BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4,5 pts

Le coût de production de panneaux solaires

Une entreprise fictive fabrique des panneaux solaires. Pour q centaines de panneaux, avec $0 \leq q \leq 10$, son coût total en milliers de dirhams est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$ (données fictives). Le coût marginal est $C'(q)$.

1. — 0,75 pts

Montrer que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$ pour tout q de $[0, 10]$.

INDICE

Dérive C, puis développe $3(q-4)^2 + 12$.

2. — 0,75 pts

En déduire que C est strictement croissante sur $[0, 10]$.

INDICE

Un carré est positif ou nul : donne une minoration de $C'(q)$.

3. — 1 pts

Montrer que $C''(q) = 6(q-4)$, puis que le coût marginal est minimal pour $q = 4$ et vaut alors 12.

INDICE

Le coût marginal est la fonction C' : sa dérivée est C'', dont tu étudies le signe.

4. — 1 pts

Montrer que $C(4) = 212$, puis, à l'aide de l'approximation affine en 4, que $C(4{,}1) \approx 213{,}2$.

INDICE

Écris $C(4+h) \approx C(4) + C'(4)\,h$ avec $h = 0{,}1$.

5. — 1 pts

Montrer que passer de 400 à 500 panneaux coûte exactement 13 milliers de dirhams, et que $C'(4)$ approche ce surcoût à 1 millier de dirhams près.

INDICE

Calcule $C(5)$, puis l'écart $C(5) - C(4)$, et compare-le à $C'(4) = 12$.

Exercice 2 4 pts

Recette, coût et bénéfice d'une fabrique de lampes

Une entreprise fictive vend des lampes. Pour q centaines de lampes, avec $0 \leq q \leq 12$, la recette et le coût, en milliers de dirhams, sont $R(q) = 76q - 3q^2$ et $C(q) = q^3 - 9q^2 + 40q + 60$ (données fictives). Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. La recette marginale est $R'(q)$, comme le coût marginal est $C'(q)$.

1. 0,75 pts

Montrer que $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 36q - 60$.

INDICE

Le signe moins devant $C(q)$ change le signe de chacun de ses termes.

2. 0,75 pts

Montrer que $B'(q) = -3(q - 6)(q + 2)$.

INDICE

Dérive B, puis développe la forme proposée.

3. 1 pts

Montrer que B est strictement croissante sur $[0, 6]$ et strictement décroissante sur $[6, 12]$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Sur $[0, 12]$, $q + 2 > 0$: $B'(q)$ a le signe de $-3(q - 6)$.

4. 0,75 pts

Montrer que le bénéfice maximal vaut 156 milliers de dirhams et qu'il est obtenu pour 600 lampes.

INDICE

Lis le tableau de variations : où B atteint-elle sa plus grande valeur sur $[0, 12]$?

5. 0,75 pts

Montrer que, pour cette production, la recette marginale $R'(6)$ est égale au coût marginal $C'(6)$.

INDICE

Calcule $R'(q) = 76 - 6q$ et $C'(q) = 3q^2 - 18q + 40$.

Exercice 3 — 3,75 pts

Une fonction rationnelle et son minimum

Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+12}{x+2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. — 1,25 pts

Montrer, à l'aide du taux d'accroissement, que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-3$.

INDICE

$f(0)=6$. Réduis $f(h)-6$ au dénominateur $h+2$, puis mets h en facteur au numérateur.

2. — 0,5 pts

Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-3x+6$.

INDICE

Utilise $f(0)$ et $f'(0)$ dans $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=0$.

3. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x>-2$, $f'(x)=\dfrac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2}$.

INDICE

Formule du quotient ; développe ensuite $(x-2)(x+6)$.

4. — 0,75 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $]-2,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

INDICE

Sur $]-2,+\infty[$, $x+6>0$ et $(x+2)^2>0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.

5. — 0,5 pts

Montrer que $f(2)=4$ est le minimum de f sur $]-2,+\infty[$.

INDICE

Calcule $f(2)$ et utilise les variations obtenues à la question 4.

Exercice 4 3,75 pts

Un produit avec une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,|x-3|$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

INDICE

Remplace $|x-3|$ par $x-3$ si $x \geq 3$, par $3-x$ si $x < 3$, puis développe.

2. 1,25 pts

Montrer que $f'_d(3) = 4$ et que $f'_g(3) = -4$.

INDICE

$f(3) = 0$. Pour $h > 0$, $f(3+h) = (4+h)\,h$; pour $h < 0$, $f(3+h) = -(4+h)\,h$.

3. 0,75 pts

En déduire que f n'est pas dérivable en 3, et montrer que les demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3,0)$ sont portées par les droites $y = 4x - 12$ et $y = -4x + 12$.

INDICE

Compare les deux nombres dérivés, puis écris $y = f'_d(3)(x-3) + f(3)$ et son analogue à gauche.

4. 0,5 pts

Montrer que $f'(x) = 2x - 2$ sur $]3, +\infty[$ et que $f'(x) = -2x + 2$ sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

Sur chaque intervalle ouvert, f coïncide avec un polynôme : dérive l'expression correspondante.

5. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$. En déduire que $f(1) = 4$ est un maximum local.

INDICE

Étudie le signe de $-2x + 2$ sur $]-\infty, 3[$ et de $2x - 2$ sur $]3, +\infty[$; en 3, f est dérivable à gauche et à droite.

Exercice 5 4 pts

Une racine carrée dans un produit

Soit f la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$ pour tout $x > -3$.

INDICE

Écris $f = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x+3}$, où $x + 3 > 0$. Après la dérivée du produit, écris $\sqrt{x+3} = \dfrac{2(x+3)}{2\sqrt{x+3}}$ pour tout réduire au dénominateur $2\sqrt{x+3}$.

2. 1 pts

Montrer que $f(1) = 2$ et $f'(1) = \dfrac{9}{4}$, puis, par l'approximation affine en 1, que $f(1{,}04) \approx 2{,}09$.

INDICE

Écris $f(1+h) \approx f(1) + f'(1)\,h$ avec $h = 0{,}04$.

3. 1 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $]-3, -2]$ et strictement croissante sur $[-2, +\infty[$.

INDICE

Pour $x > -3$, le dénominateur $2\sqrt{x+3}$ est strictement positif : le signe de $f'(x)$ est celui de $x + 2$.

4. 0,75 pts

En déduire que $f(-2) = -2$ est le minimum de f sur $]-3, +\infty[$.

INDICE

Calcule $f(-2)$, puis lis les variations obtenues à la question 3.