BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	7

Exercice 1

Du taux d'accroissement à la valeur approchée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1.

Montrer que, pour tout réel h non nul :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = h^2 - 3h + 5.$$

INDICE

Développe $(-1+h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3$, puis calcule $f(-1)$.

CORRIGÉ

Valeur en -1. On a $f(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1) = -3$.

Calcul de $f(-1+h)$. Soit h un réel non nul. On développe avec $(-1+h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3$:

$$\begin{aligned} &f(-1+h) \\ &= (-1+h)^3 - 2 + 2h \\ &= -3 + 5h - 3h^2 + h^3. \end{aligned}$$

Différence. On retranche $f(-1) = -3$, puis on met h en facteur :

$$\begin{aligned} &f(-1+h) - f(-1) \\ &= 5h - 3h^2 + h^3 \\ &= h\,(h^2 - 3h + 5). \end{aligned}$$

Conclusion. En divisant par h, qui n'est pas nul, on obtient que pour tout réel h non nul, le taux d'accroissement de f entre -1 et $-1+h$ est égal à $h^2 - 3h + 5$.

2.

En déduire $f'(-1)$, puis une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

INDICE

Fais tendre h vers 0, puis utilise $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = -1$.

CORRIGÉ

Nombre dérivé. Quand h tend vers 0, $h^2 - 3h + 5$ tend vers 5, qui est un réel. Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 5$.

Tangente. Avec $a = -1$, $f(-1) = -3$ et $f'(-1) = 5$, l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ devient $y = 5(x+1) - 3$, soit $y = 5x + 2$.

Contrôle. Pour $x = -1$, on obtient $y = -5 + 2 = -3$, qui est bien $f(-1)$.

Conclusion. $f'(-1) = 5$ et la tangente T a pour équation $y = 5x + 2$.

3.

Par l'approximation affine en -1, donner une valeur approchée de $f(-0{,}98)$, puis la comparer à sa valeur exacte.

INDICE

Écris $-0{,}98 = -1 + h$ avec $h = 0{,}02$.

CORRIGÉ

Approximation affine. La fonction f est dérivable en -1. Pour h voisin de 0 :

$$\begin{aligned} &f(-1+h) \\ &\approx f(-1) + f'(-1)\,h \\ &= -3 + 5h. \end{aligned}$$

On écrit $-0{,}98 = -1 + 0{,}02$, puis on prend $h = 0{,}02$, d'où $5h = 0{,}1$:

$$\begin{aligned} f(-0{,}98) &\approx -3 + 0{,}1 \\ &= -2{,}9. \end{aligned}$$

Valeur exacte.

$$\begin{aligned} &f(-0{,}98) \\ &= (-0{,}98)^3 - 1{,}96 \\ &= -0{,}941192 - 1{,}96 \\ &= -2{,}901192. \end{aligned}$$

Comparaison. La valeur approchée $-2{,}9$ et la valeur exacte diffèrent de $0{,}001192$.

Conclusion. $f(-0{,}98) \approx -2{,}9$; l'écart avec la valeur exacte $-2{,}901192$ est inférieur à deux millièmes : l'approximation est très bonne.

Exercice 2

Une valeur absolue et un point anguleux

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)\,|x-1|$.

1.

Écrire $g(x)$ sans valeur absolue, selon que $x \geq 1$ ou $x < 1$.

INDICE

Pour $x \geq 1$, $|x-1| = x-1$; pour $x < 1$, $|x-1| = 1-x$.

CORRIGÉ

Cas $x \geq 1$. Alors $x - 1 \geq 0$, donc $|x-1| = x-1$ et $g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$.

Cas $x < 1$. Alors $x - 1 < 0$, donc $|x-1| = 1-x$ et $g(x) = (x+1)(1-x) = 1 - x^2$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2.

Montrer que g est dérivable à droite et à gauche en 1, avec $g'_d(1) = 2$ et $g'_g(1) = -2$.

INDICE

On a $g(1) = 0$. Pour $h > 0$, $g(1+h) = (2+h)\,h$; pour $h < 0$, $g(1+h) = -(2+h)\,h$.

CORRIGÉ

Valeur en 1. On a $g(1) = 2 \times 0 = 0$.

À droite. Soit $h > 0$. Alors $1 + h > 1$ et $g(1+h) = (1+h)^2 - 1 = h\,(2+h)$. Donc :

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = 2 + h.$$

Ce taux tend vers 2 quand h tend vers 0 par valeurs positives : g est dérivable à droite en 1 et $g'_d(1) = 2$.

À gauche. Soit $h < 0$. Alors $1 + h < 1$ et $g(1+h) = 1 - (1+h)^2 = -h\,(2+h)$. Donc :

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = -(2+h).$$

Ce taux tend vers -2 quand h tend vers 0 par valeurs négatives : g est dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) = -2$.

Conclusion. La fonction g est dérivable à droite et à gauche en 1, avec $g'_d(1) = 2$ et $g'_g(1) = -2$.

3.

La fonction g est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement et donner une équation de chaque demi-tangente.

INDICE

Compare $g'_d(1)$ et $g'_g(1)$; chaque demi-tangente part du point $A(1,0)$.

CORRIGÉ

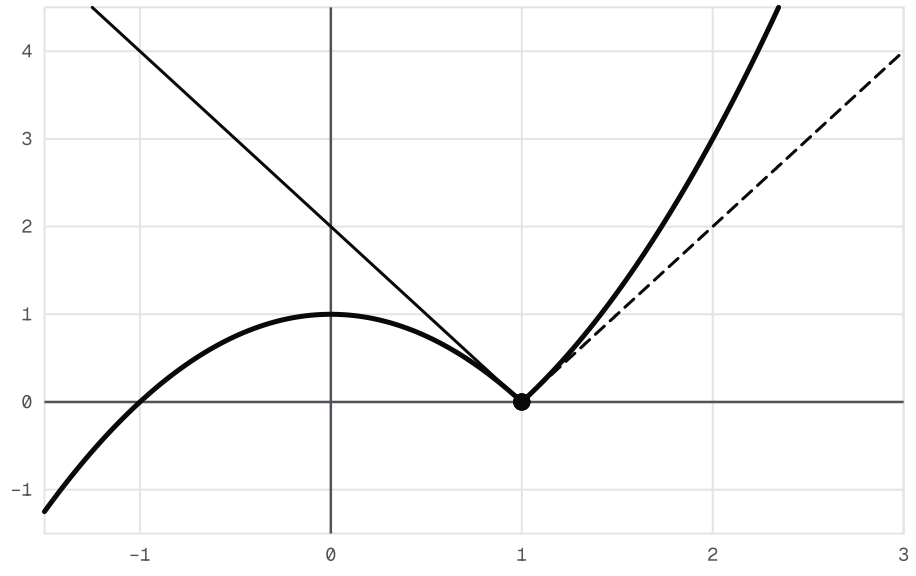
Dérivabilité. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle ouvert contenant 1, et ses deux nombres dérivés en 1 sont différents : $2 \neq -2$. D'après la propriété « dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche », g n'est pas dérivable en 1.

Interprétation. Au point $A(1,0)$, la courbe de g admet deux demi-tangentes qui ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre : A est un point anguleux de la courbe.

Demi-tangentes. Chacune passe par $A(1,0)$:

- à droite, $y = 2(x-1)$, soit $y = 2x - 2$, pour $x \geq 1$;
- à gauche, $y = -2(x-1)$, soit $y = -2x + 2$, pour $x \leq 1$.

Conclusion. La fonction g n'est pas dérivable en 1 ; sa courbe présente en $A(1,0)$ un point anguleux, avec les deux demi-tangentes ci-dessus.



La courbe de g fait un angle au point A(1, 0) : demi-tangente y = 2x − 2 à droite, en pointillés, et demi-tangente y = −2x + 2 à gauche, en trait fin.

Exercice 3

Demi-tangente verticale ou horizontale

On considère les fonctions u et w définies sur $[1, +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x-1}$ et $w(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

1.

Étudier la dérivabilité à droite de u en 1. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $h > 0$, le taux de u en 1 vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h}$, que l'on peut écrire $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

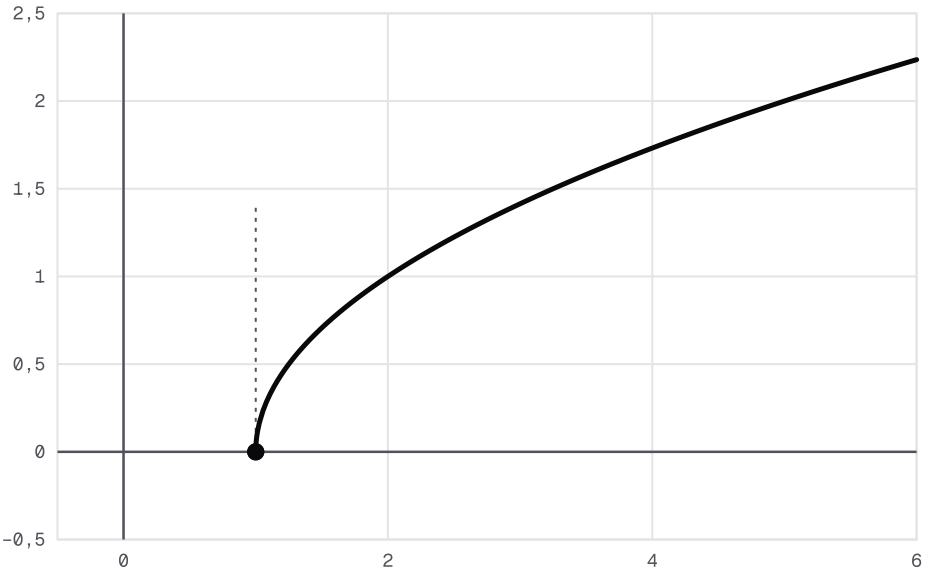
CORRIGÉ

Taux à droite. On a $u(1) = \sqrt{0} = 0$. Soit $h > 0$. Comme $h = \sqrt{h} \times \sqrt{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{u(1+h) - u(1)}{h} &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0 par valeurs positives, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant positif. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$, qui n'est pas un réel.

Conclusion. La fonction u n'est pas dérivable à droite en 1. Sa courbe admet au point $(1, 0)$ une demi-tangente verticale, portée par la droite d'équation $x = 1$.



La courbe de u(x) = √(x − 1) part du point (1, 0) en montant à la verticale, le long de la droite d'équation x = 1.

2.

Montrer que w est dérivable à droite en 1 et que $w'_d(1) = 0$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $h > 0$, $w(1+h) = h\sqrt{h}$: le taux se simplifie.

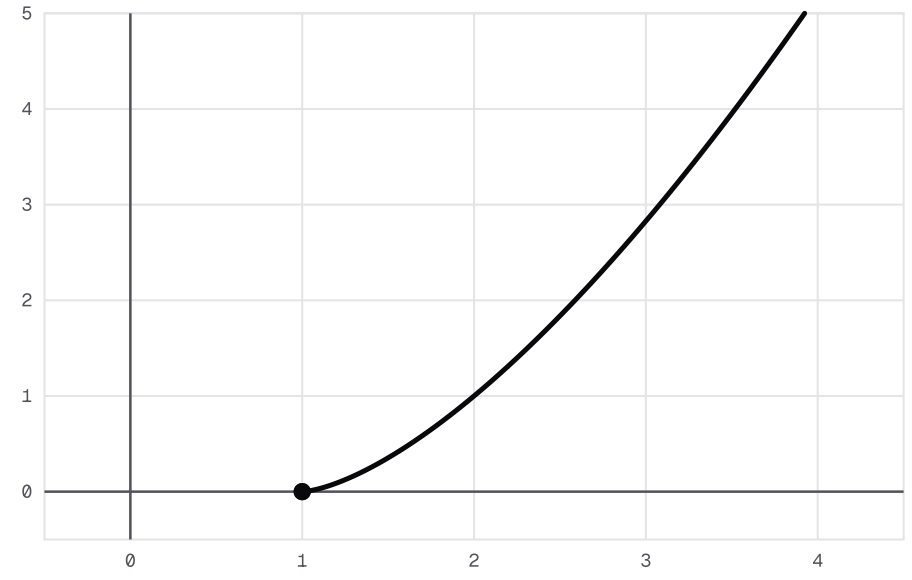
CORRIGÉ

Taux à droite. On a $w(1) = 0$. Soit $h > 0$: $w(1+h) = h\sqrt{h}$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{w(1+h) - w(1)}{h} &= \frac{h\sqrt{h}}{h} \\ &= \sqrt{h}.\end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0 par valeurs positives, $\sqrt{h}$ tend vers 0, qui est un réel.

Conclusion. La fonction w est dérivable à droite en 1 et $w'_d(1) = 0$. Sa courbe admet au point $(1, 0)$ une demi-tangente horizontale, portée par la droite d'équation $y = 0$.



La courbe de w(x) = (x − 1)√(x − 1) part du point (1, 0) à plat, le long de l'axe des abscisses, puis se redresse.

3.

Montrer que, pour tout $x > 1$, $w'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

INDICE

Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$: dérive le produit, avec $(\sqrt{x-1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, puis remarque que $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]1, +\infty[$, on a $x - 1 > 0$. La fonction $v : x \mapsto \sqrt{x-1}$ y est dérivable, comme racine carrée d'une fonction dérivable et strictement positive, et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Dérivée d'un produit. On a $w(x) = (x-1) \times v(x)$. Pour $x > 1$, on utilise aussi $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$:

$$\begin{aligned} w'(x) &= 1 \times \sqrt{x-1} \\ &\quad + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 1$, $w'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

Exercice 4

Quatre dérivées à factoriser

Pour chaque fonction, justifier qu'elle est dérivable sur l'intervalle indiqué, puis calculer sa dérivée sous forme factorisée.

1.

$f(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^2}$ sur $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

INDICE

Écris $f(x)$ comme une puissance d'exposant négatif de $x \mapsto 3x-2$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour $x > \dfrac{2}{3}$, on a $3x > 2$, donc $3x - 2 > 0$. La fonction $x \mapsto 3x-2$ est dérivable, de dérivée 3, et ne s'annule pas sur l'intervalle. On écrit $f(x) = (3x-2)^{-2}$.

Dérivée d'une puissance. On l'applique avec $n = -2$. Pour tout $x > \dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= -2 \times 3 \times (3x-2)^{-3} \\ &= -\frac{6}{(3x-2)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est dérivable sur $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ et, pour tout $x > \dfrac{2}{3}$, $f'(x) = -\dfrac{6}{(3x-2)^3}$.

2.

$g(x) = \sqrt{x^2+4x+8}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris $x^2+4x+8 = (x+2)^2 + 4$ pour voir que cette quantité reste strictement positive.

CORRIGÉ

Positivité. Pour tout réel x, on complète le carré :

$$\begin{aligned} x^2+4x+8 &= (x+2)^2 + 4 \\ &\geq 4 > 0. \end{aligned}$$

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto x^2+4x+8$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x+4$. Par la dérivée de la racine carrée d'une fonction, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+8}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

3.

$k(x) = (2x+1)^3(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Produit : la dérivée de $x \mapsto (2x+1)^3$ est $x \mapsto 6(2x+1)^2$. Mets ensuite $(2x+1)^2$ en facteur.

CORRIGÉ

Forme. La fonction k est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. On écrit $k = uv$ avec $u(x) = (2x+1)^3$ et $v(x) = x - 1$. La dérivée d'une puissance, avec $n = 3$ et une dérivée intérieure égale à 2, donne $u'(x) = 6(2x+1)^2$; de plus $v'(x) = 1$.

Dérivée d'un produit. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 6(2x+1)^2(x-1) \\ &\quad + (2x+1)^3 \times 1. \end{aligned}$$

Factorisation. On met $(2x+1)^2$ en facteur. Il reste $6(x-1) + (2x+1) = 8x - 5$, donc :

$$k'(x) = (2x+1)^2(8x-5).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $k'(x) = (2x+1)^2(8x-5)$.

4.

$m(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$: calculer $m'(x)$, puis la dérivée seconde $m''(x)$ sous forme factorisée.

INDICE

Dérive deux fois de suite, puis mets 12 en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction m est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $m'(x) = 4x^3 - 12x$.

Dérivée seconde. La fonction m' est encore un polynôme ; on la dérive, puis on factorise. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} m''(x) &= 12x^2 - 12 \\ &= 12(x^2 - 1) \\ &= 12(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $m'(x) = 4x^3 - 12x$ et $m''(x) = 12(x-1)(x+1)$.

Exercice 5

Une fonction rationnelle étudiée sur deux intervalles

Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de 2, par $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$.

1.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Formule du quotient, puis développe $(x-5)(x+1)$ pour comparer les numérateurs.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$, les fonctions $u : x \mapsto x^2+5$ et $v : x \mapsto x-2$ sont dérivables, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$, et v ne s'annule pas. La fonction $f = \dfrac{u}{v}$ y est donc dérivable.

Dérivée d'un quotient. Pour tout réel $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= \frac{2x(x-2) - (x^2+5)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Comparaison. En développant, $(x-5)(x+1) = x^2-4x-5$: les deux numérateurs sont égaux.

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Le dénominateur est un carré non nul. Étudie le trinôme x^2-4x-5, de racines -1 et 5.

CORRIGÉ

Dénominateur. Pour $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $(x-5)(x+1)$.

Numérateur. Le trinôme $(x-5)(x+1)$ a pour racines -1 et 5, et pour coefficient dominant 1, positif. Il est positif à l'extérieur de $[-1, 5]$ et négatif entre -1 et 5.

Conclusion. En tenant compte de la valeur interdite 2 :

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]5, +\infty[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-1, 2[$ et sur $]2, 5[$;
- $f'(-1) = f'(5) = 0$.

3.

Dresser le tableau de variations de f, sans les limites, en y portant $f(-1)$ et $f(5)$.

INDICE

Travaille séparément sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$; la valeur 2 est interdite.

CORRIGÉ

Variations. La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$. La valeur 2 étant interdite, on applique la propriété « signe de la dérivée et variations » sur chacun d'eux séparément :

- f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$;
- f est strictement décroissante sur $[-1, 2[$ et sur $]2, 5]$;
- f est strictement croissante sur $[5, +\infty[$.

Valeurs. On a $f(-1) = \dfrac{6}{-3} = -2$ et $f(5) = \dfrac{30}{3} = 10$.

Tableau de variations. La double barre marque la valeur interdite 2.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$]-\infty, -1[$	$+$	$\nearrow$
-1	0	-2
$]-1, 2[$	$-$	$\searrow$
2	$\|\|$	$\|\|$
$]2, 5[$	$-$	$\searrow$
5	0	10
$]5, +\infty[$	$+$	$\nearrow$

Conclusion. Le tableau ci-dessus résume les variations de f, avec $f(-1) = -2$ et $f(5) = 10$.

Exercice 6

Extremums locaux

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 6$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1.

Montrer que $f'(x) = -6(x-1)(x-2)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Mets -6 en facteur ; le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour racine 1.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et en 2, car $1 - 3 + 2 = 0$ et $4 - 6 + 2 = 0$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ &= -6(x^2 - 3x + 2) \\ &= -6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour coefficient dominant -6, négatif : il est négatif à l'extérieur de ses racines et positif entre elles.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -6(x-1)(x-2)$, et :

- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]2, +\infty[$;
- $f'(x) > 0$ sur $]1, 2[$;
- $f'(1) = f'(2) = 0$.

2.

Dresser le tableau de variations de f, puis montrer que $f(1) = 1$ est un minimum local et $f(2) = 2$ un maximum local.

INDICE

Cite le théorème liant signe et variations, puis la propriété liant un extremum local au changement de signe de la dérivée.

CORRIGÉ

Variations. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1 et la propriété « signe de la dérivée et variations », f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$, et strictement croissante sur $[1, 2]$.

Valeurs. On a $f(1) = -2 + 9 - 12 + 6 = 1$ et :

$$\begin{aligned} f(2) &= -16 + 36 - 24 + 6 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Tableau de variations.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$]-\infty, 1[$	$-$	$\searrow$
1	0	1
$]1, 2[$	$+$	$\nearrow$
2	0	2
$]2, +\infty[$	$-$	$\searrow$

Extremums locaux. La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. On applique la propriété « dérivée et extremum » :

- f' s'annule en 1 en passant du signe $-$ au signe $+$: $f(1) = 1$ est un minimum local ;
- f' s'annule en 2 en passant du signe $+$ au signe $-$: $f(2) = 2$ est un maximum local.

Conclusion. Le tableau de variations est dressé ci-dessus ; $f(1) = 1$ est un minimum local de f et $f(2) = 2$ en est un maximum local.

3.

Montrer que $g'(1) = 0$, mais que g n'admet pas d'extremum local en 1.

INDICE

Écris $g'(x)$ comme le produit de 3 par un carré.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction g est un polynôme. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ &= 3(x-1)^2. \end{aligned}$$

En particulier, $g'(1) = 0$.

Signe. Pour $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$, donc $g'(x) > 0$: la dérivée s'annule en 1 sans changer de signe.

Variations. La dérivée g' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 1 où elle s'annule. La propriété « signe de la dérivée et variations » montre que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Absence d'extremum. Tout intervalle ouvert contenant 1 contient des réels $x < 1$, pour lesquels $g(x) < g(1)$, et des réels $x > 1$, pour lesquels $g(x) > g(1)$.

Conclusion. On a $g'(1) = 0$, mais $g(1)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local : g n'admet pas d'extremum local en 1.

Exercice 7

Le coût moyen d'une fabrique de tables

Une petite fabrique fictive produit q tables par semaine, avec $1 \leq q \leq 100$. Son coût total en dirhams est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (données inventées). Le coût moyen d'une table est $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Le gérant a calculé quelques valeurs :

q	10	16	20	25	40
$M(q)$	60	51	50	51	60

1.

D'après le tableau, pour quelle production le coût moyen semble-t-il le plus bas ?

INDICE

Repère la plus petite valeur de la seconde ligne, et regarde comment les valeurs évoluent de part et d'autre.

CORRIGÉ

Lecture. La plus petite valeur de la seconde ligne est $M(20) = 50$. De part et d'autre, les valeurs sont plus grandes : 60 puis 51 avant, 51 puis 60 après.

Conclusion. Le coût moyen semble le plus bas pour 20 tables. Ce n'est qu'une conjecture : quelques valeurs ne suffisent pas à le prouver, et la question 3 le démontre.

2.

Montrer que $M(q) = q + 10 + \dfrac{400}{q}$, puis que $M'(q) = \dfrac{(q-20)(q+20)}{q^2}$.

INDICE

Divise chaque terme par q ; la dérivée de $q \mapsto \dfrac{400}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{400}{q^2}$.

CORRIGÉ

Expression de $M(q)$. Soit q dans $[1, 100]$. On divise chaque terme par q, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} M(q) &= \frac{q^2 + 10q + 400}{q} \\ &= q + 10 + \frac{400}{q}. \end{aligned}$$

Dérivée. Sur $[1, 100]$, la dérivée de $q \mapsto q$ est 1, celle d'une constante est nulle, et celle de $q \mapsto \dfrac{400}{q}$ est $q \mapsto -\dfrac{400}{q^2}$. Pour tout q de $[1, 100]$:

$$\begin{aligned} M'(q) &= 1 - \frac{400}{q^2} \\ &= \frac{q^2 - 400}{q^2} \\ &= \frac{(q-20)(q+20)}{q^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout q de $[1, 100]$, $M(q) = q + 10 + \dfrac{400}{q}$ et $M'(q) = \dfrac{(q-20)(q+20)}{q^2}$.

3.

Étudier les variations de M sur $[1, 100]$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

INDICE

Sur $[1, 100]$, $q + 20 > 0$ et $q^2 > 0$: le signe de $M'(q)$ est celui de $q - 20$.

CORRIGÉ

Signe de $M'(q)$. Sur $[1, 100]$, $q + 20 > 0$ et $q^2 > 0$: $M'(q)$ a le signe de $q - 20$.

- $M'(q) < 0$ sur $[1, 20[$;
- $M'(20) = 0$;
- $M'(q) > 0$ sur $]20, 100]$.

Variations. La fonction M est dérivable sur $[1, 100]$. Par la propriété « signe de la dérivée et variations », M est strictement décroissante sur $[1, 20]$ et strictement croissante sur $[20, 100]$. Donc $M(q) \geq M(20)$ pour tout q de $[1, 100]$.

Valeur minimale. On a $M(20) = 20 + 10 + 20 = 50$.

Conclusion. Le coût moyen est minimal pour une production de 20 tables ; il vaut alors 50 dirhams par table. La conjecture de la question 1 est démontrée.

4.

Calculer le coût marginal $C'(20)$ et le comparer au coût moyen minimal.

INDICE

Dérive C : $C'(q) = 2q + 10$.

CORRIGÉ

Coût marginal. La fonction C est un polynôme : pour tout q de $[1, 100]$, $C'(q) = 2q + 10$. Donc $C'(20) = 50$.

Comparaison. On a $C'(20) = M(20) = 50$: pour la production qui minimise le coût moyen, le coût marginal et le coût moyen sont égaux.

Interprétation. Le coût marginal $C'(20)$ approche le coût de la 21e table. Le calcul exact donne :

$$\begin{aligned} &C(21) - C(20) \\ &= 1051 - 1000 \\ &= 51. \end{aligned}$$

Conclusion. $C'(20) = 50$ dirhams, autant que le coût moyen minimal ; la 21e table coûte en réalité 51 dirhams, soit un dirham de plus que cette estimation.