BURHAN

Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Application	8

Exercice 1

Deux nombres dérivés par le taux d'accroissement

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ sur $]-2, +\infty[$.

1.

Pour $h \neq 0$, exprimer en fonction de h le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$.

INDICE

Calcule d'abord $f(1)$, puis développe $f(1+h)$ avec $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$.

2.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

INDICE

Cherche la limite de $1 + 2h$ quand h tend vers 0, puis relis la définition du nombre dérivé.

3.

Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

INDICE

Réduis $\dfrac{1}{h+2} - \dfrac{1}{2}$ au même dénominateur avant de diviser par h.

Exercice 2

Deux tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. Une calculatrice donne ce tableau de valeurs :

x	$0{,}9$	1	$1{,}1$
$f(x)$	$3{,}299$	3	$2{,}701$

1.

Lire dans le tableau $f(0{,}9)$ et $f(1{,}1)$, puis calculer $\dfrac{f(1{,}1) - f(0{,}9)}{0{,}2}$. En déduire une estimation de $f'(1)$.

INDICE

Ce quotient est le coefficient directeur de la sécante (PQ), où P et Q sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $0{,}9$ et $1{,}1$. Cette sécante est proche de la tangente en 1.

2.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Dérive terme à terme : la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n\,x^{n-1}$.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$, puis remplace dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a = 1$.

4.

Écrire une équation de la tangente T' au point d'abscisse 2. Que remarques-tu ?

INDICE

Commence par $f'(2)$: c'est le coefficient directeur de T'.

Exercice 3

Le coût du litre supplémentaire

Une coopérative fictive produit q litres d'huile par jour, avec $0 \leq q \leq 400$. Son coût total, en dirhams, est $C(q) = 0{,}04q^2 + 12q + 900$ (données inventées).

1.

Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis $C'(150)$.

INDICE

Dérive chaque terme : la dérivée de $q \mapsto 0{,}04q^2$ est $q \mapsto 0{,}08q$.

2.

Par l'approximation affine, donner une valeur approchée du coût du 151e litre, c'est-à-dire de $C(151) - C(150)$.

INDICE

Écris $C(150 + h) \approx C(150) + C'(150)\,h$ avec $h = 1$.

3.

Calculer la valeur exacte de $C(151) - C(150)$ et la comparer à la valeur approchée.

INDICE

Utilise $151^2 - 150^2 = (151 - 150)(151 + 150)$.

Exercice 4

Un raccord en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1.

Montrer que f est dérivable à droite en 1 et calculer $f'_d(1)$.

INDICE

$f(1)$ se calcule avec la ligne $x \leq 1$. Pour $h > 0$, on a $1 + h > 1$: utilise la première ligne.

2.

Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et calculer $f'_g(1)$.

INDICE

Pour $h < 0$, on a $1 + h < 1$: utilise la seconde ligne.

3.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

INDICE

Compare les deux nombres trouvés et cite la propriété qui relie la dérivabilité en un point à la dérivabilité à droite et à gauche.

Exercice 5

Trois dérivées sur l'ensemble des réels

Dans chaque cas, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction dérivée.

1.

$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 7x - 1$.

INDICE

Somme et produit par un réel ; la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n\,x^{n-1}$.

2.

$g(x) = (x^2 + 3)(5 - 2x)$.

INDICE

C'est un produit uv, avec $u : x \mapsto x^2 + 3$ et $v : x \mapsto 5 - 2x$. Utilise $(uv)' = u'v + uv'$.

3.

$k(x) = (4x - 3)^5$.

INDICE

Puissance d'une fonction : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, avec $u : x \mapsto 4x - 3$.

Exercice 6

Un quotient, sa dérivée seconde et une racine

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$.

1.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$ pour tout $x > 1$.

INDICE

Quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $v : x \mapsto x - 1$, qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

2.

Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.

INDICE

Écris $f'(x) = -6\,(x-1)^{-2}$ et dérive une puissance d'exposant négatif.

3.

Soit m la fonction définie sur $\left]-\dfrac{9}{4}, +\infty\right[$ par $m(x) = \sqrt{4x+9}$. Calculer $m'(x)$.

INDICE

Sur cet intervalle, $4x + 9 > 0$; applique $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice 7

Les variations d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 27x + 10$. On donne sa dérivée sous forme factorisée : $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$.

1.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le trinôme $3(x-3)(x+3)$ a deux racines ; hors de ses racines, il a le signe de son coefficient 3.

2.

Dresser le tableau de variations de f, sans les limites.

INDICE

Cite le théorème liant le signe de la dérivée aux variations, puis calcule $f(-3)$ et $f(3)$.

Exercice 8

Le bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fictif fabrique des sacs. Pour x centaines de sacs, avec $0 \leq x \leq 8$, son bénéfice en milliers de dirhams est $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 20$ (données inventées). On donne sa dérivée : $B'(x) = -3(x - 5)(x + 1)$.

1.

Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0, 8]$ et en déduire les variations de B.

INDICE

Sur $[0, 8]$, on a $x + 1 > 0$: le signe de $B'(x)$ est celui de $-3(x - 5)$.

2.

Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Donner ce bénéfice.

INDICE

B' s'annule en 5 en changeant de signe : calcule $B(5)$.