BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 5,25 pts

Parité, fonction bornée et taux de variation

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$; on note $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f, puis montrer que f est impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.

2 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$ et $1 + f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$. En déduire que $-1 \leq f(x) \leq 1$ pour tout réel x, puis que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3.a 1 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. Montrer que le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est :

$$T(x_1, x_2) = \frac{4\,(4 - x_1 x_2)}{(x_1^2+4)\,(x_2^2+4)}.$$

INDICE

Réduire $f(x_2) - f(x_1)$ au même dénominateur ; au numérateur, regrouper les termes pour mettre $x_1 - x_2$ en facteur.

3.b 1 pts

Prouver alors que f croît strictement sur $[0\,;\,2]$ et décroît strictement sur $[2\,;\,+\infty[$.

INDICE

Le taux de variation a le signe de $4 - x_1 x_2$.

3.c 1,25 pts

Calculer $f(2)$ et $f(-2)$. En utilisant la parité de f, dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, puis préciser les extremums de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une fonction impaire a le même sens de variation sur $[-2\,;\,0]$ que sur $[0\,;\,2]$.

Exercice 2 — 5 pts

Fonction homographique, fonction racine et résolution graphique

On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ et $h(x) = \sqrt{x+7}$, et leurs courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_g de g, puis vérifier que, pour tout $x \in D_g$, $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$.

1.b — 1,25 pts

En utilisant la monotonie d'une composée, déterminer le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations (on calculera $g(0)$ et $g(2)$).

INDICE

Écrire $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ comme la composée de $x \mapsto x-1$ suivie de la fonction inverse.

2 — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_h de h, puis donner son sens de variation.

3 — 1,25 pts

Tracer $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm, pour $x \in [-7\,;\,6]$ et $y \in [-3\,;\,6]$. On donne $g(-1) = \dfrac{3}{2}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4$, $g(3) = \dfrac{5}{2}$, $h(-6) = 1$ et $h(-3) = 2$.

4 — 1 pts

Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, l'inéquation $g(x) \geq h(x)$, puis justifier ce résultat à l'aide des variations de g et de h.

INDICE

Repérer le point d'intersection des deux courbes à droite de la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3 — 4,5 pts

Suite arithmétique, suite géométrique et sommes de termes

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

Soit (a_n) une suite arithmétique telle que $a_3 = 11$ et $a_8 = 26$. Déterminer sa raison r et son premier terme a_0, puis exprimer a_n en fonction de n.

1.b — 0,75 pts

On pose $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+4)}{2}$.

1.c — 1 pts

Déterminer l'entier naturel n tel que $S_n = 155$.

INDICE

Se ramener à une équation du second degré en n ; on pourra utiliser $61^2 = 3721$.

2.a — 1 pts

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $b_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2.b — 1 pts

Calculer la somme $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$; on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 4 — 5,25 pts

Évolution d'un stock

Une coopérative fictive produit de la semoule, conditionnée en sacs et rangée dans un entrepôt d'une capacité de 1500 sacs. On note s_n le nombre de sacs en stock au début du mois numéro n ; au début de l'étude ($n = 0$), le stock est de 1000 sacs. Chaque mois, les livraisons aux clients font que le stock est multiplié par $0{,}8$, puis la coopérative ajoute 300 nouveaux sacs. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$s_{n+1} = 0{,}8\, s_n + 300 \quad \text{et} \quad s_0 = 1000.$$

1 — 0,5 pts

Calculer s_1 et s_2.

2.a — 0,75 pts

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = s_n - 1500$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}8$ et calculer v_0.

INDICE

Exprimer v_{n+1} à l'aide de s_n, puis mettre $0{,}8$ en facteur.

2.b — 0,75 pts

Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout entier naturel n, $s_n = 1500 - 500 \times 0{,}8^n$.

3.a — 1,25 pts

Établir que, pour tout entier naturel n, $s_{n+1} - s_n = 100 \times 0{,}8^n$. Que peut-on dire alors du sens de variation de (s_n) ? Interpréter.

3.b — 0,75 pts

Montrer que la suite (s_n) est majorée par 1500. Le stock atteindra-t-il un jour la capacité de l'entrepôt (1500 sacs) ?

4 — 1,25 pts

Calculer s_7 et s_8, arrondis à l'unité, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $s_n > 1400$.

SOURCES

BURHAN