BURHAN

Résumé : Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/resume

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Le nombre dérivé

Définition : Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$.

On dit que f est **dérivable en** a si ce taux admet une limite **finie** ℓ quand h tend vers 0. Ce réel ℓ s'appelle le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En posant $x = a + h$, on écrit aussi :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemple : Calculer un nombre dérivé

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x^2 + x$, et $a = -1$. On a $u(-1) = 1$ et, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} &u(-1+h) - u(-1) \\ &= 2(1 - 2h + h^2) - 1 + h - 1 \\ &= -3h + 2h^2. \end{aligned}$$

Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\dfrac{-3h + 2h^2}{h} = -3 + 2h$.

Sa limite en 0 est -3, un réel : u est dérivable en -1 et $u'(-1) = -3$.

Méthode : Nombre dérivé par le taux

1. **Développe** $f(a+h) - f(a)$ et réduis.
2. **Simplifie** le quotient par h, en gardant $h \neq 0$.
3. **Passe à la limite** en 0. Une limite réelle donne $f'(a)$; une limite infinie, ou pas de limite, montre que f n'est pas dérivable en a.

Attention : Un nombre ou une fonction ?

Écris $u'(-1) = -3$: c'est un **nombre**, la pente en un point.

L'écriture $u' = -3$ dirait que la dérivée vaut -3 partout, ce qui est faux ici, car $u'(0) = 1$.

Attention : Poser h = 0 trop tôt

Dans $\dfrac{-3h + 2h^2}{h}$, poser $h = 0$ donne $\dfrac{0}{0}$: on ne peut rien conclure. On simplifie d'abord par h, qui n'est pas nul, puis on fait tendre h vers 0.

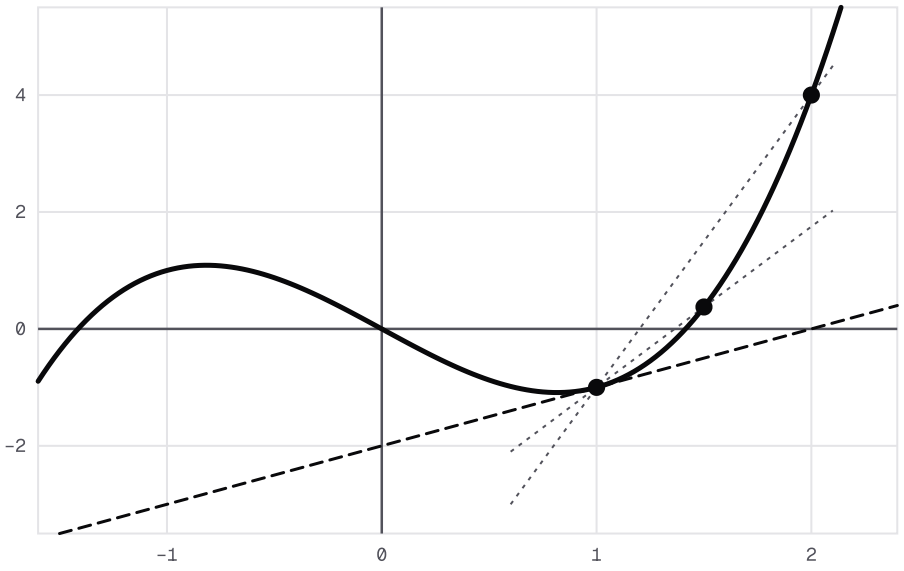
Tangente et approximation affine

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Une équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



$y = x^3 - 2x$ $T : y = x - 2$ Point plein A Point plein M_1 Point plein M_2 Point du graphe

Pour v(x) = x³ − 2x et A(1, −1) : quand M glisse vers A sur la courbe, la sécante (AM) pivote et se rapproche de la tangente en A, de coefficient directeur v'(1) = 1.

Exemple : Équation d'une tangente

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^3 - 2x$, et $a = 1$. On a $v(1) = -1$; avec $v'(x) = 3x^2 - 2$, on trouve $v'(1) = 1$.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 1 \times (x - 1) + (-1)$, soit $y = x - 2$.

Contrôle : pour $x = 1$, on retrouve $y = -1 = v(1)$.

Méthode : Écrire une tangente

1. **Calcule** $f(a)$, puis $f'(a)$.
2. **Remplace** ces deux nombres dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. **Réduis** sous la forme $y = mx + p$ et vérifie que le point $A(a, f(a))$ est sur la droite.

Attention : Oublier le décalage dans la tangente

Pour v en 1, écrire $y = 1 \times x + (-1)$, soit $y = x - 1$, est faux : pour $x = 1$, on obtiendrait $y = 0$ au lieu de $v(1) = -1$. Garde toujours le facteur $(x - a)$.

Propriété : Approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a et dérivable en a. Il existe une fonction ε, définie pour h voisin de 0, telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + h\, \varepsilon(h).$$

Pour h voisin de 0, on en déduit l'**approximation affine** $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$. La fonction affine $h \mapsto f(a) + f'(a)\, h$ s'appelle l'approximation affine de $h \mapsto f(a + h)$ au voisinage de 0.

Carré, h voisin de 0

$$(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$$

Cube, h voisin de 0

$$(1 + h)^3 \approx 1 + 3h$$

Inverse, h voisin de 0

$$\frac{1}{1 + h} \approx 1 - h$$

Racine carrée, h voisin de 0

$$\sqrt{1 + h} \approx 1 + \frac{h}{2}$$

Méthode : Calculer une valeur approchée

1. **Repère** un réel a proche, où $f(a)$ et $f'(a)$ se calculent sans machine, et note h l'écart.
2. **Calcule** $f(a) + f'(a)\, h$.
3. **Écris** le résultat avec $\approx$, jamais avec $=$.

Avec la racine carrée, $a = 4$ et $h = 0{,}02$: la valeur en 4 est 2 et le nombre dérivé en 4 vaut $\frac{1}{4}$, donc $\sqrt{4{,}02} \approx 2 + \frac{0{,}02}{4} = 2{,}005$.

À retenir : Le coût marginal

Une entreprise fictive a un coût total $C(q) = 0{,}5q^2 + 20q + 300$ dirhams pour q objets (données inventées).

Le **coût marginal** en q est $C'(q)$: il approche le coût de l'objet suivant, car $C(q+1) - C(q) \approx C'(q) \times 1$.

Ici $C'(q) = q + 20$, donc $C'(40) = 60$. Le calcul exact donne $C(41) - C(40) = 60{,}5$ dirhams : l'écart est faible.

Pour une recette R, la **recette marginale** est $R'(q)$. Si le bénéfice $B = R - C$ est maximal en un q intérieur à l'intervalle d'étude, alors $B'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$.

Dérivabilité à droite et à gauche

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a, a + r[$ avec $r > 0$, on dit que f est **dérivable à droite** en a lorsque $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé à droite** de f en a ; on la note $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a - r, a]$ avec $r > 0$, on dit que f est **dérivable à gauche** en a lorsque $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé à gauche** de f en a ; on la note $f'_g(a)$.

Remarque : En clair

On ne regarde qu'un côté de a : $h > 0$ pour la droite, $h < 0$ pour la gauche. Chaque côté peut avoir sa propre limite.

Propriété : Dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas,

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

Exemple : Deux nombres dérivés distincts

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

On a $p(2) = 0$.

À droite. Pour $h > 0$, le taux $\dfrac{p(2+h) - p(2)}{h}$ vaut $\dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$, de limite 2.

À gauche. Pour $h < 0$, le taux vaut $\dfrac{3h}{h} = 3$.

Conclusion. $p'_d(2) = 2$ et $p'_g(2) = 3$ sont distincts : p n'est pas dérivable en 2.

Définition : Demi-tangentes

Soit f une fonction et $A(a, f(a))$ un point de sa courbe $\mathcal{C}_f$.

- Si f est dérivable à droite en a, la courbe admet au point A une **demi-tangente à droite** : la demi-droite d'origine A, formée des points d'abscisse $x \geq a$ de la droite d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.
- Si f est dérivable à gauche en a, la courbe admet au point A une **demi-tangente à gauche** : la demi-droite d'origine A, formée des points d'abscisse $x \leq a$ de la droite d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$.
- Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand h tend vers 0 à droite, f n'est pas dérivable à droite en a, et la courbe admet au point A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$. De même à gauche.

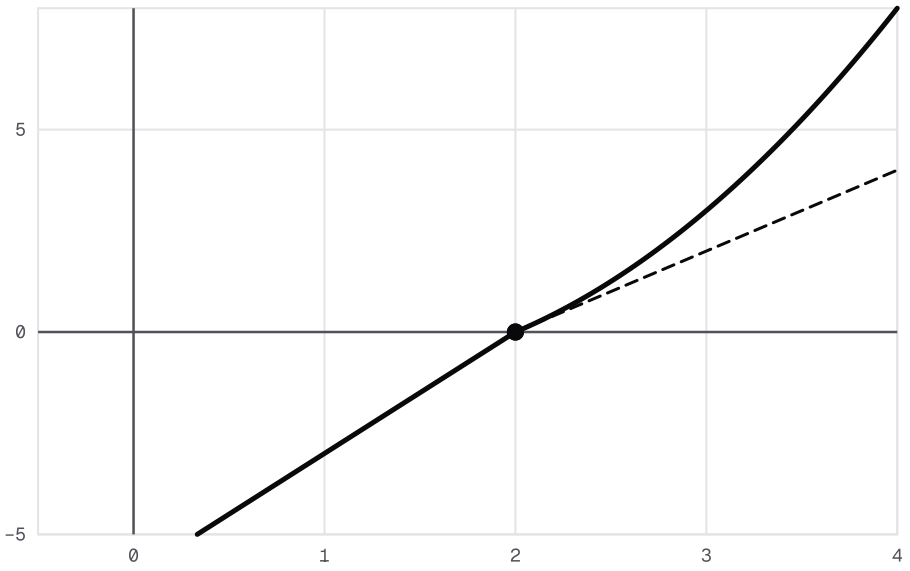
Lorsque $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, les deux demi-tangentes ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre : on dit que A est un **point anguleux** de la courbe.

Exemple : Demi-tangentes

En clair : une demi-tangente est la moitié de droite qui prolonge la courbe d'un seul côté du point.

Pour la fonction p ci-dessus, le point $A(2, 0)$ est un point anguleux. La demi-tangente à droite est portée par $y = 2x - 4$, pour $x \geq 2$; la demi-tangente à gauche par $y = 3x - 6$, pour $x \leq 2$.

Pour $x \mapsto \sqrt{x - 3}$ en 3, le taux vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ pour $h > 0$. Il tend vers $+\infty$: la courbe a une demi-tangente verticale, portée par la droite d'équation $x = 3$.



Au point A(2, 0), la courbe de p fait un angle : à gauche, elle suit la droite y = 3x − 6 ; à droite, elle part avec la demi-tangente y = 2x − 4, en pointillés.

Méthode : Étudier un point de raccord

1. **À droite** : prends l'expression valable pour $x \geq a$, écris le taux et cherche sa limite quand $h \to 0^+$.
2. **À gauche** : même travail avec l'expression valable pour $x < a$, quand $h \to 0^-$.
3. **Conclus** : deux limites réelles égales, f est dérivable en a ; deux limites réelles distinctes, point anguleux ; une limite infinie, demi-tangente verticale.

Attention : Deux limites réelles ne suffisent pas

Pour $x \mapsto |x+2|$ en -2, le taux vaut 1 à droite et -1 à gauche. Les deux limites existent et sont réelles ; pourtant la fonction n'est pas dérivable en -2, car elles ne sont pas égales.

Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition : Fonction dérivée, dérivée seconde

Soit I un intervalle ouvert. Une fonction f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout réel de I. La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f ; on la note f'.

Une fonction est dérivable sur un intervalle $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b ; on note alors $f'(a) = f'_d(a)$ et $f'(b) = f'_g(b)$ (de même sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$).

Si f' est elle-même dérivable sur I, sa fonction dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de f ; on la note f''. Ainsi $f'' = (f')'$.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Soit k un réel et n un entier naturel, $n \geq 2$. Les fonctions suivantes sont dérivables sur l'intervalle indiqué, et leur fonction dérivée est donnée.

- $x \mapsto k$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 0$.
- $x \mapsto x$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1$.
- $x \mapsto x^n$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n\,x^{n-1}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$: dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle n'est pas dérivable à droite en 0.

Propriété : Dérivée d'une somme et d'un produit par un réel

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et λ un réel. Les fonctions $f + g$ et λf sont dérivables sur I, et

$$(f+g)' = f' + g',$$
$$(\lambda f)' = \lambda\, f'.$$

Exemple : Dérivée et dérivée seconde d'un polynôme

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 9$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Terme à terme, avec les coefficients gardés en facteur : $P'(x) = 12x^2 - 14x + 2$. En dérivant encore, $P''(x) = 24x - 14$.

Par exemple, $P'(1) = 0$ et $P''(1) = 10$.

Dérivées et opérations

Propriété : Dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.

- La fonction fg est dérivable sur I, et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I, et
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En conséquence, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Propriété : Dérivée d'une puissance

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et n un entier relatif non nul. On note f^n la fonction $x \mapsto \big(f(x)\big)^n$.

- Si $n \geq 1$, la fonction f^n est dérivable sur I.
- Si $n \leq -1$ et si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I.

Dans les deux cas, $(f^n)' = n\,f'\,f^{n-1}$.

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$, et f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On note J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J, et pour tout réel x de J,

$$g'(x) = a\,f'(ax + b).$$

Propriété : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle ouvert I. La fonction $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I, et

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Remarque

Ces résultats sont admis. On les applique en contrôlant leurs conditions : un intervalle ouvert, un dénominateur qui ne s'annule pas, une quantité sous la racine strictement positive.

Exemple : Quotient, racine, puissance

Quotient. Sur $]-3, +\infty[$, on a $x + 3 \neq 0$ et la fonction $q : x \mapsto \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ a pour dérivée :

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{2(x+3) - (2x-1)\times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{7}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

Racine. Sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$, on a $5-2x>0$ et $r : x \mapsto \sqrt{5-2x}$ a pour dérivée :

$$r'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{5-2x}}.$$

Puissance. Sur $\mathbb{R}$, x^2+1 ne s'annule pas et $s : x \mapsto (x^2+1)^{-3}$ a pour dérivée :

$$\begin{aligned} s'(x) &= -3 \times 2x\,(x^2+1)^{-4} \\ &= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}. \end{aligned}$$

Méthode : Calculer une fonction dérivée

1. **Nomme** la forme : somme, produit, quotient, puissance, $x \mapsto f(ax+b)$, racine carrée.
2. **Donne** l'intervalle de validité de la formule choisie.
3. **Applique** la formule, puis factorise : le signe de la dérivée se lit sur une forme factorisée.

Attention : Produit et quotient : deux pièges

Pour $x \mapsto x^2(x-4)$, multiplier les dérivées donne $2x \times 1 = 2x$: c'est faux.

La formule du produit donne $2x(x-4) + x^2 = 3x^2 - 8x$.

Pour un quotient, garde l'ordre $f'g - fg'$ au numérateur : l'inverser change le signe du résultat.

Attention : Racine d'une fonction qui s'annule

Pour $x \mapsto \sqrt{x-3}$, la formule donne $\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ seulement sur $]3, +\infty[$. En 3, la quantité sous la racine est nulle : on revient au taux d'accroissement, qui tend vers $+\infty$ à droite. Il n'y a pas de nombre dérivé à droite en 3.

Signe de la dérivée et variations

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I. Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

- Réciproquement, si f est croissante sur I, alors $f' \geq 0$ sur I ; si f est décroissante sur I, alors $f' \leq 0$ sur I.

Remarque

Ce résultat est admis. Il s'accorde avec l'image des tangentes : là où leur pente est positive, la courbe monte ; là où elle est négative, la courbe descend.

Exemple : Variations d'un polynôme de degré 3

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} t'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x-1)(x+2). \end{aligned}$$

Ce trinôme est positif hors de ses racines -2 et 1, négatif entre elles.

D'après le théorème liant le signe de t' et les variations, t est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1, +\infty[$, strictement décroissante sur $[-2, 1]$, avec $t(-2) = 24$ et $t(1) = -3$.

x	$t'(x)$	$t(x)$
$]-\infty, -2[$	$+$	$\nearrow$
-2	0	24
$]-2, 1[$	$-$	$\searrow$
1	0	-3
$]1, +\infty[$	$+$	$\nearrow$

Méthode : Dresser un tableau de variations

1. **Fixe** l'intervalle d'étude et vérifie que f y est dérivable.
2. **Factorise** $f'(x)$ pour lire son signe : facteurs du premier degré, trinôme, carré, quotient à dénominateur positif. Rappel : $a(x - x_1)(x - x_2)$ a le signe de a hors de x_1 et x_2, le signe contraire entre eux.
3. **Conclus** : $f' \geq 0$ donne une fonction croissante, $f' \leq 0$ une fonction décroissante, sur chaque intervalle. Complète enfin le tableau avec les valeurs de f utiles.

Extremums et optimisation

Définition : Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- On dit que $f(a)$ est un **maximum local** de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que, pour tout réel x de J, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est un **minimum local** de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que, pour tout réel x de J, $f(x) \geq f(a)$.

Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local. Le maximum (le minimum) de f sur I tout entier, s'il existe, est aussi un maximum (un minimum) local.

Remarque : En clair

Un maximum local est la plus grande valeur de f dans un petit intervalle autour de a, pas forcément sur tout l'ensemble de définition.

Propriété : Dérivée et extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

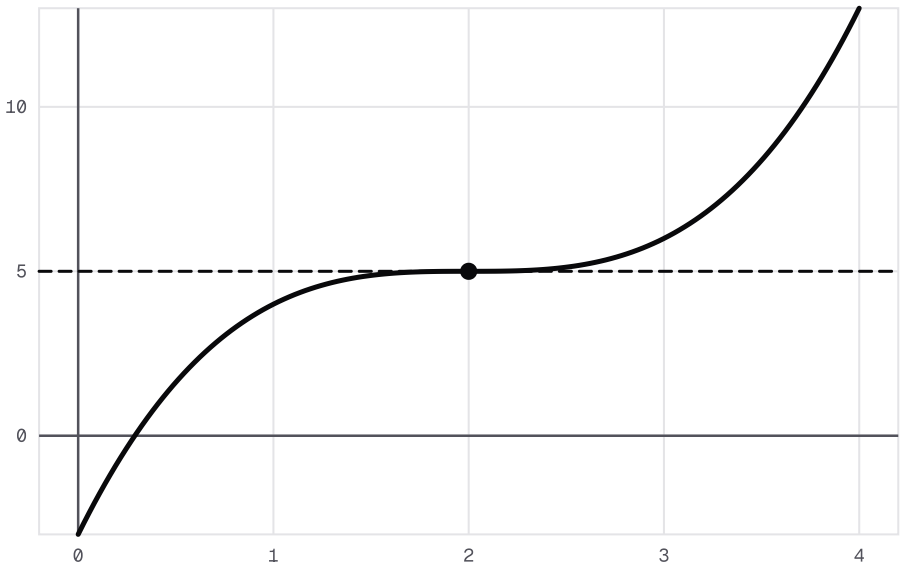
1. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
2. Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f : c'est un maximum local si f' est positive à gauche de a et négative à droite, un minimum local si f' est négative à gauche de a et positive à droite.

Remarque : En clair

Une tangente horizontale accompagne tout extremum local à l'intérieur de I. Pour conclure à un extremum, vérifie en plus que f' change de signe en a.

Attention : Une tangente horizontale sans extremum

Pour $x \mapsto (x-2)^3 + 5$, la dérivée $x \mapsto 3(x-2)^2$ s'annule en 2 mais reste positive des deux côtés. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: aucun extremum en 2, malgré la tangente horizontale.



La courbe de x ↦ (x − 2)³ + 5 a une tangente horizontale au point d'abscisse 2, mais elle la traverse en continuant de monter : pas d'extremum.

Exemple : Un bénéfice maximal

Une entreprise fictive vend q objets, avec $0 \leq q \leq 80$. Son bénéfice en dirhams vaut $B(q) = -2q^2 + 160q - 1\,800$ (données inventées).

Pour tout q de $[0, 80]$, $B'(q) = -4q + 160 = -4(q - 40)$: positive sur $[0, 40[$, négative sur $]40, 80]$.

D'après le théorème liant le signe de B' et les variations, B est croissante sur $[0, 40]$ et décroissante sur $[40, 80]$.

Le bénéfice est maximal pour 40 objets : il vaut $B(40) = 1\,400$ dirhams.

Méthode : Résoudre un problème d'optimisation

1. **Traduis** l'énoncé : variable, intervalle, grandeur à rendre maximale ou minimale.
2. **Étudie** le signe de la dérivée et dresse le tableau de variations sur cet intervalle.
3. **Réponds** par une phrase : la valeur de la variable, la valeur optimale, les unités.