BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La calculatrice non programmable est autorisée ; les résultats exacts (fractions) sont attendus. Les réponses doivent être justifiées ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4,5 pts

Logique et raisonnements

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

On considère la proposition P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 9 \geq 6x$ ». Écrire la négation de P, puis montrer que P est vraie.

INDICE

Écrire $x^2 + 9 - 6x$ comme un carré.

1.b — 0,5 pts

On considère la proposition R : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$ ». Écrire la négation de R, puis montrer que R est fausse.

2 — 1 pts

Soit P et Q deux propositions. Dresser la table de vérité de la proposition $\big(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$. Que peut-on en conclure ?

3 — 0,75 pts

Soit x un réel différent de -3. En raisonnant par contraposée, montrer que : si $x \neq 1$, alors $\dfrac{x+5}{x+3} \neq \dfrac{3}{2}$.

4 — 1,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1) = (n+1)(2n+1).$$

(somme des $n+1$ nombres $4k+1$ pour k allant de 0 à n ; pour $n = 0$, la somme vaut 1)

INDICE

Le terme qui suit $4n+1$ dans la somme est $4(n+1)+1 = 4n+5$.

Exercice 2 5 pts

Équations et inéquations du second degré

On considère le trinôme $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$, où x est un nombre réel. Les questions 4.a et 4.b sont indépendantes des précédentes.

1.a 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

1.b 0,5 pts

En déduire que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 2)(3x + 2)$.

2 0,75 pts

Étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs du réel x et le résumer dans un tableau de signes.

3 0,5 pts

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

4.a 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

4.b 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $2x^2 - x + 3 > 0$.

5 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x - 1} \geq 0$.

INDICE

Étudier séparément le signe du numérateur (question 2) et celui du dénominateur.

Exercice 3 — 5 pts

Systèmes d'équations linéaires

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a — 0,5 pts

On considère le système :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 4y = 8 \end{cases}$$

Calculer le déterminant D du système (S_1).

1.b — 1 pts

Résoudre le système (S_1) par la méthode du déterminant.

1.c — 1,25 pts

Dans le repère, tracer les droites $(D_1) : 3x - 2y = 7$ et $(D_2) : 5x + 4y = 8$, et interpréter graphiquement le résultat de la question 1.b. Représenter ensuite l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient à la fois $3x - 2y \geq 7$ et $5x + 4y \geq 8$.

INDICE

Écrire chaque équation sous la forme $y = mx + p$, puis tester le point $(3\,;\,0)$ dans chaque inéquation.

2 — 0,75 pts

On considère le système :

$$(S_2) : \begin{cases} 2x - 6y = 1 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

Calculer son déterminant, puis montrer que (S_2) n'a aucune solution. Interpréter graphiquement.

INDICE

Chercher un nombre par lequel multiplier la seconde équation pour que ses coefficients de x et de y deviennent ceux de la première.

3.a

1 pts

On considère le système :

$$(S_3) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

À l'aide d'opérations élémentaires sur les équations (méthode de Gauss), montrer que (S_3) est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -7z = -21 \end{cases}$$

INDICE

Après avoir éliminé x de L_2 et de L_3 avec L_1, éliminer y de la dernière équation en combinant $3L_3$ et L_2.

3.b

0,5 pts

En déduire la solution du système (S_3).

Exercice 4 — 5,5 pts

Prix, coût et bénéfice d'un atelier de savons

Un atelier fictif fabrique deux sortes de savons artisanaux : un savon à l'argile et un savon au romarin. Toutes les données de l'exercice sont fictives ; les montants sont en dirhams.

1.a — 0,75 pts

Un premier client achète 4 savons à l'argile et 3 savons au romarin pour 330 dirhams ; un second client achète 2 savons à l'argile et 5 savons au romarin pour 340 dirhams. On note a le prix d'un savon à l'argile et b le prix d'un savon au romarin. Traduire ces deux achats par un système (S) d'inconnues a et b.

1.b — 1,25 pts

Résoudre le système (S) par la méthode du déterminant, puis donner le prix de chaque savon.

2.a — 0,75 pts

Chaque jour, l'atelier fabrique q savons au romarin (q est un nombre entier, avec $0 \leq q \leq 40$) et les vend tous au prix $b = 50$ dirhams (résultat de la question 1.b). Le coût total journalier de cette fabrication est $C(q) = q^2 + 5q + 450$. Exprimer la recette $R(q)$, puis montrer que le bénéfice journalier est $B(q) = -q^2 + 45q - 450$.

2.b — 1,5 pts

Résoudre l'équation $B(q) = 0$, puis étudier le signe de $B(q)$ sur $[0\,;\,40]$. En déduire pour quels nombres de savons fabriqués par jour l'atelier réalise un bénéfice, et pour lesquels il subit une perte.

3 — 1,25 pts

L'atelier souhaite un bénéfice journalier d'au moins 50 dirhams. Vérifier que $B(q) - 50 = -q^2 + 45q - 500$, puis résoudre dans $[0\,;\,40]$ l'inéquation $B(q) \geq 50$. Conclure en donnant les nombres de savons au romarin à fabriquer par jour.

SOURCES

BURHAN