BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4 pts

Calculs de limites

Les questions de cet exercice sont indépendantes. Chaque résultat doit être justifié.

1.a — 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x^3 + 5x^2 - x + 7\right)$.

1.b — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x^2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + x}{2x - 3}$.

2 — 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, puis calculer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

3 — 1 pts

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$ tel que $x \neq 4$, $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

INDICE

Écrire $x - 4$ comme une différence de deux carrés.

4 — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{9x + 1}{x + 2}}$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 3\sqrt{x}\right)$ en remarquant que, pour tout $x \geq 0$, $x - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\right)$.

Exercice 2 — 4,25 pts

Nombre dérivé, tangente et calcul de dérivées

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 2x$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe de f.

1.a — 0,75 pts

On rappelle que, pour tout réel h, $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$. Montrer que, pour tout réel h non nul, $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h^2 + 3h + 1$.

1.b — 0,75 pts

En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.

1.c — 0,5 pts

Donner une valeur approchée de $f(1{,}02)$ à l'aide de l'approximation affine de f au voisinage de 1, puis la comparer à la valeur exacte de $f(1{,}02)$.

1.d — 0,75 pts

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1, \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{p(1+h) - p(1)}{h}$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{p(1+h) - p(1)}{h}$. La fonction p est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement les deux limites obtenues.

2.a — 0,75 pts

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$. Calculer $g'(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de g.

2.b — 0,75 pts

Calculer la dérivée de chacune des fonctions k et m définies par $k(x) = \left(x^2 + 1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$ et $m(x) = \sqrt{4x + 1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

INDICE

Utiliser la dérivée de u^n pour k et celle de $\sqrt{u}$ pour m.

Exercice 3 5,75 pts

Étude d'une fonction rationnelle

Dans tout l'exercice, on travaille dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, et f désigne la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{2x^2 - 7x + 14}{x - 2}$; sa courbe est notée $(\mathcal{C}_f)$.

1 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis vérifier que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{8}{x - 2}$.

2.a 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2.b 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, puis interpréter graphiquement ces résultats. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?

2.c 0,75 pts

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).

3.a 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2x(x - 4)}{(x - 2)^2}$.

3.b 1 pts

Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x dans D_f. En déduire les variations de f, résumées dans un tableau de variations sur chacun des intervalles de D_f, et ses extremums locaux.

4 1,25 pts

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 unités sur l'axe des ordonnées, tracer les droites d'équations $x = 2$ et $y = 2x - 3$, puis la courbe $(\mathcal{C}_f)$ pour $x \in [-5\,;\,9]$. On placera les points de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisses 0 et 4 avec leurs tangentes, et on pourra utiliser $f(-2) = f(1) = -9$ et $f(3) = f(6) = 11$.

Exercice 4 — 6 pts

Coût moyen, coût marginal et bénéfice

Un atelier fictif fabrique des chaises en bois. Sa production journalière est de q centaines de chaises, avec $q \in [1\,;\,10]$. Le coût total de production, en milliers de dirhams, est donné par :

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 32.$$

Le coût marginal est la fonction dérivée C' ; le coût moyen, par centaine de chaises, est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1 — 1 pts

Calculer $C'(q)$ et montrer que $C'(q) = 3(q-2)^2 + 3$. En déduire le sens de variation de C sur $[1\,;\,10]$ et dresser son tableau de variations.

2.a — 1 pts

Vérifier que $C_M(q) = q^2 - 6q + 15 + \dfrac{32}{q}$, puis montrer que $C_M'(q) = \dfrac{2(q-4)\left(q^2+q+4\right)}{q^2}$.

INDICE

Dériver terme à terme avec $\left(\dfrac{1}{q}\right)' = -\dfrac{1}{q^2}$, mettre sur le dénominateur q^2, puis développer $(q-4)\left(q^2+q+4\right)$.

2.b — 1,25 pts

Déterminer le signe de $C_M'(q)$ pour q dans $[1\,;\,10]$; en déduire les variations de C_M et les résumer dans un tableau. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Donner ce coût moyen minimal.

INDICE

Étudier le signe de q^2+q+4 avec son discriminant.

2.c — 0,5 pts

Que vaut le coût marginal $C'(4)$? Comparer cette valeur au coût moyen minimal obtenu à la question 2.b.

3.a — 0,75 pts

Chaque centaine de chaises est vendue 51 milliers de dirhams, et toute la production est vendue. Montrer que le bénéfice, en milliers de dirhams, est $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 36q - 32$.

3.b — 1,5 pts

Montrer que $B'(q) = -3(q-6)(q+2)$, puis établir les variations de B sur l'intervalle $[1\,;\,10]$, à résumer dans un tableau. En déduire la production qui rend le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice maximal.

INDICE

Développer $(q-6)(q+2)$; sur $[1\,;\,10]$, le facteur $q+2$ est strictement positif.

SOURCES

BURHAN