BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 4,5 pts

Le coût de production de panneaux solaires

Une entreprise fictive fabrique des panneaux solaires. Pour q centaines de panneaux, avec $0 \leq q \leq 10$, son coût total en milliers de dirhams est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$ (données fictives). Le coût marginal est $C'(q)$.

1. 0,75 pts

Montrer que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$ pour tout q de $[0, 10]$.

INDICE

Dérive C, puis développe $3(q-4)^2 + 12$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction C est un polynôme, dérivable sur $[0, 10]$. Pour tout q de $[0, 10]$, $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$.

Forme proposée. On développe le carré :

$$\begin{aligned} &3(q-4)^2 + 12 \\ &= 3(q^2 - 8q + 16) + 12 \\ &= 3q^2 - 24q + 60. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux expressions coïncident : pour tout q de $[0, 10]$, $C'(q) = 3(q-4)^2 + 12$.

2. 0,75 pts

En déduire que C est strictement croissante sur $[0, 10]$.

INDICE

Un carré est positif ou nul : donne une minoration de $C'(q)$.

CORRIGÉ

Signe de $C'(q)$. Soit q dans $[0, 10]$. Un carré est positif ou nul, donc $(q-4)^2 \geq 0$ et $3(q-4)^2 + 12 \geq 12$. D'après la question 1, $C'(q) \geq 12 > 0$.

Variations. La fonction C est dérivable sur $[0, 10]$ et sa dérivée y est strictement positive. La propriété « signe de la dérivée et variations » s'applique.

Conclusion. C est strictement croissante sur $[0, 10]$: produire davantage coûte toujours plus.

3. 1 pts

Montrer que $C''(q) = 6(q-4)$, puis que le coût marginal est minimal pour $q = 4$ et vaut alors 12.

INDICE

Le coût marginal est la fonction C' : sa dérivée est C'', dont tu étudies le signe.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. La fonction C' est un polynôme. Pour tout q de $[0, 10]$, $C''(q) = 6q - 24 = 6(q-4)$.

Signe.

- $C''(q) < 0$ sur $[0, 4[$;
- $C''(4) = 0$;
- $C''(q) > 0$ sur $]4, 10]$.

Variations du coût marginal. C'' est la dérivée de la fonction dérivable C'. Par la propriété « signe de la dérivée et variations » appliquée à C', le coût marginal est strictement décroissant sur $[0, 4]$ et strictement croissant sur $[4, 10]$. Donc $C'(q) \geq C'(4)$ pour tout q de $[0, 10]$.

Valeur minimale. Avec la forme de la question 1, $C'(4) = 3 \times 0 + 12 = 12$.

Conclusion. Pour tout q de $[0, 10]$, $C''(q) = 6(q-4)$; le coût marginal est minimal pour $q = 4$ et vaut alors 12.

4. 1 pts

Montrer que $C(4) = 212$, puis, à l'aide de l'approximation affine en 4, que $C(4{,}1) \approx 213{,}2$.

INDICE

Écris $C(4 + h) \approx C(4) + C'(4)\,h$ avec $h = 0{,}1$.

CORRIGÉ

Valeur en 4.

$$\begin{aligned} &C(4) \\ &= 64 - 192 + 240 + 100 \\ &= 212. \end{aligned}$$

Approximation affine. La fonction C est dérivable en 4, avec $C'(4) = 12$. Pour h voisin de 0 :

$$\begin{aligned} C(4 + h) &\approx C(4) + C'(4)\,h \\ &= 212 + 12h. \end{aligned}$$

Avec $h = 0{,}1$, on a $12h = 1{,}2$, donc :

$$C(4{,}1) \approx 212 + 1{,}2 = 213{,}2.$$

Contrôle. La calculatrice donne $C(4{,}1) = 213{,}201$: l'écart n'est que de $0{,}001$.

Conclusion. $C(4) = 212$ et, par l'approximation affine en 4, $C(4{,}1) \approx 213{,}2$.

5. 1 pts

Montrer que passer de 400 à 500 panneaux coûte exactement 13 milliers de dirhams, et que $C'(4)$ approche ce surcoût à 1 millier de dirhams près.

INDICE

Calcule $C(5)$, puis l'écart $C(5) - C(4)$, et compare-le à $C'(4) = 12$.

CORRIGÉ

Surcoût exact. Passer de 400 à 500 panneaux, c'est passer de $q = 4$ à $q = 5$. On calcule :

$$\begin{aligned} &C(5) \\ &= 125 - 300 + 300 + 100 \\ &= 225. \end{aligned}$$

D'après la question 4, $C(4) = 212$, donc :

$$\begin{aligned} C(5) - C(4) &= 225 - 212 \\ &= 13. \end{aligned}$$

Comparaison. On a $C'(4) = 12$ et $13 - 12 = 1$: le coût marginal approche ce surcoût à 1 millier de dirhams près.

Remarque. Ici l'accroissement $h = 1$ n'est pas petit : l'approximation est moins précise qu'à la question 4, où $h = 0{,}1$.

Conclusion. Passer de 400 à 500 panneaux coûte exactement 13 milliers de dirhams, et $C'(4) = 12$ approche ce surcoût à 1 millier de dirhams près.

Exercice 2 4 pts

Recette, coût et bénéfice d'une fabrique de lampes

Une entreprise fictive vend des lampes. Pour q centaines de lampes, avec $0 \leq q \leq 12$, la recette et le coût, en milliers de dirhams, sont $R(q) = 76q - 3q^2$ et $C(q) = q^3 - 9q^2 + 40q + 60$ (données fictives). Le bénéfice est $B(q) = R(q) - C(q)$. La recette marginale est $R'(q)$, comme le coût marginal est $C'(q)$.

1. 0,75 pts

Montrer que $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 36q - 60$.

INDICE

Le signe moins devant $C(q)$ change le signe de chacun de ses termes.

CORRIGÉ

Pour tout q de $[0, 12]$, on retranche $C(q)$ à $R(q)$; le signe moins change le signe de chaque terme de $C(q)$:

$$\begin{aligned} &B(q) \\ &= 76q - 3q^2 \\ &\quad - (q^3 - 9q^2 + 40q + 60) \\ &= 76q - 3q^2 - q^3 + 9q^2 \\ &\quad - 40q - 60 \\ &= -q^3 + 6q^2 + 36q - 60. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout q de $[0, 12]$, $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 36q - 60$.

2. 0,75 pts

Montrer que $B'(q) = -3(q - 6)(q + 2)$.

INDICE

Dérive B, puis développe la forme proposée.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction B est un polynôme, dérivable sur $[0, 12]$. Pour tout q de $[0, 12]$, $B'(q) = -3q^2 + 12q + 36$.

Forme proposée. On développe :

$$\begin{aligned} &- 3(q - 6)(q + 2) \\ &= -3(q^2 - 4q - 12) \\ &= -3q^2 + 12q + 36. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout q de $[0, 12]$, $B'(q) = -3(q - 6)(q + 2)$.

3. 1 pts

Montrer que B est strictement croissante sur $[0,6]$ et strictement décroissante sur $[6,12]$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Sur $[0,12]$, $q+2>0$: $B'(q)$ a le signe de $-3(q-6)$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(q)$. Sur $[0,12]$, $q+2>0$ et $-3<0$: $B'(q)$ a le signe de $-(q-6)$, c'est-à-dire de $6-q$.

- $B'(q)>0$ sur $[0,6[$;
- $B'(6)=0$;
- $B'(q)<0$ sur $]6,12]$.

Variations. La fonction B est dérivable sur $[0,12]$. Par la propriété « signe de la dérivée et variations », B est strictement croissante sur $[0,6]$ et strictement décroissante sur $[6,12]$.

Valeurs. On a $B(0)=-60$, puis :

$$\begin{aligned} B(6) &= -216+216+216-60 \\ &= 156, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(12) &= -1728+864 \\ &\quad +432-60 \\ &= -492. \end{aligned}$$

Tableau de variations.

q	$B'(q)$	$B(q)$
0		-60
$]0,6[$	$+$	$\nearrow$
6	0	156
$]6,12[$	$-$	$\searrow$
12		-492

Conclusion. B est strictement croissante sur $[0,6]$ et strictement décroissante sur $[6,12]$, comme le résume le tableau.

4. 0,75 pts

Montrer que le bénéfice maximal vaut 156 milliers de dirhams et qu'il est obtenu pour 600 lampes.

INDICE

Lis le tableau de variations : où B atteint-elle sa plus grande valeur sur $[0, 12]$?

CORRIGÉ

D'après le tableau de variations, B croît sur $[0, 6]$ puis décroît sur $[6, 12]$. Donc $B(q) \leq B(6)$ pour tout q de $[0, 12]$: le maximum de B sur $[0, 12]$ est $B(6) = 156$.

La valeur $q = 6$ représente 6 centaines de lampes, soit 600 lampes.

Conclusion. Le bénéfice maximal vaut 156 milliers de dirhams ; il est obtenu pour 600 lampes.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour cette production, la recette marginale $R'(6)$ est égale au coût marginal $C'(6)$.

INDICE

Calcule $R'(q) = 76 - 6q$ et $C'(q) = 3q^2 - 18q + 40$.

CORRIGÉ

Dérivées. Les fonctions R et C sont des polynômes. Pour tout q de $[0, 12]$, $R'(q) = 76 - 6q$ et $C'(q) = 3q^2 - 18q + 40$.

Valeurs en 6. On a $R'(6) = 76 - 36 = 40$ et :

$$\begin{aligned} C'(6) &= 108 - 108 + 40 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Lien avec le bénéfice. Comme $B = R - C$, on a $B'(6) = R'(6) - C'(6)$; l'égalité obtenue traduit $B'(6) = 0$, trouvé à la question 3.

Conclusion. Pour 600 lampes, la recette marginale $R'(6)$ et le coût marginal $C'(6)$ sont égaux : tous deux valent 40.

Exercice 3 — 3,75 pts

Une fonction rationnelle et son minimum

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x+2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. — 1,25 pts

Montrer, à l'aide du taux d'accroissement, que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -3$.

INDICE

$f(0) = 6$. Réduis $f(h) - 6$ au dénominateur $h+2$, puis mets h en facteur au numérateur.

CORRIGÉ

Valeur en 0. On a $f(0) = \dfrac{12}{2} = 6$.

Différence. Soit h un réel non nul tel que $h > -2$. On réduit au dénominateur $h+2$:

$$\begin{aligned} & f(h) - f(0) \\ &= \frac{h^2 + 12 - 6(h+2)}{h+2} \\ &= \frac{h^2 - 6h}{h+2} = \frac{h(h-6)}{h+2}. \end{aligned}$$

Taux d'accroissement. En divisant par h, le taux de f entre 0 et h vaut $\dfrac{h-6}{h+2}$.

Limite. Quand h tend vers 0, le numérateur tend vers -6 et le dénominateur vers 2. Le taux tend donc vers $\dfrac{-6}{2} = -3$, qui est un réel.

Conclusion. La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = -3$.

2. — 0,5 pts

Montrer que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -3x + 6$.

INDICE

Utilise $f(0)$ et $f'(0)$ dans $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 0$.

CORRIGÉ

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. D'après la question 1, $f(0) = 6$ et $f'(0) = -3$: elle s'écrit $y = -3(x-0) + 6$, soit $y = -3x + 6$.

Conclusion. La tangente T a pour équation $y = -3x + 6$.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2}$.

INDICE

Formule du quotient ; développe ensuite $(x-2)(x+6)$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]-2, +\infty[$, les fonctions $u : x \mapsto x^2 + 12$ et $v : x \mapsto x + 2$ sont dérivables, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$, et v ne s'annule pas. Le quotient $f = \dfrac{u}{v}$ y est donc dérivable.

Dérivée d'un quotient. Pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= \frac{2x(x+2) - (x^2+12)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Comparaison. En développant, $(x-2)(x+6) = x^2 + 4x - 12$: les numérateurs sont égaux.

Contrôle. En 0, on retrouve $f'(0) = \dfrac{-12}{4} = -3$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2}$.

4. 0,75 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $]-2, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Sur $]-2, +\infty[$, $x + 6 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x > -2$, on a $x + 6 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$.

- $f'(x) < 0$ sur $]-2, 2[$;
- $f'(2) = 0$;
- $f'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$.

Variations. La fonction f est dérivable sur $]-2, +\infty[$; la propriété « signe de la dérivée et variations » s'applique sur chacun des intervalles $]-2, 2]$ et $[2, +\infty[$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-2, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

5. `0,5 pts`

Montrer que $f(2) = 4$ est le minimum de f sur $]-2, +\infty[$.

INDICE

Calcule $f(2)$ et utilise les variations obtenues à la question 4.

CORRIGÉ

Valeur en 2. On a $f(2) = \dfrac{16}{4} = 4$.

Comparaison. D'après la question 4 :

- f décroît sur $]-2, 2]$, donc $f(x) \geq f(2)$ pour tout x de cet intervalle ;
- f croît sur $[2, +\infty[$, donc $f(x) \geq f(2)$ pour tout $x \geq 2$.

Ainsi $f(x) \geq 4$ pour tout $x > -2$, et la valeur 4 est atteinte en 2. On retrouve que f' s'annule en 2 en changeant de signe.

Conclusion. $f(2) = 4$ est le minimum de f sur $]-2, +\infty[$.

Exercice 4 3,75 pts

Un produit avec une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,|x-3|$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

INDICE

Remplace $|x-3|$ par $x-3$ si $x \geq 3$, par $3-x$ si $x < 3$, puis développe.

CORRIGÉ

Cas $x \geq 3$. Alors $x - 3 \geq 0$, donc $|x-3| = x-3$ et $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$.

Cas $x < 3$. Alors $x - 3 < 0$, donc $|x-3| = 3-x$ et $f(x) = (x+1)(3-x) = -x^2 + 2x + 3$.

Conclusion. Les deux cas donnent l'expression demandée, pour tout réel x.

2. 1,25 pts

Montrer que $f'_d(3) = 4$ et que $f'_g(3) = -4$.

INDICE

$f(3) = 0$. Pour $h > 0$, $f(3+h) = (4+h)\,h$; pour $h < 0$, $f(3+h) = -(4+h)\,h$.

CORRIGÉ

Valeur en 3. On a $f(3) = 4 \times 0 = 0$. Pour tout réel h, $f(3+h) = (4+h)\,|h|$.

À droite. Soit $h > 0$. Alors $|h| = h$ et :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 4 + h.$$

Ce taux tend vers 4 quand h tend vers 0 par valeurs positives : $f'_d(3) = 4$.

À gauche. Soit $h < 0$. Alors $|h| = -h$ et :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = -(4+h).$$

Ce taux tend vers -4 quand h tend vers 0 par valeurs négatives : $f'_g(3) = -4$.

Conclusion. La fonction f est dérivable à droite et à gauche en 3, avec $f'_d(3) = 4$ et $f'_g(3) = -4$.

3. 0,75 pts

En déduire que f n'est pas dérivable en 3, et montrer que les demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3,0)$ sont portées par les droites $y=4x-12$ et $y=-4x+12$.

INDICE

Compare les deux nombres dérivés, puis écris $y=f'_d(3)(x-3)+f(3)$ et son analogue à gauche.

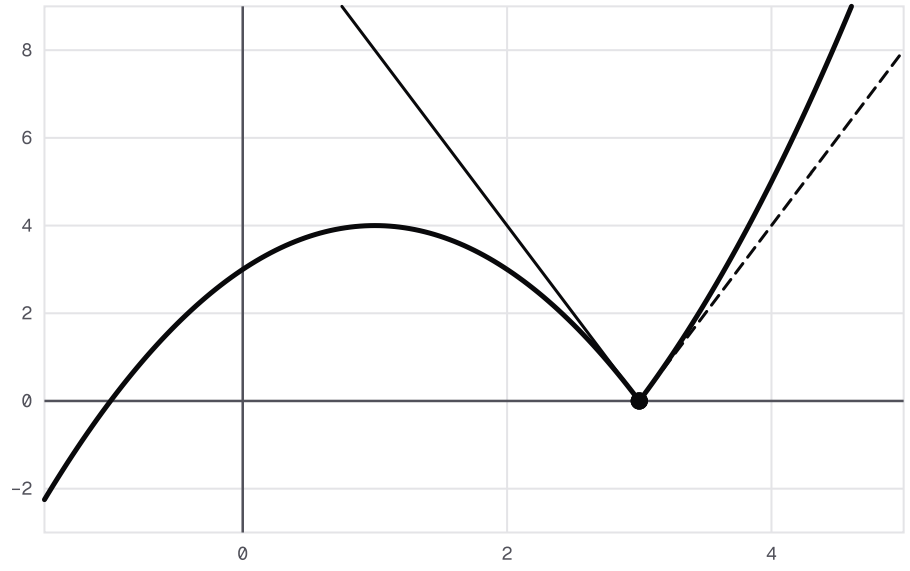
CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle ouvert contenant 3, et ses nombres dérivés à droite et à gauche en 3 sont différents : $4\neq -4$. D'après la propriété « dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche », f n'est pas dérivable en 3 ; le point $A(3,0)$ est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$.

Demi-tangentes. Chacune passe par $A(3,0)$ et a pour coefficient directeur le nombre dérivé du côté correspondant :

- à droite, $y=4(x-3)$, soit $y=4x-12$, pour $x\geq 3$;
- à gauche, $y=-4(x-3)$, soit $y=-4x+12$, pour $x\leq 3$.

Conclusion. f n'est pas dérivable en 3, et les demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ en $A(3,0)$ sont portées par les droites d'équations $y=4x-12$ et $y=-4x+12$.



Au point A(3, 0), la courbe de f fait un angle : ses demi-tangentes sont portées par y = 4x − 12 à droite, en pointillés, et par y = −4x + 12 à gauche, en trait fin.

4. 0,5 pts

Montrer que $f'(x) = 2x - 2$ sur $]3, +\infty[$ et que $f'(x) = -2x + 2$ sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

Sur chaque intervalle ouvert, f coïncide avec un polynôme : dérive l'expression correspondante.

CORRIGÉ

Sur $]3, +\infty[$**.** La fonction f y coïncide avec le polynôme $x \mapsto x^2 - 2x - 3$, donc elle y est dérivable et $f'(x) = 2x - 2$.

Sur $]-\infty, 3[$**.** La fonction f y coïncide avec le polynôme $x \mapsto -x^2 + 2x + 3$, donc elle y est dérivable et $f'(x) = -2x + 2$.

Conclusion. $f'(x) = 2x - 2$ pour tout $x > 3$, et $f'(x) = -2x + 2$ pour tout $x < 3$.

5. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$. En déduire que $f(1) = 4$ est un maximum local.

INDICE

Étudie le signe de $-2x + 2$ sur $]-\infty, 3[$ et de $2x - 2$ sur $]3, +\infty[$; en 3, f est dérivable à gauche et à droite.

CORRIGÉ

Signe de la dérivée. D'après la question 4 :

- sur $]-\infty, 3[$, $f'(x) = -2(x - 1)$: positive sur $]-\infty, 1[$, nulle en 1, négative sur $]1, 3[$;
- sur $]3, +\infty[$, $f'(x) = 2(x - 1)$, strictement positive ;
- en 3, d'après la question 2, $f'_g(3) = -4 < 0$ et $f'_d(3) = 4 > 0$.

Variations. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 1]$, sur $[1, 3]$ (à gauche en 3) et sur $[3, +\infty[$ (à droite en 3). Sur chacun de ces intervalles, la propriété « signe de la dérivée et variations » s'applique :

- f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$;
- f est strictement décroissante sur $[1, 3]$;
- f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

Avec $f(1) = 2 \times 2 = 4$ et $f(3) = 0$:

x	$f(x)$
$]-\infty, 1[$	$\nearrow$
1	4
$]1, 3[$	$\searrow$
3	0
$]3, +\infty[$	$\nearrow$

Maximum local. La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 3[$, et f' s'y annule en 1 en passant du signe $+$ au signe $-$. D'après la propriété « dérivée et extremum », $f(1)$ est un maximum local de f.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$; $f(1) = 4$ est un maximum local.

Exercice 5 4 pts

Une racine carrée dans un produit

Soit f la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$ pour tout $x > -3$.

INDICE

Écris $f = uv$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x+3}$, où $x + 3 > 0$. Après la dérivée du produit, écris $\sqrt{x+3} = \dfrac{2(x+3)}{2\sqrt{x+3}}$ pour tout réduire au dénominateur $2\sqrt{x+3}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]-3, +\infty[$, on a $x + 3 > 0$. La fonction $v : x \mapsto \sqrt{x+3}$ y est dérivable, comme racine carrée d'une fonction dérivable et strictement positive, et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. La fonction $u : x \mapsto x$ est dérivable, de dérivée 1. Par la dérivée d'un produit, $f = uv$ est dérivable sur $]-3, +\infty[$.

Calcul. Pour tout $x > -3$, on écrit $\sqrt{x+3} = \dfrac{2(x+3)}{2\sqrt{x+3}}$ pour réduire au dénominateur $2\sqrt{x+3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et, pour tout $x > -3$, $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

2. 1 pts

Montrer que $f(1)=2$ et $f'(1)=\dfrac{9}{4}$, puis, par l'approximation affine en 1, que $f(1{,}04)\approx 2{,}09$.

INDICE

Écris $f(1+h)\approx f(1)+f'(1)\,h$ avec $h=0{,}04$.

CORRIGÉ

Valeurs en 1. On a $f(1)=1\times\sqrt{4}=2$ et $f'(1)=\dfrac{3\times 3}{2\sqrt{4}}=\dfrac{9}{4}$.

Approximation affine. La fonction f est dérivable en 1. Pour h voisin de 0, $f(1+h)\approx 2+\dfrac{9}{4}\,h$. Avec $h=0{,}04$:

$$\begin{aligned} f(1{,}04) &\approx 2+\frac{9\times 0{,}04}{4}\\ &= 2+0{,}09=2{,}09. \end{aligned}$$

Contrôle. La calculatrice affiche $f(1{,}04)\approx 2{,}0904$.

Conclusion. $f(1)=2$, $f'(1)=\dfrac{9}{4}$, et l'approximation affine en 1 donne $f(1{,}04)\approx 2{,}09$.

3. 1 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $]-3,-2]$ et strictement croissante sur $[-2,+\infty[$.

INDICE

Pour $x>-3$, le dénominateur $2\sqrt{x+3}$ est strictement positif : le signe de $f'(x)$ est celui de $x+2$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x>-3$, on a $2\sqrt{x+3}>0$ et $3>0$: $f'(x)$ a le signe de $x+2$.

- $f'(x)<0$ sur $]-3,-2[$;
- $f'(-2)=0$;
- $f'(x)>0$ sur $]-2,+\infty[$.

Variations. La fonction f est dérivable sur $]-3,+\infty[$. La propriété « signe de la dérivée et variations » s'applique sur $]-3,-2]$ et sur $[-2,+\infty[$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-3,-2]$ et strictement croissante sur $[-2,+\infty[$.

4. 0,75 pts

En déduire que $f(-2) = -2$ est le minimum de f sur $]-3, +\infty[$.

INDICE

Calcule $f(-2)$, puis lis les variations obtenues à la question 3.

CORRIGÉ

Valeur en -2. On a $f(-2) = -2 \times \sqrt{1} = -2$.

Comparaison. D'après la question 3, f décroît sur $]-3, -2]$ puis croît sur $[-2, +\infty[$. Donc $f(x) \geq f(-2)$ pour tout $x > -3$, et cette valeur est atteinte en -2, où f' s'annule en changeant de signe.

Conclusion. $f(-2) = -2$ est le minimum de f sur $]-3, +\infty[$.