthode, piège, à toi

Exemple : la zone de bénéfice positif

Reprends l'atelier fictif : $B(x) = -x^2 + 10x - 16$, de racines 2 et 8. Comme $a = -1$ est négatif, d'après le signe du trinôme, $B(x) > 0$ exactement entre les racines.

L'inéquation $B(x) > 0$ a donc pour ensemble de solutions $S =]2; 8[$.

L'atelier fait un bénéfice pour une production comprise strictement entre 2 et 8 centaines de sacs. Pour $x = 2$ ou $x = 8$, il ne gagne ni ne perd rien.

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Ramène** l'inéquation à la forme $ax^2 + bx + c > 0$, ou avec $\geq$, $<$ ou $\leq$.
2. **Cherche** les racines du trinôme avec Δ.
3. **Dresse** le tableau de signes : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles.
4. **Lis** l'ensemble des solutions, en décidant si les racines sont incluses ou exclues.

Attention : entre les racines, le signe contraire de a

✗ « Pour $-x^2 + x + 6 > 0$, les racines sont -2 et 3, donc $S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$. »

✓ Entre les racines, le trinôme n'est pas toujours négatif : il a le signe contraire de a. Ici $a = -1$ est négatif, donc le trinôme est positif **entre** les racines :

$$S =]-2; 3[\,.$$

Contrôle : pour $x = 0$, le trinôme vaut 6, positif, et 0 est bien entre -2 et 3.

À toi : Deux inéquations

Résous $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$, puis $x^2 + 3x + 4 > 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis a, b et c pour chaque trinôme.
Indice 2
Calcule Δ, puis les racines s'il y en a, et vérifie-les dans le trinôme.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe de a avant de remplir le tableau de signes.

Réponse
Première inéquation. Pour $-x^2 + 4x + 5$: $\Delta = 16 + 20 = 36$, et les racines sont

$$\frac{-4 + 6}{-2} = -1,$$
$$\frac{-4 - 6}{-2} = 5.$$

Ici $a = -1 < 0$: d'après le signe du trinôme, l'expression prend le signe opposé à celui de a entre -1 et 5, et s'annule en ces deux valeurs. L'inégalité est large, donc

$$S = [-1; 5]\,.$$

Seconde inéquation. Pour $x^2 + 3x + 4$: $\Delta = 9 - 16 = -7$, négatif, et $a = 1$ est positif. Le trinôme est strictement positif pour tout réel : $S = \mathbb{R}$.

Équations et inéquations qui se ramènent au second degré

Changer d'inconnue

Devine : Une équation de degré quatre

Combien de solutions réelles l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ a-t-elle ?

A. Deux.
Faux.
On trouve bien 1 et 2, mais leurs opposés conviennent aussi.

B. Aucune.
Faux.
Pour $x = 1$: $1 - 5 + 4 = 0$.

C. Une seule.
Faux.
Pour $x = 1$ et pour $x = 2$, le premier membre est nul : déjà deux solutions.

D. Quatre.

Juste.

Juste : -2, -1, 1 et 2.

Correction

Pose $X = x^2$. L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$, de solutions $X = 1$ et $X = 4$.

Puis $x^2 = 1$ donne $x = -1$ ou $x = 1$, et $x^2 = 4$ donne $x = -2$ ou $x = 2$. Il y a quatre solutions.

En clair. Dans $x^4 - 5x^2 + 4$, seul x^2 apparaît, à la puissance 1 ou 2. En posant $X = x^2$, tu retrouves un trinôme en X.

Il reste à revenir à x. Chaque valeur strictement positive de X donne deux valeurs de x ; une valeur strictement négative n'en donne aucune.

Exemple : deux équations bicarrées

Quatre solutions. Pour $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, on pose $X = x^2$: l'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$. Ici $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc $X = 1$ ou $X = 4$.

Puis $x^2 = 1$ donne -1 et 1, et $x^2 = 4$ donne -2 et 2. D'où $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Une valeur à écarter. Pour $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: $X^2 + 3X - 4 = 0$, $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $X = 1$ ou $X = -4$. Or $x^2 = -4$ n'a aucune solution, car un carré est positif ou nul. D'où $S = \{-1; 1\}$.

Produits et quotients

Exemple : une inéquation produit

Résolvons $(2x - 1)(x^2 - x - 2) \geq 0$.

Le trinôme a pour racines -1 et 2 : pour tout réel x, $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Le facteur $2x - 1$ s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

Tableau de signes, sur $]-\infty; -1[$, $\left]-1; \dfrac{1}{2}\right[$, $\left]\dfrac{1}{2}; 2\right[$ et $]2; +\infty[$:

- $2x - 1$: $-$, $-$, $+$, $+$;
- $x + 1$: $-$, $+$, $+$, $+$;
- $x - 2$: $-$, $-$, $-$, $+$;
- produit : $-$, $+$, $-$, $+$.

Le produit est nul en -1, $\dfrac{1}{2}$ et 2. L'inégalité est large, donc ces valeurs sont incluses :

$$S = \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[\,.$$

Exemple : une inéquation quotient

Résolvons $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} \geq 0$.

Valeur interdite : $x = 1$. Pour tout réel x, le numérateur vaut $(x + 2)(x - 3)$; il s'annule en -2 et en 3.

Tableau de signes, sur $]-\infty ; -2[$, $]-2 ; 1[$, $]1 ; 3[$ et $]3 ; +\infty[$:

- $x + 2$: $-$, $+$, $+$, $+$;
- $x - 3$: $-$, $-$, $-$, $+$;
- $x - 1$: $-$, $-$, $+$, $+$;
- quotient : $-$, $+$, $-$, $+$.

La valeur interdite est exclue, les zéros du numérateur sont inclus :

$$S = [-2 ; 1[\cup [3 ; +\infty[.$$

Vérifie : Une valeur interdite

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$?

A. $S = \{-1 ; 1\}$

Faux.

Pour $x = -1$, le dénominateur est nul : cette valeur est interdite.

B. $S = \{1\}$

Juste.

Juste : le numérateur s'annule en -1 et en 1, mais -1 est interdit.

C. $S = \{-1\}$

Faux.

C'est justement la valeur interdite ; 1, lui, convient.

D. $S = \varnothing$

Faux.

Pour $x = 1$, le quotient vaut $\dfrac{0}{2} = 0$.

Correction

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur ne l'est pas.

Ici $x^2 - 1 = 0$ donne $x = -1$ ou $x = 1$. Mais -1 annule le dénominateur $x + 1$: il est exclu. Donc $S = \{1\}$.

Exemple : un coût moyen

Un atelier fictif a un coût total $C(x) = x^2 + 2x + 16$, en milliers de dirhams, pour x centaines de sacs, avec $x > 0$. Son coût moyen est $\dfrac{C(x)}{x}$. Il vend chaque centaine de sacs 12 milliers de dirhams. Quand le coût moyen est-il au plus égal à ce prix ?

On cherche les réels $x > 0$ tels que $\dfrac{C(x)}{x} \leq 12$. Comme $x > 0$, on peut multiplier les deux membres par x sans changer le sens de l'inégalité :

$$x^2 + 2x + 16 \leq 12x,$$

soit $x^2 - 10x + 16 \leq 0$. Les racines sont 2 et 8, et $a = 1$ est positif : d'après le signe du trinôme, $S = [2; 8]$.

On retrouve la zone de bénéfice de l'entrée.

Méthode, piège, à toi, coin devoir

Méthode : se ramener au second degré

1. **Repère** la forme : x^2 seul en jeu, produit de facteurs, ou quotient.
2. **Change** d'inconnue si besoin, en posant $X = x^2$, puis reviens à x.
3. **Écarte** les valeurs interdites d'un quotient avant tout calcul.
4. **Dresse** un tableau de signes, une ligne par facteur, et lis l'ensemble des solutions.

Attention : ne pas multiplier par un facteur de signe inconnu

✗ « $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 1$, donc $x + 2 \geq x - 1$, et tout réel $x \neq 1$ convient. »

✓ Le signe de $x - 1$ change selon x : on ne multiplie pas par ce facteur. On passe tout dans le premier membre : pour tout réel $x \neq 1$,

$$\frac{x+2}{x-1} - 1 = \frac{3}{x-1}.$$

Ce quotient est positif exactement quand $x - 1 > 0$. Donc $S =]1; +\infty[$.

Contrôle : pour $x = 0$, le quotient de départ vaut -2, qui est inférieur à 1.

À toi : Bicarrée et quotient

Résous $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, puis $\dfrac{x-4}{x^2-1} \leq 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour l'équation, pose $X = x^2$.
Indice 2

Pour l'inéquation, écris $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et repère les valeurs interdites.

Indice 3

Point délicat : -1 et 1 sont exclus, mais 4 est inclus.

Réponse

L'équation. Avec $X = x^2$: $X^2 - 10X + 9 = 0$, $\Delta = 100 - 36 = 64$, donc $X = 1$ ou $X = 9$. Ces deux valeurs sont positives, d'où $S = \{-3; -1; 1; 3\}$.

L'inéquation. Les valeurs interdites sont -1 et 1, et le numérateur s'annule en 4. Le tableau de signes des trois facteurs $x-4$, $x-1$ et $x+1$ donne un quotient :

- négatif sur $]-\infty; -1[$;
- positif sur $]-1; 1[$;
- négatif sur $]1; 4[$;
- positif sur $]4; +\infty[$.

Le quotient est nul en 4, inclus ; les valeurs interdites sont exclues :

$$S =]-\infty; -1[\cup]1; 4] \,.$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une inéquation quotient

En devoir, commence par les valeurs interdites, puis justifie chaque signe. Pour l'exemple du quotient, écris :

« Valeur interdite : $x = 1$. Le numérateur $x^2 - x - 6$ a pour racines -2 et 3 ; il est négatif entre elles. D'après le tableau de signes, $S = [-2; 1[\cup [3; +\infty[$. »

Indique pour chaque borne si elle est incluse ou exclue.

Systèmes de deux équations : rappel

Deux prix inconnus

Devine : Le bon couple

Dans une papeterie fictive, 3 cahiers et 2 stylos coûtent 34 dirhams ; 1 cahier et 4 stylos coûtent 28 dirhams. Quel couple (prix d'un cahier ; prix d'un stylo) convient aux deux achats ?

A. $(10; 2)$

Faux.

Le premier achat convient, mais $10 + 4 \times 2 = 18$, et non 28.

B. $(4; 6)$

Faux.

Le second achat convient, mais $3 \times 4 + 2 \times 6 = 24$, et non 34.

C. $(8;5)$

Juste.

Juste : $24+10=34$ et $8+20=28$.

D. $(5;8)$

Faux.

Ordre inversé : $3\times5+2\times8=31$, et non 34.

Correction

On note x le prix d'un cahier et y celui d'un stylo, en dirhams. Il faut $3x+2y=34$ et $x+4y=28$.

Le couple $(8;5)$ vérifie les deux : $3\times8+2\times5=34$ et $8+4\times5=28$.

Un couple qui ne vérifie qu'une équation ne convient pas.

Un rappel bref. Tu sais déjà résoudre un tel système par substitution ou par combinaison. Ici, tu ajoutes un outil : le **déterminant**. Il dit si le système a une seule solution, et il donne des formules pour la calculer.

Dans un repère, chaque équation est celle d'une droite : une solution est un point commun aux deux droites.

Le déterminant

Définition : Système de deux équations linéaires à deux inconnues et déterminant

Soit a, b, c, a', b', c' six réels. Le système

$$(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$$

d'inconnues réelles x et y est un **système linéaire de deux équations à deux inconnues**. Une **solution** de (S) est un couple $(x;y)$ de réels qui vérifie les deux équations. Le **déterminant** de (S) est le réel

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b.$$

Propriété : Méthode du déterminant

Avec les notations de la définition du système (S), si $D\neq0$, le système (S) a une **unique** solution $(x;y)$:

$$x=\frac{D_x}{D}\quad\text{et}\quad y=\frac{D_y}{D},\quad\text{où}\quad D_x=\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}=cb'-c'b\quad\text{et}\quad D_y=\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c.$$

Démonstration

Idée de la preuve. On multiplie la première équation par b' et la seconde par b, puis on soustrait la seconde de la première : y disparaît et l'on obtient $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$, c'est-à-dire $Dx = D_x$. De même, en multipliant la première équation par a' et la seconde par a, puis en soustrayant la première de la seconde, on obtient $Dy = D_y$. Si $D \neq 0$, une solution est donc nécessairement le couple $\left(\dfrac{D_x}{D} ; \dfrac{D_y}{D}\right)$. La vérification, par un calcul direct, que ce couple satisfait bien les deux équations est omise ici.

Exemple : les prix par la méthode du déterminant

Le système des deux achats s'écrit

$$\begin{cases} 3x + 2y = 34 \\ x + 4y = 28 \end{cases}$$

Ici $a = 3$, $b = 2$, $a' = 1$ et $b' = 4$. Donc

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$D = 3 \times 4 - 1 \times 2 = 10.$$

Comme $D \neq 0$, d'après la méthode du déterminant, il existe un seul couple solution.

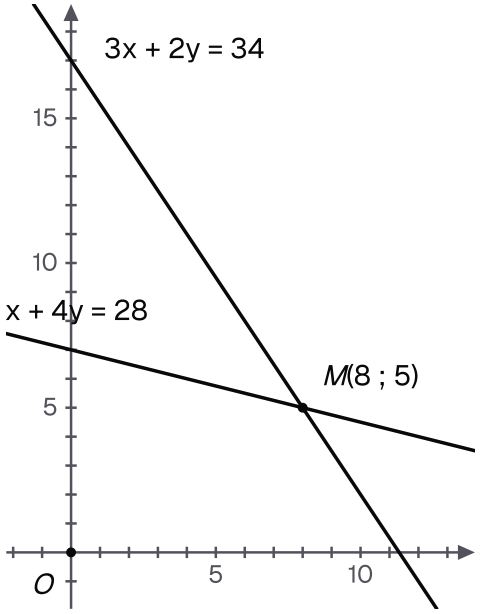
Pour D_x, on remplace la colonne des coefficients de x par les seconds membres ; pour D_y, celle de y :

$$\begin{aligned} D_x = \begin{vmatrix} 34 & 2 \\ 28 & 4 \end{vmatrix} &= 136 - 56 \\ &= 80, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y = \begin{vmatrix} 3 & 34 \\ 1 & 28 \end{vmatrix} &= 84 - 34 \\ &= 50. \end{aligned}$$

Donc $x = \dfrac{80}{10} = 8$ et $y = \dfrac{50}{10} = 5$: un cahier coûte 8 dirhams et un stylo 5 dirhams.

Contrôle : $3 \times 8 + 2 \times 5 = 34$ et $8 + 4 \times 5 = 28$.



Les droites d'équations 3x + 2y = 34 et x + 4y = 28 se coupent en un seul point, celui du couple (8 ; 5) : un cahier à 8 dirhams, un stylo à 5 dirhams.

Deux droites

Propriété : Interprétation graphique d'un système de deux équations

Le plan est muni d'un repère. On suppose $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$. Les équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont alors celles de deux droites (d) et (d'), et les solutions du système (S) sont les couples de coordonnées des points communs à (d) et (d').

- Si $D \neq 0$, les droites (d) et (d') sont **sécantes** : (S) a une seule solution.
- Si $D = 0$, les droites sont **parallèles** : soit strictement parallèles, et (S) n'a aucune solution ; soit confondues, et (S) a une infinité de solutions.

Remarque : Statut de ce résultat

Ce résultat est admis. Il relie le calcul du déterminant à la position de deux droites dans un repère.

Exemple : un déterminant nul

Des droites strictement parallèles. Considérons le système

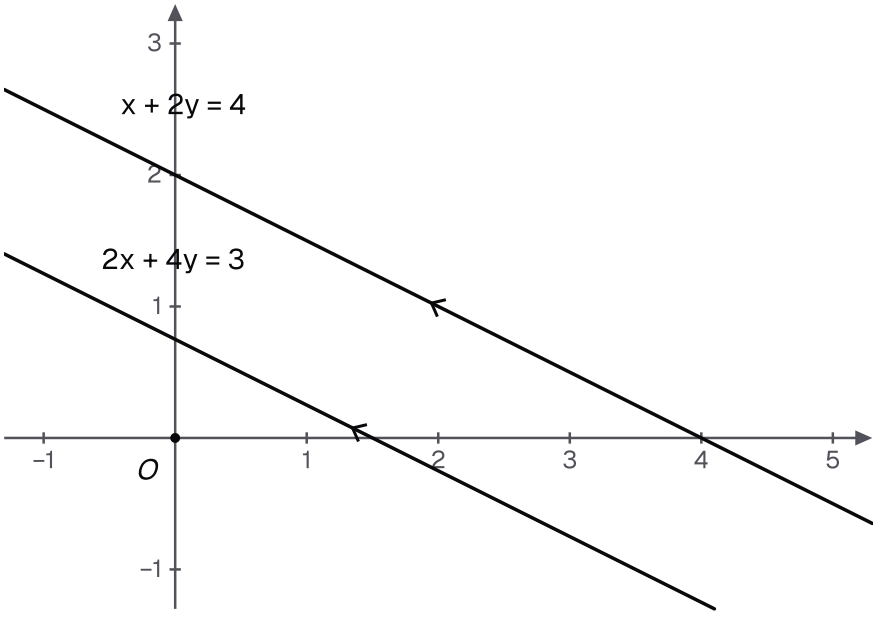
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$$

Son déterminant vaut $D = 1\times 4 - 2\times 2 = 0$: les droites sont parallèles. Or la seconde équation, divisée par 2, donne $x+2y=\dfrac{3}{2}$, et non 4 : les droites sont strictement parallèles. Aucune solution.

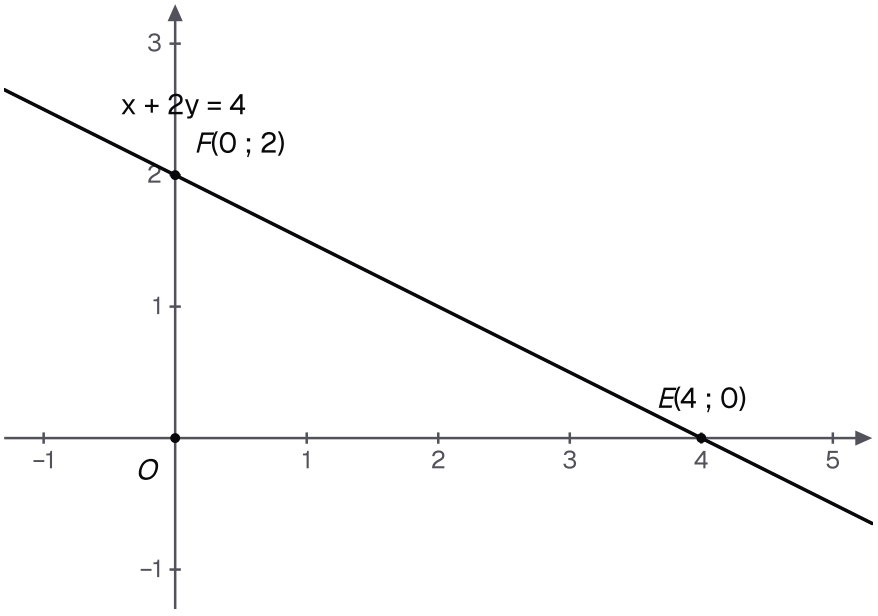
Des droites confondues. Dans le système

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

la seconde équation est le double de la première. Les droites sont confondues : une infinité de solutions, par exemple $(4;0)$ et $(0;2)$.



Déterminant nul, seconds membres incompatibles : les droites d'équations x + 2y = 4 et 2x + 4y = 3 sont strictement parallèles, le système n'a aucune solution.



Avec 2x + 4y = 8, la seconde équation décrit la même droite que x + 2y = 4 : les deux tracés se superposent, et chacun de leurs points, comme (4 ; 0) ou (0 ; 2), est solution.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : résoudre un système de deux équations

1. **Écris** le système avec x et y dans le même ordre dans les deux équations.
2. **Calcule** $D = ab' - a'b$.
3. **Résous** : si $D \neq 0$, par les formules $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$, ou par substitution, ou par combinaison ; si $D = 0$, compare les deux équations.
4. **Vérifie** la solution dans chacune des deux équations.

Attention : un déterminant nul ne veut pas dire « aucune solution »

Considère le système

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$$

✗ « On a $D = 0$, donc le système n'a aucune solution. »

✓ Avec $D = 0$, on compare d'abord les deux équations. Ici la seconde est la première multipliée par -2 : les droites sont confondues, et il y a une infinité de solutions, par exemple $(0 ; -2)$ et $(1 ; 1)$.

Avec $-6x + 2y = 5$, les droites seraient strictement parallèles : aucune solution.

À toi : Deux systèmes

Résous par la méthode du déterminant le système

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

Que dire ensuite du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord D pour chaque système.
Indice 2
Pour D_x, remplace la colonne des coefficients de x par les seconds membres.
Indice 3
Point délicat : $b = -3$; garde les parenthèses dans D et dans D_x.

Réponse

Premier système. Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} D &= 4 \times 5 - 2 \times (-3) \\ &= 26, \end{aligned}$$

qui est non nul. D'après la méthode du déterminant :

$$\begin{aligned} D_x &= 6 \times 5 - 16 \times (-3) \\ &= 30 + 48 = 78, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= 4 \times 16 - 2 \times 6 \\ &= 64 - 12 = 52. \end{aligned}$$

Donc $x = \dfrac{78}{26} = 3$ et $y = \dfrac{52}{26} = 2$. Contrôle : $12 - 6 = 6$ et $6 + 10 = 16$.

Second système. Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} D &= 2 \times 2 \\ &\quad - (-4) \times (-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La seconde équation, divisée par -2, donne $2x - y = -\dfrac{5}{2}$, et non 3 : les droites sont strictement parallèles. Aucune solution.

Systèmes de trois équations : la méthode de Gauss

Un système en escalier

Devine : Un atelier, trois inconnues

Un atelier fictif fabrique des tables (x), des chaises (y) et des étagères (z). Ses trois postes de travail (coupe, montage, peinture) donnent $2x + y + z = 22$, $3x + y + 2z = 31$ et $x + y + 3z = 25$.

Comment trouver x, y et z sans tâtonner ? Quelques opérations, que tu vas apprendre, transforment ce système en un système en escalier :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 25 \\ y + 5z = 28 \\ 3z = 12 \end{cases}$$

Quelle en est la solution ?

A. $(8; 5; 4)$

Faux.

La première équation convient, mais $5 + 5 \times 4 = 25$, et non 28.

B. $(3; 10; 4)$

Faux.

La première équation convient, mais $10 + 5 \times 4 = 30$, et non 28.

C. $(6; 8; 3)$

Faux.

La dernière équation donne $z = 4$, et non 3.

D. $(5; 8; 4)$

Juste.

Juste : $z = 4$, puis $y = 28 - 20 = 8$, puis $x = 25 - 8 - 12 = 5$.

Correction

On part du bas. La dernière équation donne $z = 4$. La deuxième donne alors $y = 28 - 5 \times 4 = 8$. La première donne enfin $x = 25 - 8 - 3 \times 4 = 5$.

L'atelier fabrique 5 tables, 8 chaises et 4 étagères. La méthode de Gauss ramène un système quelconque à cette forme en escalier.

Définition : Système linéaire de n équations à n inconnues, systèmes équivalents, système triangulaire

Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq 4$.

- Un **système linéaire de n équations à n inconnues** est un système dont chaque équation s'écrit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, où les **coefficients** $a_1, \ldots, a_n$ et le **second membre** b sont des réels. Pour $n = 3$, on note en général les inconnues x, y, z ; pour $n = 4$, x, y, z, t. Une **solution** est une liste de n réels, écrite $(x; y; z)$ pour $n = 3$, qui vérifie toutes les équations.
- Deux systèmes sont **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.
- Un système est **triangulaire** lorsque, pour k allant de 2 à n, la k-ième équation ne contient aucune des $k - 1$ premières inconnues. Par exemple :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Exemple : triangulaire ou non, équivalents ou non

Triangulaire. Le système de la question précédente est triangulaire : la deuxième équation ne contient pas x, la troisième ne contient ni x ni y.

Non triangulaire. Le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y + z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

n'est pas triangulaire : sa troisième équation contient y.

Équivalents. Le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a pour seule solution $(2; 1)$, comme le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont donc équivalents.

Des opérations sans risque

On transforme les équations pour arriver à un système triangulaire. Une transformation peut-elle ajouter ou perdre des solutions ?

Pourquoi est-ce vrai ? Trois opérations sont sûres : avec chacune, on peut toujours revenir au système de départ.

Propriété : Opérations élémentaires sur les équations d'un système

Chacune des opérations suivantes transforme un système linéaire en un système **équivalent** :

1. échanger deux équations ;
2. multiplier les deux membres d'une équation par un réel **non nul** ;
3. remplacer une équation L_i par $L_i + kL_j$, où L_j est une **autre** équation du système, gardée telle quelle, et k un réel ; on note cette opération $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Démonstration

Étape 1. Échanger deux équations ne change pas la liste des conditions à vérifier : les solutions sont les mêmes.

Étape 2. Soit λ un réel non nul. Une liste de réels vérifie l'équation L_i si et seulement si elle vérifie l'équation obtenue en multipliant ses deux membres par λ : on passe de l'une à l'autre en multipliant par λ, ou par $\dfrac{1}{\lambda}$. Les autres équations n'ayant pas changé, les deux systèmes ont les mêmes solutions.

Étape 3. Écrivons L_i : $P_i = b_i$ et L_j : $P_j = b_j$, où P_i et P_j sont les premiers membres. Si une liste vérifie L_i et L_j, elle vérifie $P_i + kP_j = b_i + kb_j$, par addition. Réciproquement, si elle vérifie cette nouvelle équation et L_j, alors $P_i = (P_i + kP_j) - kP_j = b_i + kb_j - kb_j = b_i$: elle vérifie L_i. Les autres équations n'ont pas changé, donc les deux systèmes ont les mêmes solutions.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Chaque opération se **défait** :

- échanger deux équations se défait en les échangeant de nouveau ;
- multiplier par λ non nul se défait en multipliant par $\frac{1}{\lambda}$;
- remplacer L_i par $L_i + kL_j$ se défait en retranchant k fois L_j, restée telle quelle.

Comme on peut revenir au système de départ, aucune solution n'est gagnée ni perdue.

Vérifie : Une opération interdite

Laquelle de ces opérations est interdite dans la méthode de Gauss ?

A. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

Faux.

Elle est permise : on la défait par $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$, car L_1 reste telle quelle.

B. $L_2 \leftarrow 0 \times L_2$

Juste.

Juste : on ne peut pas la défaire, car on ne divise pas par 0.

C. Échanger L_1 et L_3

Faux.

Elle est permise : un second échange la défait.

D. $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

Faux.

Elle est permise : on la défait en retranchant $2L_2$, restée telle quelle.

Correction

Une opération est sûre quand on peut la défaire et retrouver le système de départ.

Multiplier L_2 par 0 la remplace par $0 = 0$: l'information de L_2 est perdue, et aucune opération ne la rend. C'est pourquoi le réel qui multiplie une équation doit être non nul.

Exemple **: Exemple et contre-exemple**

Une opération sûre. Pour le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-2y = -2$. D'après les opérations élémentaires, le nouveau système est équivalent : $y = 1$, puis $x = 3 - 1 = 2$.

L'hypothèse compte. Multiplier L_2 par 0 donne $0 = 0$. Le couple $(0; 3)$ vérifie alors le nouveau système, mais pas l'ancien : $0 - 3 = -3$, et non 1. Une solution a été gagnée.

La remontée

Une fois le système triangulaire, on le résout de bas en haut, comme au début de cette section.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque équation n'apporte qu'une inconnue nouvelle, avec un coefficient non nul : on la calcule par une seule division.

Propriété : Résolution d'un système triangulaire par remontée

Soit un système triangulaire de n équations à n inconnues ($2 \leq n \leq 4$) dans lequel, pour chaque k, le coefficient de la k-ième inconnue dans la k-ième équation est **non nul**. Alors ce système a une **unique** solution. On l'obtient par **remontée** : la dernière équation donne la dernière inconnue, puis chaque équation, de la dernière à la première, donne l'inconnue correspondante en remplaçant celles déjà calculées.

Démonstration

Étape 1. La dernière équation ne contient que la dernière inconnue x_n : elle s'écrit $c_n x_n = d_n$ avec $c_n \neq 0$, donc elle équivaut à $x_n = \dfrac{d_n}{c_n}$, valeur unique.

Étape 2. Supposons que les inconnues $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ont chacune une seule valeur possible. La k-ième équation ne contient que $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ et le coefficient c_k de x_k est non nul. En y remplaçant $x_{k+1}, \ldots, x_n$ par leurs valeurs, on obtient une équation du premier degré $c_k x_k = e_k$, qui donne une seule valeur $x_k = \dfrac{e_k}{c_k}$.

Étape 3. En remontant ainsi de la dernière équation à la première, chaque inconnue reçoit une seule valeur possible. La liste obtenue vérifie chaque équation, puisque chaque valeur a été calculée à partir de son équation : c'est l'unique solution.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La dernière équation s'écrit $c_n x_n = d_n$ avec $c_n \neq 0$: elle donne **une seule** valeur.

En remontant, chaque équation devient une équation du premier degré $c_k x_k = e_k$, avec $c_k \neq 0$: encore une seule valeur.

L'hypothèse « coefficient non nul » permet de diviser. Elle garantit l'unicité à chaque étage.

Vérifie : Un coefficient nul

Que dire du système suivant ?

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+2z=3 \\ 0z=5 \end{cases}$$

A. Aucune solution.

Juste.

Juste : $0z=0$ pour tout z, jamais 5.

B. Une seule solution, avec $z=5$.

Faux.

Pour $z=5$, on obtient $0\times 5=0$, et non 5.

C. Une infinité de solutions.

Faux.

La dernière équation n'est vérifiée par aucun réel z.

D. Une seule solution, avec $z=0$.

Faux.

Pour $z=0$, on obtient $0=5$: c'est faux.

Correction

La remontée divise par le coefficient de l'inconnue, qui doit être non nul. Ici, dans la dernière équation, le coefficient de z vaut 0 : on ne peut pas diviser.

Pour tout réel z, $0z=0$, jamais 5 : le système n'a aucune solution.

Avec $0z=0$, tout réel z conviendrait : une infinité de solutions.

Un système complet

Exemple : trois équations par la méthode de Gauss

On résout le système

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$$

Élimination de x. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$ donnent $-3y-z=0$ et $y-2z=-7$.

Élimination de y. On échange ces deux équations, puis $L_3 \leftarrow L_3+3L_2$ élimine y : $-7z=-21$. Le système est devenu triangulaire :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ y-2z=-7 \\ -7z=-21 \end{cases}$$

Remontée. D'après la résolution par remontée, $z = 3$, puis $y = -7 + 2 \times 3 = -1$, puis $x = 4 + 1 - 3 = 2$.

Conclusion. La solution est $(2; -1; 3)$. Contrôle dans les deux autres équations : $4 + 1 + 3 = 8$ et $2 - 2 - 3 = -3$.

Méthode : la méthode de Gauss

1. **Choisis** un pivot : une équation où x a un coefficient non nul, de préférence 1, placée en L_1.
2. **Élimine** x des autres équations par des opérations $L_i \leftarrow L_i + kL_1$.
3. **Recommence** avec y sur les équations restantes, jusqu'à un système triangulaire.
4. **Remonte** de la dernière équation à la première.
5. **Vérifie** la solution dans chaque équation de départ.

Attention : une opération à la fois, second membre compris

✗ « $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, appliquée à $2x - y + z = 8$ avec L_1 : $x + y + z = 4$, donne $-3y - z = 8$. »

✓ L'opération porte sur les deux membres : $8 - 2 \times 4 = 0$. On obtient $-3y - z = 0$.

✗ « Pour le système formé de $x + y = 3$ et de $x - y = 1$, je remplace en même temps L_1 par $L_1 - L_2$ et L_2 par $L_2 - L_1$. »

✓ On obtient $2y = 2$ et $-2y = -2$: ces deux équations disent la même chose, et x a disparu. On fait une opération à la fois, en gardant telle quelle l'équation qui sert, et l'on ne multiplie jamais une équation par 0.

À toi : Un système à résoudre

Résous par la méthode de Gauss le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 9 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Élimine x de L_2 et de L_3 à l'aide de L_1.
Indice 2
Tu dois obtenir $y - 2z = 7$ et $-y + z = -5$.
Indice 3

Point délicat : transforme aussi chaque second membre, puis vérifie la solution dans les trois équations.

Réponse

Élimination de x. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $y - 2z = 7$; l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne $-y + z = -5$.

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $-z = 2$. Le système est triangulaire.

Remontée. D'après la résolution par remontée, $z = -2$, puis $y = 7 + 2 \times (-2) = 3$, puis $x = 2 - 3 + 2 = 1$.

Conclusion. La solution est $(1; 3; -2)$. Contrôle : $1 + 6 + 2 = 9$ et $2 + 3 - 6 = -1$.

Quatre inconnues et problèmes économiques

Un cas particulier, puis quatre inconnues

Devine : Une contradiction

Combien de solutions a le système suivant ?

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

A. Une seule.

Faux.

Les deux premières équations se contredisent : aucune liste ne les vérifie toutes les deux.

B. Aucune.

Juste.

Juste : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $0 = 1$.

C. Une infinité.

Faux.

Une infinité demanderait des équations compatibles ; ici, elles se contredisent.

D. Deux.

Faux.

Le double de la première équation donne $2x + 2y + 2z = 8$, et non 9.

Correction

Si $x + y + z = 4$, alors $2x + 2y + 2z = 8$. La deuxième équation demande 9 : c'est impossible.

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ le montre, puisqu'elle donne $0 = 1$. Le système n'a aucune solution.

En clair. Avec quatre inconnues x, y, z, t, la méthode ne change pas. On élimine x de trois équations, puis y de deux, puis z d'une seule.

Le système devient triangulaire, et l'on remonte. Il y a juste une étape de plus.

Exemple : un système de quatre équations

On résout le système

$$\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ x+2y-z+t=9 \\ 2x+y+z-t=0 \\ x-y+2z+2t=3 \end{cases}$$

Élimination de x. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2-L_1$, $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4-L_1$ donnent $y-2z=4$, $-y-z-3t=-10$ et $-2y+z+t=-2$.

Élimination de y. Les opérations $L_3 \leftarrow L_3+L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4+2L_2$ donnent $-3z-3t=-6$ et $-3z+t=6$.

Élimination de z. L'opération $L_4 \leftarrow L_4-L_3$ donne $4t=12$.

Remontée. D'après la résolution par remontée : $t=3$, puis $-3z=-6+9$, donc $z=-1$, puis $y=4+2\times(-1)=2$, puis $x=5-2+1-3=1$.

Conclusion. La solution est $(1;2;-1;3)$. Contrôle : $1+4+1+3=9$, $2+2-1-3=0$ et $1-2-2+6=3$.

Aucune solution, une infinité

Exemple : une infinité de solutions

On résout le système

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=10 \\ 2x+3y+4z=16 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$ donnent la même équation, $y+2z=4$. Puis $L_3 \leftarrow L_3-L_2$ donne $0=0$: il reste deux équations pour trois inconnues.

On garde z quelconque : $y=4-2z$ et $x=6-y-z=2+z$. Les solutions sont les triplets $(2+z;4-2z;z)$, pour tout réel z : une infinité.

Avec 17 au lieu de 16, on obtiendrait $0=1$: aucune solution.

> **Vérifie : Une solution parmi d'autres**

Pour le système précédent, quelle solution obtient-on avec $z = 1$?

A. $(3; 2; 1)$
Juste.
Juste : $x = 2 + 1$ et $y = 4 - 2$.

B. $(2; 4; 1)$
Faux.
Les valeurs de x et y sont celles de $z = 0$: $2 + 4 + 1 = 7$, et non 6.

C. $(1; 2; 3)$
Faux.
Ici $z = 3$, et non 1 ; de plus $1 + 4 + 9 = 14$, et non 10.

D. $(3; 1; 2)$
Faux.
Ici $z = 2$; de plus $3 + 2 + 6 = 11$, et non 10.

Correction
Avec $z = 1$: $y = 4 - 2 \times 1 = 2$ et $x = 2 + 1 = 3$.

Contrôle dans les trois équations : $3 + 2 + 1 = 6$, $3 + 4 + 3 = 10$ et $6 + 6 + 4 = 16$.

Mettre un problème en équations

Reprends l'atelier fictif du début de la méthode de Gauss : tables, chaises et étagères. D'où viennent ses trois équations ?

Chaque objet passe par trois postes. Voici les heures demandées par objet, et les heures disponibles cette semaine :

- coupe : 2 h par table, 1 h par chaise, 1 h par étagère, 22 h en tout ;
- montage : 3 h, 1 h et 2 h, 31 h en tout ;
- peinture : 1 h, 1 h et 3 h, 25 h en tout.

Combien d'objets de chaque sorte fabriquer pour employer toutes les heures ?

Vérifie : Traduire une phrase

On note x le nombre de tables, y celui de chaises et z celui d'étagères. Quelle équation traduit le poste de peinture ?

A. $3x + y + z = 25$
Faux.
Le 3 est le temps de peinture d'une étagère : il multiplie z, pas x.

B. $x + y + z = 25$
Faux.

Une étagère demande 3 h de peinture, et non 1 h.

C. $x + y + 3z = 25$

Juste.

Juste : 1 h par table, 1 h par chaise, 3 h par étagère.

D. $x + 3y + z = 25$

Faux.

Une chaise demande 1 h de peinture : le 3 va avec z.

Correction

Les tables demandent $x \times 1$ heure de peinture, les chaises $y \times 1$ et les étagères $z \times 3$. Le total vaut 25 h : $x + y + 3z = 25$.

De même, la coupe donne $2x + y + z = 22$ et le montage $3x + y + 2z = 31$.

Exemple : résoudre et interpréter

On place la peinture en L_1, car x y a le coefficient 1 :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 25 \\ 2x + y + z = 22 \\ 3x + y + 2z = 31 \end{cases}$$

Élimination de x. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donnent $-y - 5z = -28$ et $-2y - 7z = -44$.

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $3z = 12$.

Remontée. D'après la résolution par remontée : $z = 4$, puis $y = 28 - 5 \times 4 = 8$, puis $x = 25 - 8 - 12 = 5$.

Conclusion. L'atelier fabrique 5 tables, 8 chaises et 4 étagères. Contrôle : coupe $10 + 8 + 4 = 22$, montage $15 + 8 + 8 = 31$.

Un problème à quatre inconnues

Une usine fictive fabrique quatre modèles de lampes, A, B, C et D. On note x, y, z et t les nombres de lots de chaque modèle fabriqués dans la semaine.

Voici les heures demandées par lot, pour A, B, C et D, et les heures disponibles :

- emballage : 1 h, 1 h, 1 h et 1 h ; 14 h en tout ;
- montage : 1 h, 2 h, 1 h et 2 h ; 23 h en tout ;
- soudure : 2 h, 1 h, 3 h et 1 h ; 21 h en tout ;
- finition : 1 h, 1 h, 2 h et 3 h ; 24 h en tout.

Combien de lots de chaque modèle fabriquer pour employer toutes les heures ?

Exemple : quatre modèles de lampes

Chaque poste donne une équation :

$$\begin{cases} x+y+z+t=14 \\ x+2y+z+2t=23 \\ 2x+y+3z+t=21 \\ x+y+2z+3t=24 \end{cases}$$

Élimination de x. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2-L_1$, $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4-L_1$ donnent $y+t=9$, $-y+z-t=-7$ et $z+2t=10$.

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3+L_2$ donne $z=2$. La quatrième équation ne contient déjà plus y.

Élimination de z. L'opération $L_4 \leftarrow L_4-L_3$ donne $2t=8$.

Remontée. D'après la résolution par remontée : $t=4$, $z=2$, $y=9-4=5$ et $x=14-5-2-4=3$.

Conclusion. L'usine fabrique 3 lots A, 5 lots B, 2 lots C et 4 lots D. Contrôle : montage $3+10+2+8=23$, soudure $6+5+6+4=21$, finition $3+5+4+12=24$.

Méthode, à toi, coin devoir

Méthode : mettre un problème économique en équations

1. **Nomme** les inconnues, avec leur unité : « x : nombre de tables ».
2. **Traduis** chaque information chiffrée par une équation, en vérifiant les unités.
3. **Résous** le système par la méthode de Gauss.
4. **Interprète** : réponds à la question par une phrase, et vérifie que la solution a un sens (quantités positives, entières si besoin).

À toi : Trois prix

Dans une papeterie fictive, on note x, y et z les prix, en dirhams, d'un cahier, d'un classeur et d'un stylo. Un premier client achète 1 cahier, 1 classeur et 1 stylo pour 40 dirhams. Un deuxième achète 2 cahiers, 1 classeur et 3 stylos pour 68 dirhams. Un troisième achète 3 cahiers, 2 classeurs et 1 stylo pour 84 dirhams. Trouve les trois prix. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris une équation par client, avec L_1 : $x+y+z=40$.

Indice 2
Élimine x : tu dois obtenir $-y+z=-12$ et $-y-2z=-36$.
Indice 3
Point délicat : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ élimine y ; transforme aussi le second membre.

Réponse
Mise en équations. Le système est

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ 2x+y+3z=68 \\ 3x+2y+z=84 \end{cases}$$

Élimination de x. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $-y+z=-12$; l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $-y-2z=-36$.

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $-3z=-24$.

Remontée. D'après la résolution par remontée, $z=8$, puis $y=8+12=20$ et $x=40-20-8=12$.

Conclusion. Un cahier coûte 12 dirhams, un classeur 20 dirhams et un stylo 8 dirhams. Contrôle : $24+20+24=68$ et $36+40+8=84$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une mise en équations**

En devoir, la mise en équations se rédige avant tout calcul. Pour l'atelier, écris :

« Soit x le nombre de tables, y celui de chaises et z celui d'étagères. Les heures de peinture donnent $x+y+3z=25$. »

Termine par une phrase réponse, puis vérifie chaque équation de départ.

Inéquations à deux inconnues et régionnement

Les productions possibles

Devine : Possible ou non ?

Un atelier fictif dispose de 20 heures. Un lot de type A demande 2 h, un lot de type B demande 1 h. Avec x lots A et y lots B, il faut $2x+y \leq 20$. Quelle production est possible ?

A. 6 lots A et 10 lots B.
Faux.
On a $2\times 6+10=22$: il faudrait 22 heures.

B. 9 lots A et 4 lots B.
Faux.
On a $2\times 9+4=22$: il faudrait 22 heures.

C. 10 lots A et 1 lot B.

Faux.

On a $2 \times 10 + 1 = 21$: une heure de trop.

D. 5 lots A et 8 lots B.

Juste.

Juste : $2 \times 5 + 8 = 18$, et $18 \leq 20$.

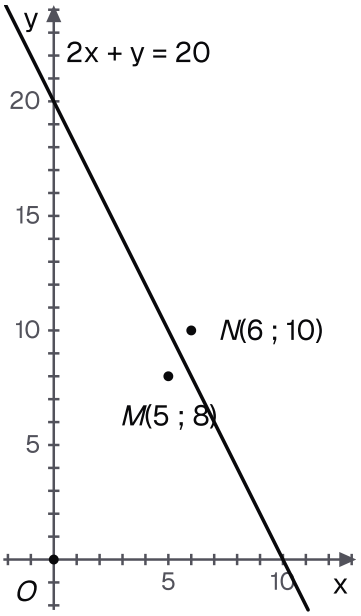
Correction

On calcule $2x + y$ pour chaque production : 22, 22, 21 et 18. Seule la dernière respecte $2x + y \leq 20$.

Dans un repère, les productions possibles forment une région du plan : c'est elle qu'on apprend à représenter.

Un rappel bref. Chaque production est un point $M(x ; y)$ d'un repère. La droite d'équation $2x + y = 20$ partage le plan en deux : d'un côté, $2x + y < 20$; de l'autre, $2x + y > 20$.

Représenter les solutions d'une inéquation, c'est trouver le bon côté.



La droite d'équation 2x + y = 20 sépare deux productions de l'activité : M(5 ; 8), possible, est du côté de l'origine ; N(6 ; 10), qui demande 22 heures, est de l'autre côté.

Deux demi-plans

Pourquoi est-ce vrai ? Quand $b \neq 0$, prends un point M et le point de la droite qui a la même abscisse. Comparer leurs ordonnées suffit à connaître le signe de $ax + by + c$.

Tous les points situés au-dessus de la droite donnent donc le même signe.

Propriété : Demi-plans définis par une inéquation du premier degré à deux inconnues

Le plan est muni d'un repère. Soit a, b, c trois réels avec $(a;b) \neq (0;0)$, et (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$. La droite (D) partage le plan en deux **demi-plans** ouverts : l'un est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c>0$, l'autre l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c<0$. En particulier, tous les points d'un même demi-plan donnent à $ax+by+c$ le même signe : il suffit de **tester un point** qui n'est pas sur (D) pour savoir quel demi-plan convient.

Démonstration

Étape 1. Cas $b \neq 0$. Pour un point $M(x;y)$, notons $y_D = \dfrac{-ax-c}{b}$ l'ordonnée du point de (D) de même abscisse que M. Alors $b(y-y_D) = by+ax+c$, c'est-à-dire $ax+by+c = b(y-y_D)$.

Étape 2. Donc $ax+by+c$ est du signe de b lorsque $y>y_D$, c'est-à-dire lorsque M est au-dessus de (D), et du signe contraire lorsque $y<y_D$, c'est-à-dire lorsque M est au-dessous. Les deux demi-plans sont la partie située au-dessus de (D) et la partie située au-dessous.

Étape 3. Cas $b=0$. Alors $a \neq 0$, la droite (D) a pour équation $x=-\dfrac{c}{a}$ et $ax+by+c = a\left(x+\dfrac{c}{a}\right)$: l'expression est du signe de a lorsque M est à droite de (D), c'est-à-dire lorsque $x>-\dfrac{c}{a}$, et du signe contraire lorsque M est à gauche.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Quand $b \neq 0$, la preuve note y_D l'ordonnée du point de la droite de même abscisse que M. Elle obtient

$$ax+by+c = b(y-y_D).$$

Le signe dépend alors seulement de la position de M : au-dessus ou au-dessous de la droite.

Quand $b=0$, la droite est verticale : l'expression a le signe de a à droite de la droite, le signe contraire à gauche.

Vérifie : De part et d'autre

Quel est le signe de $2x+y-20$ au point $(0;0)$, puis au point $(10;10)$?

A. Positif, puis négatif.

Faux.

En $(0;0)$, on trouve -20, qui est négatif.

B. Négatif les deux fois.

Faux.

En $(10;10)$, on trouve $20+10-20=10$, qui est positif.

C. Positif les deux fois.

Faux.

En $(0;0)$, on trouve -20, qui est négatif.

D. Négatif, puis positif.

Juste.

Juste : -20 en $(0;0)$, puis 10 en $(10;10)$.

Correction

En $(0;0)$: $2\times 0+0-20=-20$, négatif. En $(10;10)$: $20+10-20=10$, positif. Les deux points sont de part et d'autre de la droite d'équation $2x+y-20=0$.

Ici $b=1$, et l'égalité de la preuve donne, pour tout point $M(x;y)$,

$$2x+y-20=y-y_D.$$

En $(0;0)$, $y_D=20$, donc $y-y_D=-20$; en $(10;10)$, $y_D=0$, donc $y-y_D=10$.

Exemple : le bon côté de la droite

Le bon côté. Pour $2x+y-20$, faisons le test de l'origine : $2\times 0+0-20=-20$, négatif. D'après les demi-plans d'une inéquation, $2x+y-20<0$ dans tout le demi-plan de l'origine, au-dessous de la droite, et $2x+y-20>0$ de l'autre côté.

Les productions possibles sont sur la droite ou du côté de l'origine.

L'hypothèse compte. Le point $(10;0)$ est sur la droite : $20+0-20=0$. Il ne permet de tester aucun côté.

Plusieurs inéquations à la fois

Exemple : une droite verticale

Pour $x-3\leq 0$, on a $b=0$: la frontière est la droite verticale d'équation $x=3$. D'après les demi-plans d'une inéquation, les solutions sont les points situés sur cette droite ou à sa gauche.

Test de l'origine : $0-3=-3\leq 0$, l'origine convient.

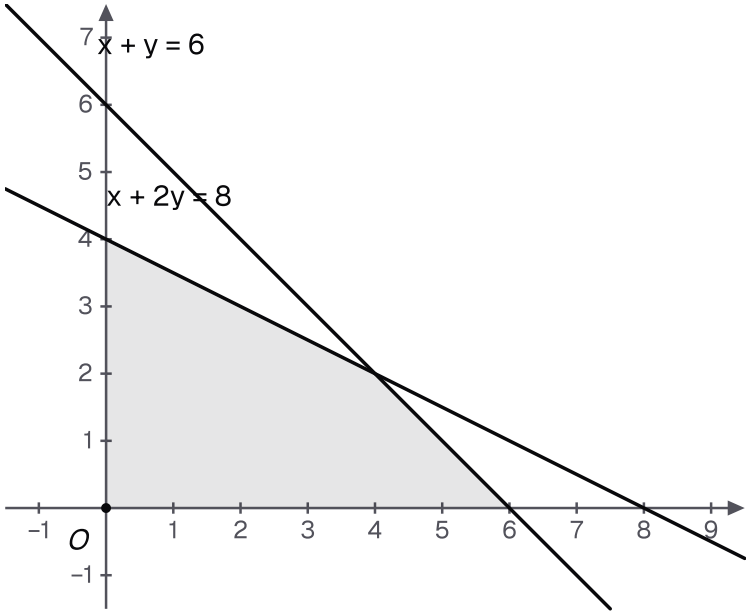
De même, $y\geq 0$ décrit les points situés sur l'axe des abscisses ou au-dessus.

Exemple : un système d'inéquations

On cherche les points qui vérifient à la fois $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 6$ et $x+2y\leq 8$.

- Les frontières sont les axes et les droites d'équations $x+y=6$ et $x+2y=8$.
- Le test de l'origine convient pour chaque inéquation : $0\leq 6$ et $0\leq 8$.
- Les deux droites se coupent en $(4;2)$: $4+2=6$ et $4+4=8$.

La région cherchée est le quadrilatère de sommets $(0;0)$, $(6;0)$, $(4;2)$ et $(0;4)$.



La partie teintée réunit les solutions du système x ≥ 0, y ≥ 0, x + y ≤ 6 et x + 2y ≤ 8 : le quadrilatère de sommets (0 ; 0), (6 ; 0), (4 ; 2) et (0 ; 4), côtés compris.

Vérifie : Dans la région ?

Lequel de ces points appartient à la région de l'exemple ?

A. $(5; 2)$

Faux.

$5 + 2 = 7$: la contrainte $x + y \leq 6$ n'est pas respectée.

B. $(3; 2)$

Juste.

Juste : $3 + 2 = 5 \leq 6$ et $3 + 4 = 7 \leq 8$.

C. $(1; 4)$

Faux.

$1 + 8 = 9$: la contrainte $x + 2y \leq 8$ n'est pas respectée.

D. $(-1; 2)$

Faux.

Son abscisse est négative : la contrainte $x \geq 0$ n'est pas respectée.

Correction

On teste chaque inéquation. Pour $(3; 2)$: $3 \geq 0$, $2 \geq 0$, $3 + 2 = 5 \leq 6$ et $3 + 2 \times 2 = 7 \leq 8$. Les quatre sont vérifiées.

Chacun des autres points en viole au moins une.

La méthode, puis à toi

Méthode : représenter les solutions d'un système d'inéquations

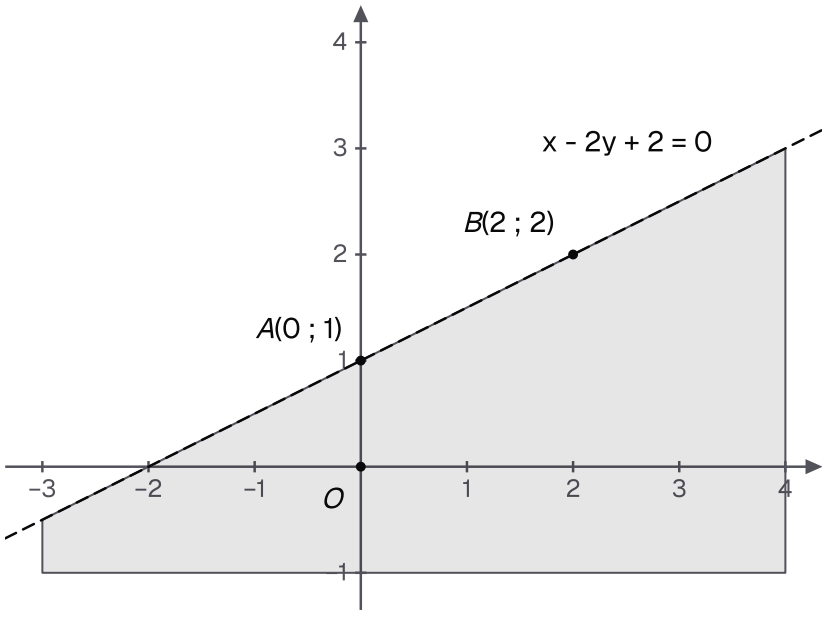
1. **Trace** chaque droite frontière. Inégalité large ($\leq$, $\geq$) : la droite fait partie des solutions, trait plein. Inégalité stricte : elle n'en fait pas partie, trait pointillé.
2. **Choisis** un point de test qui n'appartient pas à la droite (l'origine convient quand la droite ne passe pas par elle) et regarde si ses coordonnées vérifient l'inégalité.
3. **Hachure** le demi-plan qui ne convient pas, pour chaque inéquation.
4. **Lis** la région restée blanche : c'est l'ensemble des solutions du système.

Exemple : une inégalité stricte

Pour $x - 2y + 2 > 0$, la frontière passe par $(0; 1)$ et $(2; 2)$: $0 - 2 + 2 = 0$ et $2 - 4 + 2 = 0$.

L'inégalité est stricte : la droite est tracée en pointillés, ses points ne conviennent pas.

Test de l'origine : $0 - 0 + 2 = 2 > 0$. L'origine convient : on hachure l'autre côté de la droite.



Frontière en pointillés pour l'inégalité stricte x - 2y + 2 > 0 : la droite passe par A(0 ; 1) et B(2 ; 2), et la partie teintée, du côté de l'origine, réunit les solutions.

À toi : Une région à décrire

Représente les solutions du système formé de $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 8$ et $x + 3y \leq 9$. Donne les sommets de la région obtenue. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Trace les droites d'équations $2x + y = 8$ et $x + 3y = 9$ à l'aide de leurs points sur les axes.

Indice 2
Teste l'origine pour chaque inéquation.
Indice 3
Point délicat : le sommet commun aux deux droites se calcule en résolvant un système de deux équations.

Réponse
Les droites. La droite d'équation $2x + y = 8$ passe par $(4;0)$ et $(0;8)$; la droite d'équation $x + 3y = 9$ passe par $(9;0)$ et $(0;3)$.

Le bon côté. L'origine vérifie $0 \leq 8$ et $0 \leq 9$: pour chaque droite, la région est du côté de l'origine.

Le sommet commun. Le point commun aux deux droites est la solution du système

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

Son déterminant vaut $D = 6 - 1 = 5$. Avec $D_x = 24 - 9 = 15$ et $D_y = 18 - 8 = 10$, on obtient $x = \dfrac{15}{5} = 3$ et $y = \dfrac{10}{5} = 2$.

Conclusion. La région est le quadrilatère de sommets $(0;0)$, $(4;0)$, $(3;2)$ et $(0;3)$.

Programmation linéaire

Produire au mieux

Un atelier fictif fabrique des lots de sacs et des lots de portefeuilles. Un lot de sacs demande 1 h de montage et 3 h de coupe. Un lot de portefeuilles demande 2 h de montage et 2 h de coupe.

L'atelier dispose de 14 h de montage et de 18 h de coupe. Un lot de sacs rapporte 3 milliers de dirhams, un lot de portefeuilles 4 milliers. Que fabriquer pour gagner le plus ?

Devine : Le meilleur choix

Quel plan de production donne la plus grande marge sans dépasser le temps de travail dont dispose l'atelier ?

A. 6 lots de sacs seulement.
Faux.
Elle respecte les heures, mais rapporte $3 \times 6 = 18$ milliers.

B. 7 lots de portefeuilles seulement.
Faux.
Elle respecte les heures et rapporte $4 \times 7 = 28$ milliers : on peut faire mieux.

C. 2 lots de sacs et 6 de portefeuilles.
Juste.
Juste : 14 h de montage, 18 h de coupe, et $3 \times 2 + 4 \times 6 = 30$ milliers.

D. 4 lots de chaque.

Faux.

La coupe demanderait $3 \times 4 + 2 \times 4 = 20$ h, plus que 18 h.

Correction

On note x le nombre de lots de sacs et y celui de lots de portefeuilles. Le bénéfice vaut $3x + 4y$ milliers de dirhams.

Les trois premières productions respectent les heures et donnent 18, 28 et 30 milliers. La quatrième, 4 lots de chaque, donnerait 28 milliers, mais elle demande 20 h de coupe : elle est impossible.

La production qui donne 30 emploie toutes les heures. Reste à savoir si l'on peut faire mieux : c'est l'objet de cette section.

Contraintes et polygone

Exemple : écrire les contraintes

Les nombres de lots sont positifs : $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

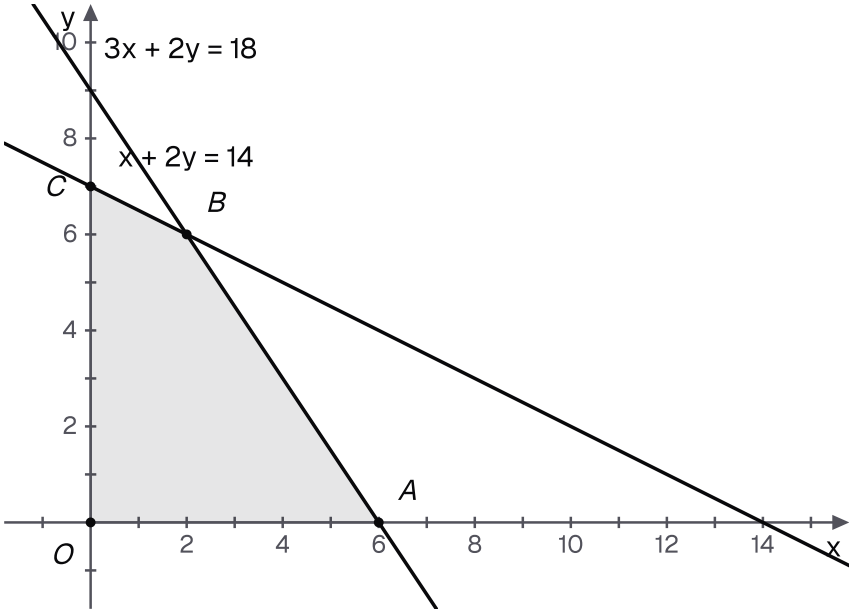
- Le montage demande $x + 2y$ heures, au plus 14 : $x + 2y \leq 14$.
- La coupe demande $3x + 2y$ heures, au plus 18 : $3x + 2y \leq 18$.

Le bénéfice à rendre maximal est la fonction économique $z = 3x + 4y$.

Exemple : le polygone des contraintes

On représente les quatre contraintes comme dans la section précédente. La droite $x + 2y = 14$ passe par $(14; 0)$ et $(0; 7)$; la droite $3x + 2y = 18$ passe par $(6; 0)$ et $(0; 9)$.

L'origine vérifie les deux inéquations. La région obtenue est le polygone des contraintes $\mathcal{P}$, de sommets $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $B(2; 6)$ et $C(0; 7)$.



Les quatre contraintes de l'atelier délimitent la zone teintée OABC : ses côtés reposent sur les deux axes, sur la droite du montage x + 2y = 14 et sur celle de la coupe 3x + 2y = 18.

Vérifie : Le sommet intérieur

Le sommet B est le point commun aux droites d'équations $x + 2y = 14$ et $3x + 2y = 18$. Quelles sont ses coordonnées ?

A. $(2; 6)$

Juste.

Juste : $2 + 12 = 14$ et $6 + 12 = 18$.

B. $(6; 2)$

Faux.

On a $6 + 4 = 10$, et non 14.

C. $(4; 5)$

Faux.

On a $4 + 10 = 14$, mais $12 + 10 = 22$, et non 18.

D. $(0; 7)$

Faux.

C'est le sommet C, sur la première droite seulement : $3 \times 0 + 2 \times 7 = 14$, et non 18.

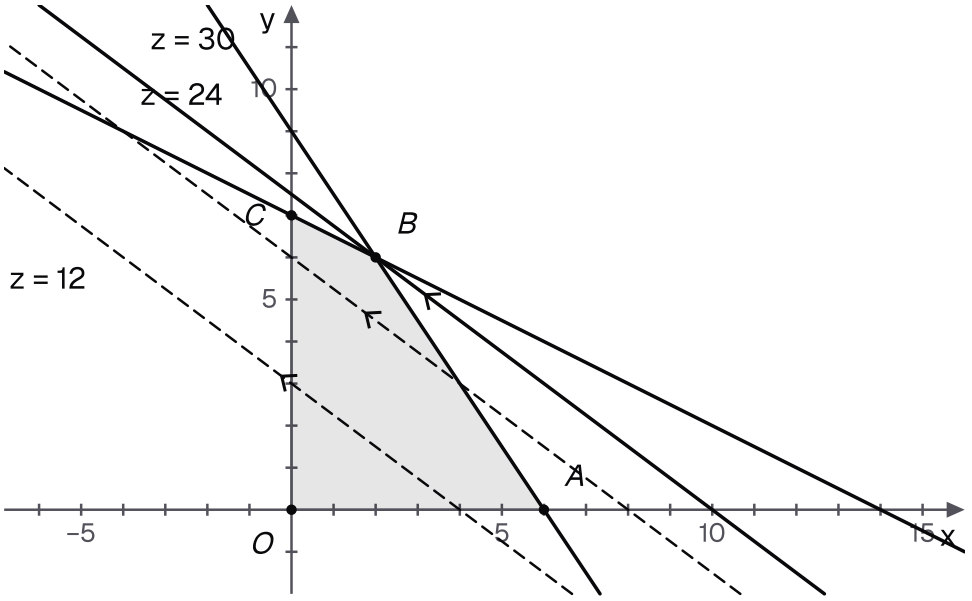
Correction

On soustrait la première équation de la seconde : $2x = 4$, donc $x = 2$. Puis $2y = 14 - 2 = 12$, donc $y = 6$. Le sommet est $B(2; 6)$.

Où se trouve le maximum ?

En clair. Pour une valeur k, les points où $z = k$ forment une droite. Quand k augmente, cette droite glisse parallèlement à elle-même.

Le dernier point du polygone qu'elle touche donne le maximum : c'est un sommet, ou un côté entier. L'énoncé qui suit l'affirme sans le démontrer.



Trois droites de la forme 3x + 4y = k, toutes parallèles : pour k = 12 et k = 24, elles traversent le polygone ; pour k = 30, elle ne le touche plus qu'au sommet B.

Propriété : Optimum d'une fonction économique sur le polygone des contraintes

Le plan est muni d'un repère. On considère un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues x et y (les **contraintes**), dont l'ensemble des solutions est représenté par un polygone $\mathcal{P}$, non vide, appelé **polygone des contraintes**. Soit p et q deux réels et $z = px + qy$ la **fonction économique**. Alors, lorsque le point $M(x;y)$ décrit $\mathcal{P}$, la valeur maximale et la valeur minimale de z sont atteintes en des **sommets** de $\mathcal{P}$.

Remarque : Statut de ce résultat

Ce résultat est admis. Il permet de ne calculer z qu'en un petit nombre de points : les sommets du polygone.

Exemple : la meilleure production

D'après l'optimum d'une fonction économique, on calcule $z = 3x + 4y$ aux quatre sommets :

- en $O(0;0)$: $z = 0$;

- en $A(6;0)$: $z = 18$;
- en $B(2;6)$: $z = 6 + 24 = 30$;
- en $C(0;7)$: $z = 28$.

Le maximum vaut 30, atteint en B. L'atelier fabrique 2 lots de sacs et 6 lots de portefeuilles, pour un bénéfice de 30 milliers de dirhams.

Une autre fonction économique

Vérifie : Changer de prix

Sur le même polygone, la fonction économique devient $z = 5x + 2y$. En quel sommet z est-il maximal ?

A. En $B(2;6)$.
Faux.
En B, $z = 10 + 12 = 22$; un autre sommet donne plus.

B. En $C(0;7)$.
Faux.
En C, $z = 14$ seulement.

C. En $O(0;0)$.
Faux.
En O, $z = 0$: c'est le minimum.

D. En $A(6;0)$.
Juste.
Juste : $z = 30$ en A, contre 22 en B et 14 en C.

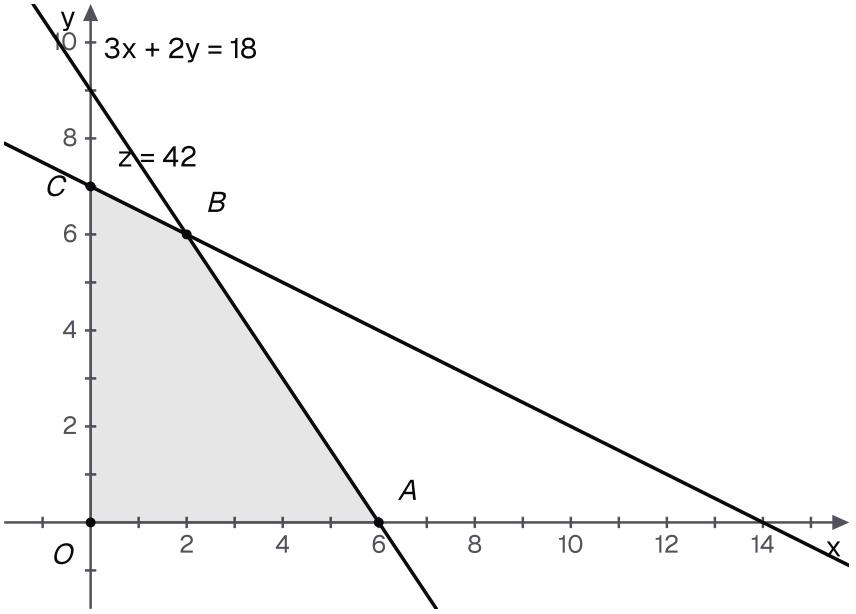
Correction
D'après l'optimum d'une fonction économique, on compare les valeurs aux sommets : 0 en O, $5 \times 6 = 30$ en A, $10 + 12 = 22$ en B et 14 en C.

Le maximum, 30, est atteint en A. Le meilleur sommet dépend donc des prix.

Exemple : un maximum atteint en deux sommets

Avec $z = 3x + 6y$: $z = 0$ en O, 18 en A, $6 + 36 = 42$ en B et 42 en C. Le maximum, 42, est atteint en deux sommets.

Sur le côté $[BC]$, on a $x + 2y = 14$, donc $z = 3(x + 2y) = 42$: tous les points de ce côté donnent le maximum.



Avec z = 3x + 6y, la droite z = 42 contient tout le côté [BC] du polygone : le maximum est atteint en B, en C et en chaque point de ce côté.

Méthode, piège, à toi, coin devoir

Méthode : résoudre un problème de programmation linéaire

1. **Nomme** les inconnues et écris les contraintes, sans oublier $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
2. **Écris** la fonction économique $z = px + qy$.
3. **Représente** le polygone des contraintes et calcule ses sommets.
4. **Calcule** z en chaque sommet, puis conclus par une phrase réponse.

Attention : n'oublier aucune contrainte

✗ « Avec $x + 2y \leq 14$ et $3x + 2y \leq 18$, le point $(-2; 8)$ convient. »

✓ Il vérifie bien ces deux inéquations, car $-2 + 16 = 14$ et $-6 + 16 = 10$. Mais produire -2 lots n'a pas de sens : on ajoute $x \geq 0$ et $y \geq 0$, et ce point est exclu.

✗ « Le maximum de $z = 3x + 4y$ vaut $4 \times 9 = 36$, atteint en $(0; 9)$, sur la droite de coupe. »

✓ Le point $(0; 9)$ ne respecte pas toutes les contraintes : $0 + 2 \times 9 = 18$ dépasse les 14 h de montage. On ne calcule z qu'aux sommets O, A, B et C du polygone : le maximum vaut 30. Quand on compte des lots, l'optimum doit aussi être entier : $B(2; 6)$ l'est.

À toi : Une coopérative fictive

Une coopérative fictive produit x tonnes d'un produit et y tonnes d'un autre. Les contraintes sont $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 8$ et $x + 3y \leq 9$. Le bénéfice, en milliers de dirhams, vaut $z = 2x + 3y$. Trouve la production qui le rend maximal. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Représente le polygone des contraintes et trouve ses quatre sommets.
Indice 2
Le sommet commun aux deux droites est $(3; 2)$.
Indice 3
Point délicat : calcule z en chacun des quatre sommets, pas seulement aux sommets situés sur les axes.

Réponse
Le polygone des contraintes a pour sommets $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(3; 2)$ et $(0; 3)$.

D'après l'optimum d'une fonction économique, on calcule z en chacun : 0, 8, $6 + 6 = 12$ et 9.

Le maximum vaut 12 milliers de dirhams, atteint en $(3; 2)$. La coopérative produit 3 tonnes du premier produit et 2 tonnes du second.

Remarque : Coin devoir : rédiger la conclusion

En devoir, présente les valeurs de z aux sommets, puis conclus par une phrase. Pour l'atelier, écris :

« D'après l'optimum de la fonction économique, le maximum de z est atteint en un sommet du polygone des contraintes. Il vaut 30, en $B(2; 6)$: l'atelier fabrique 2 lots de sacs et 6 lots de portefeuilles. »

Cite toujours le résultat employé.

Synthèse

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Résoudre** $ax^2 + bx + c = 0$: calculer Δ, puis appliquer les formules.
- **Étudier un signe**, résoudre une inéquation : racines, puis signe de a à l'extérieur des racines.
- **Équation bicarrée** : poser $X = x^2$. **Produit ou quotient** : valeurs interdites, puis tableau de signes.
- **Deux équations, deux inconnues** : déterminant D, puis $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$.
- **Trois ou quatre inconnues** : méthode de Gauss, puis remontée.
- **Inéquation à deux inconnues** : droite frontière, puis test d'un point.

- **Meilleure production** : contraintes, polygone, valeur de z en chaque sommet.

Vérifie : Contrôle : une inéquation

Quel est l'ensemble des solutions de $x^2 - 3x - 10 < 0$?

A. $]-5;2[$
Faux.
Signes des racines inversés : $(-5)^2 - 3 \times (-5) - 10 = 30$, et non 0.

B. $]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$
Faux.
Avec $a = 1$ positif, le trinôme est négatif entre les racines, pas à l'extérieur.

C. $[-2;5]$
Faux.
L'inégalité est stricte : les racines, où le trinôme est nul, sont exclues.

D. $]-2;5[$
Juste.
Juste : racines -2 et 5, et $a = 1$ est positif.

Correction
On a $\Delta = 9 + 40 = 49$, et les racines sont $\dfrac{3-7}{2} = -2$ et $\dfrac{3+7}{2} = 5$.

Comme $a = 1$ est positif, le trinôme est strictement négatif entre les racines : $S =]-2;5[$.

Vérifie : Contrôle : quelle méthode ?

Une entreprise fictive cherche les quantités de trois produits, connaissant trois totaux. Quelle méthode emploies-tu ?

A. La méthode de Gauss.
Juste.
Juste : trois équations linéaires à trois inconnues.

B. La méthode du déterminant D.
Faux.
Ce déterminant ne concerne que deux équations à deux inconnues.

C. Le calcul du discriminant.
Faux.
Le discriminant sert aux équations du second degré à une inconnue.

D. Le régionnement du plan.
Faux.
Le régionnement représente des inéquations, pas des égalités.

Correction
Trois totaux donnent trois équations du premier degré, d'inconnues les trois quantités. La méthode de Gauss les ramène à un système triangulaire, que l'on résout par remontée.

Vérifie : Contrôle : une opération

Avec $L_1 : x - 2y + z = 1$ et $L_2 : 3x + y - z = 2$, quelle opération élimine x de L_2 ?

A. $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$
Faux.
On obtient $6x$: x ne disparaît pas.

B. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
Juste.
Juste : $3x - 3x = 0$.

C. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
Faux.
Il reste $2x$.

D. $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$
Faux.
On modifie L_1, et il y reste $-8x$.

Correction
L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ transforme le premier membre en

$$\begin{aligned}&(3x + y - z) - 3(x - 2y + z)\\ &= 7y - 4z,\end{aligned}$$

et le second membre en $2 - 3 = -1$. La nouvelle équation est $7y - 4z = -1$: elle ne contient plus x.

Vérifie : Contrôle : un optimum

Un polygone des contraintes a pour sommets $(0;0)$, $(4;0)$, $(2;3)$ et $(0;4)$. Quel est le maximum de $z = 2x + y$ sur ce polygone ?

A. 7, en $(2;3)$
Faux.
En $(4;0)$, $z = 8$, qui est plus grand.

B. 8, en $(4;0)$
Juste.
Juste : z vaut 0, 8, 7 et 4 aux quatre sommets.

C. 4, en $(0;4)$

Faux.
En $(4;0)$, $z=8$, qui est plus grand.

D. 9, en $(4;1)$
Faux.
Le point $(4;1)$ n'est pas un sommet du polygone.

Correction
D'après l'optimum d'une fonction économique, on calcule z aux sommets : 0, $2\times 4=8$, $4+3=7$ et 4.

Le maximum vaut 8, atteint en $(4;0)$.

Le mot du prof. Ce chapitre réunit des outils de calcul utiles en économie : seuils de rentabilité, quantités à produire, meilleure production. Avant chaque calcul, nomme la méthode. Après, contrôle ton résultat dans l'équation ou l'inéquation de départ.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations, inéquations et systèmes » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)