BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée, sauf à la question 1.a de l'exercice 1. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4,75 pts

Logarithme décimal : calculs, équations et inéquation

Dans tout l'exercice, $\log$ désigne la fonction logarithme décimal. Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

Sans calculatrice, calculer $A = \log 250 + \log 40$ et $B = 2\log 5 + \log 4 - \log 0{,}001$.

1.b — 0,75 pts

Exprimer $\log 72$ et $\log 0{,}18$ en fonction de $\log 2$ et de $\log 3$.

2.a — 0,5 pts

On considère l'équation (E) : $\log x + \log(x-3) = 1$. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels (E) a un sens.

2.b — 0,75 pts

Résoudre l'équation (E) dans D.

INDICE

Écrire $1 = \log 10$ et utiliser la propriété du produit.

3 — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log(2x-1) \leq \log(x+3)$.

INDICE

Commencer par les conditions d'existence des deux logarithmes.

4 — 1,25 pts

On considère l'équation (F) : $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$. En posant $X = \log x$, résoudre (F).

Exercice 2 — 4 pts

Logarithme décimal et évolution d'une production

En 2025, un atelier fictif de poterie a fabriqué $4\,000$ pièces. On suppose que, d'une année à la suivante, sa production est multipliée par $1{,}25$.

Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre de pièces fabriquées par l'atelier l'année $2025 + n$; ainsi $p_0 = 4\,000$. Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

1 — 0,75 pts

Calculer p_1 et p_2. Justifier que la suite (p_n) est géométrique, puis exprimer p_n en fonction de n.

2.a — 1,25 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_n \geq 12\,000$ si et seulement si $n \geq \dfrac{\log 3}{\log 1{,}25}$.

2.b — 0,75 pts

En déduire l'année à partir de laquelle la production de l'atelier atteint au moins $12\,000$ pièces.

3 — 1,25 pts

Une coopérative fictive voisine a fabriqué $9\,000$ pièces en 2025, et sa production est multipliée par $1{,}1$ d'une année à la suivante : l'année $2025 + n$, elle fabrique $q_n = 9\,000 \times 1{,}1^n$ pièces. On admet que, pour tout entier naturel n, $p_n > q_n$ si et seulement si $n\,(\log 1{,}25 - \log 1{,}1) > \log 2{,}25$ (on l'obtient en comparant $\log p_n$ et $\log q_n$, comme à la question 2.a). En déduire l'année à partir de laquelle l'atelier fabrique plus de pièces que la coopérative.

INDICE

Justifier d'abord que $\log 1{,}25 - \log 1{,}1 > 0$.

Exercice 3 — 5,5 pts

Dénombrement : menus et contrôle d'un lot

La question 1 est indépendante des autres.

Les questions 2 à 6 portent sur un lot de 10 téléphones reçu par un magasin fictif, dont 3 sont défectueux et 7 sont en bon état. Dans les questions 2 à 5, un contrôleur prélève 3 téléphones de ce lot, de plusieurs façons.

1 — 1,25 pts

Un restaurant fictif propose un menu composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. L'entrée est choisie parmi salade (S) et harira (H), le plat parmi viande (V), poisson (P) et légumes (L), le dessert parmi fruit (F) et crème (C). À l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de menus possibles, puis le nombre de menus qui comportent du poisson.

2 — 0,75 pts

Le contrôleur prélève simultanément 3 téléphones du lot. Montrer qu'il y a 120 prélèvements possibles.

3.a — 0,75 pts

Combien de ces prélèvements simultanés contiennent exactement un téléphone défectueux ?

3.b — 0,75 pts

Combien de ces prélèvements simultanés contiennent au moins un téléphone défectueux ?

INDICE

Dénombrer d'abord les prélèvements qui ne contiennent aucun téléphone défectueux.

4 — 1 pts

Le contrôleur prélève maintenant les 3 téléphones successivement et sans remise, en notant l'ordre des tirages. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien de ces tirages ne comportent que des téléphones en bon état ?

5 — 0,5 pts

Le contrôleur prélève enfin les 3 téléphones successivement et avec remise (chaque téléphone est remis dans le lot avant le tirage suivant). Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien ne comportent que des téléphones en bon état ?

6 — 0,5 pts

On appelle partie du lot tout ensemble formé de téléphones du lot, de 0 à 10 téléphones. Rappeler le nombre de parties du lot à k éléments, pour $0 \leq k \leq 10$, puis, à l'aide de la formule du binôme appliquée à $(1+1)^{10}$, montrer que le lot possède $2^{10} = 1\,024$ parties.

Exercice 4 5,75 pts

Calcul matriciel : heures de travail d'un atelier

Un atelier fictif de menuiserie fabrique des tables, des chaises et des étagères. Chaque meuble passe par trois postes : la découpe, l'assemblage et la finition.

- Une table demande 1 heure de découpe, 2 heures d'assemblage et 1 heure de finition.
- Une chaise demande 1 heure de découpe, 1 heure d'assemblage et 2 heures de finition.
- Une étagère demande 2 heures de découpe, 3 heures d'assemblage et 2 heures de finition.

1 0,5 pts

Écrire la matrice carrée A d'ordre 3 dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est le nombre d'heures demandées au poste i par un meuble j ; les lignes correspondent, dans cet ordre, à la découpe, à l'assemblage et à la finition, et les colonnes à la table, à la chaise et à l'étagère.

2 1,5 pts

Les commandes du premier trimestre sont données par la matrice N ci-dessous : ses lignes correspondent aux tables, aux chaises et aux étagères, et ses colonnes à janvier, février et mars. Calculer la matrice AN.

$$N = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 20 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

3 0,75 pts

Que représente le coefficient de AN situé à la ligne 2 et à la colonne 3 ? Calculer le nombre total d'heures de finition du trimestre.

4 0,5 pts

Deux magasins fictifs envisagent de passer chacun, pour ce même trimestre, la commande supplémentaire donnée par la matrice S ci-dessous (mêmes lignes et mêmes colonnes que N). Calculer la matrice $2S$, puis la matrice $N' = N + 2S$ des commandes du trimestre dans ce cas.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.a 0,75 pts

En avril, l'atelier utilise exactement 70 heures de découpe, 100 heures d'assemblage et 100 heures de finition. On note x, y et z les nombres de tables, de chaises et d'étagères fabriquées en avril. Écrire le système vérifié par x, y et z, puis montrer qu'il s'écrit $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

5.b 1,75 pts

Résoudre ce système par la méthode de Gauss appliquée à sa matrice augmentée, puis donner les nombres de tables, de chaises et d'étagères fabriquées en avril.

INDICE

Annuler d'abord les coefficients de x des lignes L_2 et L_3 à l'aide de L_1.

SOURCES

BURHAN