BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	7

Exercice 1

Du taux d'accroissement à la valeur approchée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1.

Montrer que, pour tout réel h non nul :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = h^2 - 3h + 5.$$

INDICE

Développe $(-1+h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3$, puis calcule $f(-1)$.

2.

En déduire $f'(-1)$, puis une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

INDICE

Fais tendre h vers 0, puis utilise $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = -1$.

3.

Par l'approximation affine en -1, donner une valeur approchée de $f(-0{,}98)$, puis la comparer à sa valeur exacte.

INDICE

Écris $-0{,}98 = -1 + h$ avec $h = 0{,}02$.

Exercice 2

Une valeur absolue et un point anguleux

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)\,|x-1|$.

1.

Écrire $g(x)$ sans valeur absolue, selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

INDICE

Pour $x \geq 1$, $|x-1| = x-1$; pour $x < 1$, $|x-1| = 1-x$.

2.

Montrer que g est dérivable à droite et à gauche en 1, avec $g'_d(1) = 2$ et $g'_g(1) = -2$.

INDICE

On a $g(1) = 0$. Pour $h > 0$, $g(1+h) = (2+h)\,h$; pour $h < 0$, $g(1+h) = -(2+h)\,h$.

3.

La fonction g est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement et donner une équation de chaque demi-tangente.

INDICE

Compare $g'_d(1)$ et $g'_g(1)$; chaque demi-tangente part du point $A(1,0)$.

Exercice 3

Demi-tangente verticale ou horizontale

On considère les fonctions u et w définies sur $[1, +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x-1}$ et $w(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

1.

Étudier la dérivabilité à droite de u en 1. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $h > 0$, le taux de u en 1 vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h}$, que l'on peut écrire $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

2.

Montrer que w est dérivable à droite en 1 et que $w'_d(1) = 0$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $h > 0$, $w(1+h) = h\sqrt{h}$: le taux se simplifie.

3.

Montrer que, pour tout $x > 1$, $w'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

INDICE

Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$: dérive le produit, avec $(\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, puis remarque que $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$.

Exercice 4

Quatre dérivées à factoriser

Pour chaque fonction, justifier qu'elle est dérivable sur l'intervalle indiqué, puis calculer sa dérivée sous forme factorisée.

1.

$f(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^2}$ sur $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

INDICE

Écris $f(x)$ comme une puissance d'exposant négatif de $x \mapsto 3x-2$.

2.

$g(x) = \sqrt{x^2+4x+8}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris $x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$ pour voir que cette quantité reste strictement positive.

3.

$k(x) = (2x+1)^3(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Produit : la dérivée de $x \mapsto (2x+1)^3$ est $x \mapsto 6(2x+1)^2$. Mets ensuite $(2x+1)^2$ en facteur.

4.

$m(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$: calculer $m'(x)$, puis la dérivée seconde $m''(x)$ sous forme factorisée.

INDICE

Dérive deux fois de suite, puis mets 12 en facteur.

Exercice 5

Une fonction rationnelle étudiée sur deux intervalles

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de 2, par $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$.

1.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Formule du quotient, puis développe $(x-5)(x+1)$ pour comparer les numérateurs.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Le dénominateur est un carré non nul. Étudie le trinôme $x^2 - 4x - 5$, de racines -1 et 5.

3.

Dresser le tableau de variations de f, sans les limites, en y portant $f(-1)$ et $f(5)$.

INDICE

Travaille séparément sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; la valeur 2 est interdite.

Exercice 6

Extremums locaux

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 6$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1.

Montrer que $f'(x) = -6(x-1)(x-2)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Mets -6 en facteur ; le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour racine 1.

2.

Dresser le tableau de variations de f, puis montrer que $f(1) = 1$ est un minimum local et $f(2) = 2$ un maximum local.

INDICE

Cite le théorème liant signe et variations, puis la propriété liant un extremum local au changement de signe de la dérivée.

3.

Montrer que $g'(1) = 0$, mais que g n'admet pas d'extremum local en 1.

INDICE

Écris $g'(x)$ comme le produit de 3 par un carré.

Exercice 7

Le coût moyen d'une fabrique de tables

Une petite fabrique fictive produit q tables par semaine, avec $1 \le q \le 100$. Son coût total en dirhams est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (données inventées). Le coût moyen d'une table est $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Le gérant a calculé quelques valeurs :

q	10	16	20	25	40
$M(q)$	60	51	50	51	60

1.

D'après le tableau, pour quelle production le coût moyen semble-t-il le plus bas ?

INDICE

Repère la plus petite valeur de la seconde ligne, et regarde comment les valeurs évoluent de part et d'autre.

2.

Montrer que $M(q) = q + 10 + \dfrac{400}{q}$, puis que $M'(q) = \dfrac{(q-20)(q+20)}{q^2}$.

INDICE

Divise chaque terme par q ; la dérivée de $q \mapsto \dfrac{400}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{400}{q^2}$.

3.

Étudier les variations de M sur $[1, 100]$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

INDICE

Sur $[1, 100]$, $q + 20 > 0$ et $q^2 > 0$: le signe de $M'(q)$ est celui de $q - 20$.

4.

Calculer le coût marginal $C'(20)$ et le comparer au coût moyen minimal.

INDICE

Dérive C : $C'(q) = 2q + 10$.