BURHAN

Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Application	8

Exercice 1

Deux nombres dérivés par le taux d'accroissement

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ sur $]-2, +\infty[$.

1.

Pour $h \neq 0$, exprimer en fonction de h le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$.

INDICE

Calcule d'abord $f(1)$, puis développe $f(1+h)$ avec $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$.

CORRIGÉ

Valeur en 1. On a $f(1) = 2 - 3 + 5 = 4$.

Calcul de $f(1+h)$. Soit h un réel non nul. On développe avec $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2(1 + 2h + h^2) \\ &\quad - 3(1+h) + 5 \\ &= 4 + h + 2h^2. \end{aligned}$$

Taux d'accroissement. On retranche $f(1) = 4$, puis on simplifie par h, qui n'est pas nul :

$$\begin{aligned} &\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{h + 2h^2}{h} \\ &= \frac{h(1+2h)}{h} \\ &= 1 + 2h. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel h non nul, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ vaut $1 + 2h$.

2.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

INDICE

Cherche la limite de $1 + 2h$ quand h tend vers 0, puis relis la définition du nombre dérivé.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour h non nul, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est $1 + 2h$. Quand h tend vers 0, le terme $2h$ tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} (1 + 2h) = 1.$$

Cette limite est un nombre réel. Par définition du nombre dérivé, f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est cette limite.

Conclusion. La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

3.

Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

INDICE

Réduis $\dfrac{1}{h+2} - \dfrac{1}{2}$ au même dénominateur avant de diviser par h.

CORRIGÉ

Différence $g(h) - g(0)$. On a $g(0) = \dfrac{1}{2}$. Soit h un réel non nul tel que $h > -2$, de sorte que h appartienne à l'intervalle de définition de g. On réduit au dénominateur $2(h+2)$:

$$\begin{aligned} g(h) - g(0) &= \frac{1}{h+2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 - (h+2)}{2(h+2)} \\ &= \frac{-h}{2(h+2)}. \end{aligned}$$

Taux d'accroissement. En divisant par h :

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{-1}{2(h+2)}.$$

Limite. Quand h tend vers 0, le dénominateur $2(h+2)$ tend vers 4. Le taux tend donc vers $-\dfrac{1}{4}$, qui est un réel.

Conclusion. La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

Deux tangentes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. Une calculatrice donne ce tableau de valeurs :

x	$0{,}9$	1	$1{,}1$
$f(x)$	$3{,}299$	3	$2{,}701$

1.

Lire dans le tableau $f(0{,}9)$ et $f(1{,}1)$, puis calculer $\dfrac{f(1{,}1) - f(0{,}9)}{0{,}2}$. En déduire une estimation de $f'(1)$.

INDICE

Ce quotient est le coefficient directeur de la sécante (PQ), où P et Q sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $0{,}9$ et $1{,}1$. Cette sécante est proche de la tangente en 1.

CORRIGÉ

Lecture. Le tableau donne $f(0{,}9) = 3{,}299$ et $f(1{,}1) = 2{,}701$.

Calcul du quotient.

$$\begin{aligned} &\frac{f(1{,}1) - f(0{,}9)}{0{,}2} \\ &= \frac{2{,}701 - 3{,}299}{0{,}2} \\ &= \frac{-0{,}598}{0{,}2} = -2{,}99. \end{aligned}$$

Estimation. Ce quotient est la pente de la droite qui joint les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $0{,}9$ et $1{,}1$. Ces deux abscisses entourent 1 de très près : la pente obtenue est proche de celle de la tangente au point d'abscisse 1.

Conclusion. $f(0{,}9) = 3{,}299$, $f(1{,}1) = 2{,}701$, le quotient vaut $-2{,}99$ et l'on estime $f'(1) \approx -3$.

2.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Dérive terme à terme : la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n\,x^{n-1}$.

CORRIGÉ

La fonction f est un polynôme : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive chaque terme, avec la dérivée d'une somme et celle d'un produit par un réel. La dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$, celle de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$, et la constante 5 a une dérivée nulle.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$, puis remplace dans $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=1$.

CORRIGÉ

Valeurs utiles. On a $f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$.

Équation. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$. Elle s'écrit donc $y = -3(x-1)+3$, soit $y = -3x+6$.

Contrôle. Pour $x=1$, on retrouve $y = 3 = f(1)$. La valeur exacte $f'(1) = -3$ confirme l'estimation de la question 1.

Conclusion. La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x+6$.

4.

Écrire une équation de la tangente T' au point d'abscisse 2. Que remarques-tu ?

INDICE

Commence par $f'(2)$: c'est le coefficient directeur de T'.

CORRIGÉ

Valeurs utiles. On a $f(2) = 8 - 12 + 5 = 1$ et $f'(2) = 12 - 12 = 0$.

Équation. La tangente T' a pour équation $y = f'(2)(x-2)+f(2)$, c'est-à-dire $y = 0 \times (x-2)+1$, soit $y = 1$.

Conclusion. T' a pour équation $y = 1$. Son coefficient directeur $f'(2)$ est nul : la tangente T' est horizontale.

Exercice 3

Le coût du litre supplémentaire

Une coopérative fictive produit q litres d'huile par jour, avec $0 \leq q \leq 400$. Son coût total, en dirhams, est $C(q) = 0{,}04q^2 + 12q + 900$ (données inventées).

1.

Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis $C'(150)$.

INDICE

Dérive chaque terme : la dérivée de $q \mapsto 0{,}04q^2$ est $q \mapsto 0{,}08q$.

CORRIGÉ

Coût marginal. La fonction C est un polynôme, donc elle est dérivable sur $[0, 400]$. En dérivant chaque terme, pour tout q de $[0, 400]$, $C'(q) = 0{,}08q + 12$.

Valeur en 150.

$$\begin{aligned} C'(150) &= 0{,}08 \times 150 + 12 \\ &= 12 + 12 = 24. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coût marginal est $C'(q) = 0{,}08q + 12$, et $C'(150) = 24$.

2.

Par l'approximation affine, donner une valeur approchée du coût du 151e litre, c'est-à-dire de $C(151) - C(150)$.

INDICE

Écris $C(150 + h) \approx C(150) + C'(150)\,h$ avec $h = 1$.

CORRIGÉ

La fonction C est dérivable en 150. L'approximation affine en 150 s'écrit, pour h voisin de 0 :

$$\begin{aligned} C(150 + h) \approx\ & C(150) \\ & + C'(150)\,h. \end{aligned}$$

Avec $h = 1$ et $C'(150) = 24$, on obtient $C(151) \approx C(150) + 24$.

Conclusion. $C(151) - C(150) \approx 24$: le 151e litre coûte environ 24 dirhams.

3.

Calculer la valeur exacte de $C(151) - C(150)$ et la comparer à la valeur approchée.

INDICE

Utilise $151^2 - 150^2 = (151 - 150)(151 + 150)$.

CORRIGÉ

Une différence de carrés. On factorise :

$$\begin{aligned} &151^2 - 150^2 \\ &= (151 - 150)(151 + 150) \\ &= 301. \end{aligned}$$

Valeur exacte. Le terme constant 900 disparaît dans la différence :

$$\begin{aligned} &C(151) - C(150) \\ &= 0{,}04\,(151^2 - 150^2) \\ &\quad + 12 \times 1 \\ &= 0{,}04 \times 301 + 12 \\ &= 12{,}04 + 12 \\ &= 24{,}04. \end{aligned}$$

Comparaison. La valeur approchée 24 ne s'écarte de la valeur exacte que de $0{,}04$ dirham.

Conclusion. $C(151) - C(150) = 24{,}04$: ici, le coût marginal donne une très bonne approximation du coût du 151e litre.

Exercice 4

Un raccord en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1.

Montrer que f est dérivable à droite en 1 et calculer $f'_d(1)$.

INDICE

$f(1)$ se calcule avec la ligne $x \leq 1$. Pour $h > 0$, on a $1 + h > 1$: utilise la première ligne.

CORRIGÉ

Valeur en 1. Comme $1 \leq 1$, on utilise la seconde ligne : $f(1) = 2 + 1 = 3$.

Taux à droite. Soit $h > 0$. Alors $1 + h > 1$ et la première ligne donne $f(1+h) = (1+h)^2 + 2 = 3 + 2h + h^2$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= 2 + h. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0 par valeurs positives, $2 + h$ tend vers 2, qui est un réel.

Conclusion. La fonction f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$.

2.

Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et calculer $f'_g(1)$.

INDICE

Pour $h < 0$, on a $1 + h < 1$: utilise la seconde ligne.

CORRIGÉ

Taux à gauche. Soit $h < 0$. Alors $1 + h < 1$ et la seconde ligne donne $f(1+h) = 2(1+h) + 1 = 3 + 2h$. Donc :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Limite. Ce taux garde la valeur 2 pour tout $h < 0$: sa limite quand h tend vers 0 par valeurs négatives est 2.

Conclusion. La fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 2$.

3.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

INDICE

Compare les deux nombres trouvés et cite la propriété qui relie la dérivabilité en un point à la dérivabilité à droite et à gauche.

CORRIGÉ

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle ouvert qui contient 1. D'après les questions 1 et 2, elle est dérivable à droite et à gauche en 1, avec $f'_d(1) = f'_g(1) = 2$.

La propriété « dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche » s'applique : les deux nombres dérivés étant égaux, f est dérivable en 1 et $f'(1)$ est leur valeur commune.

Conclusion. Oui : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Exercice 5

Trois dérivées sur l'ensemble des réels

Dans chaque cas, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction dérivée.

1.

$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 7x - 1$.

INDICE

Somme et produit par un réel ; la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n\,x^{n-1}$.

CORRIGÉ

On utilise la dérivée d'une somme, celle d'un produit par un réel, et la dérivée de $x \mapsto x^n$, qui est $x \mapsto n\,x^{n-1}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 4x^3 - 2 \times 3x^2 \\ &\quad + 7 \\ &= 20x^3 - 6x^2 + 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 7$.

2.

$g(x) = (x^2 + 3)(5 - 2x)$.

INDICE

C'est un produit uv, avec $u : x \mapsto x^2 + 3$ et $v : x \mapsto 5 - 2x$. Utilise $(uv)' = u'v + uv'$.

CORRIGÉ

Forme. On écrit $g = uv$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $v(x) = 5 - 2x$. Ce sont deux polynômes : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -2$.

Dérivée d'un produit. On applique $(uv)' = u'v + uv'$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(5 - 2x) \\ &\quad + (x^2 + 3) \times (-2) \\ &= 10x - 4x^2 - 2x^2 - 6 \\ &= -6x^2 + 10x - 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = -6x^2 + 10x - 6$.

3.

$k(x) = (4x - 3)^5$.

INDICE

Puissance d'une fonction : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, avec $u : x \mapsto 4x - 3$.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 4x - 3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4$. La dérivée d'une puissance, $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, s'applique avec $n = 5$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 5 \times 4 \times (4x - 3)^4 \\ &= 20\,(4x - 3)^4. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $k'(x) = 20\,(4x - 3)^4$.

Exercice 6

Un quotient, sa dérivée seconde et une racine

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$.

1.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$ pour tout $x > 1$.

INDICE

Quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $v : x \mapsto x - 1$, qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

CORRIGÉ

Hypothèses. Posons $u(x) = x + 5$ et $v(x) = x - 1$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]1, +\infty[$, avec $u'(x) = v'(x) = 1$. Pour $x > 1$, on a $v(x) > 0$: la fonction v ne s'annule pas sur cet intervalle.

Dérivée d'un quotient. On applique $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1) - (x+5)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x - 1 - x - 5}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-6}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$.

2.

Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.

INDICE

Écris $f'(x) = -6\,(x-1)^{-2}$ et dérive une puissance d'exposant négatif.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout $x > 1$, $f'(x) = -6\,(x-1)^{-2}$. La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable, de dérivée 1, et ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. On applique la dérivée d'une puissance avec $n = -2$. Pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} &f''(x) \\ &= -6 \times (-2)\,(x-1)^{-3} \\ &= \frac{12}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 1$, $f''(x) = \dfrac{12}{(x-1)^3}$.

3.

Soit m la fonction définie sur $\left]-\frac{9}{4},+\infty\right[$ par $m(x)=\sqrt{4x+9}$. Calculer $m'(x)$.

INDICE

Sur cet intervalle, $4x+9>0$; applique $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

CORRIGÉ

Hypothèses. Posons $u(x)=4x+9$: u est dérivable et $u'(x)=4$. Pour $x>-\frac{9}{4}$, on a $4x>-9$, donc $4x+9>0$: la fonction u est strictement positive sur l'intervalle.

Dérivée de la racine carrée d'une fonction. On applique $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Pour tout $x>-\frac{9}{4}$:

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{4}{2\sqrt{4x+9}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x+9}}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction m est dérivable sur l'intervalle et, pour tout $x>-\frac{9}{4}$, $m'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x+9}}$.

Exercice 7

Les variations d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 27x + 10$. On donne sa dérivée sous forme factorisée : $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$.

1.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le trinôme $3(x-3)(x+3)$ a deux racines ; hors de ses racines, il a le signe de son coefficient 3.

CORRIGÉ

Racines. Le produit $3(x-3)(x+3)$ s'annule en -3 et en 3.

Signe. C'est un trinôme de coefficient dominant 3, positif : il est du signe de 3 à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre elles.

Conclusion.

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -3[$ et sur $]3, +\infty[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-3, 3[$;
- $f'(-3) = f'(3) = 0$.

2.

Dresser le tableau de variations de f, sans les limites.

INDICE

Cite le théorème liant le signe de la dérivée aux variations, puis calcule $f(-3)$ et $f(3)$.

CORRIGÉ

Variations. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1 et la propriété « signe de la dérivée et variations » :

- f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[3, +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $[-3, 3]$.

Valeurs. On calcule $f(-3) = -27 + 81 + 10 = 64$ et $f(3) = 27 - 81 + 10 = -44$.

Tableau de variations.

x	$f'(x)$	$f(x)$
$]-\infty, -3[$	$+$	$\nearrow$
-3	0	64
$]-3, 3[$	$-$	$\searrow$
3	0	-44
$]3, +\infty[$	$+$	$\nearrow$

Conclusion. La fonction f croît strictement jusqu'à la valeur 64 atteinte en -3, décroît strictement jusqu'à -44 atteint en 3, puis croît strictement.

Exercice 8

Le bénéfice d'un atelier de sacs

Un atelier fictif fabrique des sacs. Pour x centaines de sacs, avec $0 \leq x \leq 8$, son bénéfice en milliers de dirhams est $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 20$ (données inventées). On donne sa dérivée : $B'(x) = -3(x - 5)(x + 1)$.

1.

Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0, 8]$ et en déduire les variations de B.

INDICE

Sur $[0, 8]$, on a $x + 1 > 0$: le signe de $B'(x)$ est celui de $-3(x - 5)$.

CORRIGÉ

Signe de $B'(x)$. Pour x dans $[0, 8]$, on a $x + 1 > 0$ et $-3 < 0$. Le signe de $B'(x)$ est donc celui de $-(x - 5)$, c'est-à-dire de $5 - x$:

- $B'(x) > 0$ sur $[0, 5[$;
- $B'(5) = 0$;
- $B'(x) < 0$ sur $]5, 8]$.

Variations. La fonction B est dérivable sur $[0, 8]$. La propriété « signe de la dérivée et variations » donne les variations de B.

Conclusion. B est strictement croissante sur $[0, 5]$ et strictement décroissante sur $[5, 8]$.

2.

Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Donner ce bénéfice.

INDICE

B' s'annule en 5 en changeant de signe : calcule $B(5)$.

CORRIGÉ

Position du maximum. D'après la question 1, B croît sur $[0, 5]$ puis décroît sur $[5, 8]$. Donc $B(x) \leq B(5)$ pour tout x de $[0, 8]$: le bénéfice est maximal pour $x = 5$, où B' s'annule en passant du signe $+$ au signe $-$.

Valeur du maximum.

$$\begin{aligned} & B(5) \\ & = -125 + 150 + 75 - 20 \\ & = 80. \end{aligned}$$

Conclusion. Le bénéfice est maximal pour 5 centaines, soit 500 sacs ; il vaut alors 80 milliers de dirhams.