BURHAN

Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/derivabilite/cours

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Entrée

Une entreprise fictive fabrique des lampes ; ses données sont inventées. Pour q lampes, son **coût total**, en dirhams (DH), vaut :

$$C(q) = q^2 + 20q + 500.$$

Elle fabrique déjà 30 lampes, pour un coût $C(30) = 2\,000$ DH.

Le chef d'atelier se demande combien coûtera la lampe suivante.

Devine : La lampe suivante

Combien coûte la fabrication de la trente et unième lampe, c'est-à-dire $C(31) - C(30)$? Fais une prédiction, puis vérifie.

A. Environ $66{,}67$ DH, le coût moyen.

Faux.

Faux. Le coût moyen est le coût total divisé par le nombre de lampes : $\dfrac{C(30)}{30} \approx 66{,}67$ DH. Ce n'est pas le coût de la suivante.

B. 20 DH, le coefficient de q.

Faux.

Faux. Le terme q^2 fait aussi varier le coût : il faut calculer $C(31)$.

C. 81 DH.

Juste.

Juste. $C(31) = 961 + 620 + 500 = 2\,081$, donc $C(31) - C(30) = 81$ DH.

D. $2\,081$ DH.

Faux.

Faux. $2\,081$ DH est le coût total des 31 lampes, pas celui de la dernière.

Indice 1

Calcule $C(31)$ en remplaçant q par 31.

Correction

Calculons d'abord le coût de 31 lampes :

$$C(31) = 961 + 620 + 500 = 2\,081.$$

La trente et unième lampe coûte donc $C(31) - C(30) = 2\,081 - 2\,000 = 81$ DH.

> Ce n'est ni le coût moyen, ni le coefficient 20.

Dans ce chapitre, tu vas répondre à ce genre de question sans tout recalculer.

L'outil s'appelle le **nombre dérivé**. Il mesure la vitesse de variation d'une grandeur : un coût, une recette, un bénéfice.

Tu verras aussi comment trouver la quantité qui rend un bénéfice maximal.

Le nombre dérivé

Le coût des lampes ajoutées

Reprends l'entreprise de lampes. Elle passe de 30 lampes à $30+h$ lampes, avec $h \neq 0$: son coût augmente de $C(30+h)-C(30)$.

En divisant cette hausse par h, on obtient le **coût par lampe ajoutée** :

$$\frac{C(30+h)-C(30)}{h}.$$

Ce quotient s'appelle le **taux d'accroissement** de C entre 30 et $30+h$.

> **Vérifie : Deux lampes de plus**
>
> Pour $h=2$, l'entreprise passe de 30 à 32 lampes. Quel est le coût par lampe ajoutée ?
>
> **A.** 164 DH
>
> **Faux.**
> Faux. $C(32)-C(30)=164$ DH est le coût des deux lampes ensemble : il faut diviser par $h=2$.
>
> **B.** 82 DH
>
> **Juste.**
> Juste. $C(32)=1\,024+640+500=2\,164$, puis $\dfrac{2\,164-2\,000}{2}=82$.
>
> **C.** $67{,}625$ DH
>
> **Faux.**
> Faux. $\dfrac{C(32)}{32}=67{,}625$ est le coût moyen des 32 lampes, pas le coût par lampe ajoutée.
>
> **Indice 1**
> Calcule d'abord $C(32)$.
>
> **Correction**
> D'abord, $C(32)=1\,024+640+500=2\,164$ DH.
>
> Le taux d'accroissement vaut alors :
>
> $$\frac{C(32)-C(30)}{2}=\frac{164}{2}=82.$$

> Cela fait 82 DH par lampe ajoutée.

Développe : pour tout réel h,

$$C(30+h) = 2\,000 + 80h + h^2.$$

Pour $h \neq 0$, le taux vaut donc :

$$\frac{80h + h^2}{h} = 80 + h.$$

Quelques valeurs :

- avec $h = 1$, il vaut 81 ;
- avec $h = 0{,}1$, il vaut $80{,}1$;
- avec $h = 0{,}01$, il vaut $80{,}01$.

Quand h tend vers 0, le taux tend vers 80.

La définition

Définition : Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, le quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$.

On dit que f est **dérivable en** a si ce taux admet une limite **finie** ℓ quand h tend vers 0. Ce réel ℓ s'appelle le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En posant $x = a + h$, on écrit aussi $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

En clair : on calcule le taux d'accroissement, puis sa limite quand h tend vers 0. Si cette limite est un nombre réel, c'est le nombre dérivé.

Pour le coût des lampes, $C'(30) = 80$.

Le mot « finie » compte : une limite égale à $+\infty$ ne donne aucun nombre dérivé.

Exemple : un nombre dérivé par le calcul

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$, et $a = 1$. On a $f(1) = -1$.

Taux d'accroissement. Pour tout réel $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} & f(1+h) \\ & = 2(1+2h+h^2) - 3 - 3h \\ & = -1 + h + 2h^2. \end{aligned}$$

Donc $f(1+h) - f(1) = h + 2h^2$, et le taux vaut :

$$\frac{h + 2h^2}{h} = 1 + 2h.$$

Limite. Quand h tend vers 0, $1 + 2h$ tend vers 1, qui est un réel.

Conclusion. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Quand la limite est infinie

Exemple : une fonction non dérivable en un point

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{|x|}$, et $a = 0$. Pour tout réel $h > 0$, le taux vaut :

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Quand h tend vers 0 par valeurs positives, $\sqrt{h}$ tend vers 0 par valeurs positives, et le taux tend vers $+\infty$.

Le taux n'a donc pas de limite finie : u n'est pas dérivable en 0.

Vérifie : Un taux qui grandit

Avec $u(x) = \sqrt{|x|}$, que vaut le taux d'accroissement entre 0 et h pour $h = 0{,}0001$?

A. 100

Juste.

Juste. $\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$, et $\dfrac{1}{0{,}01} = 100$.

B. $0{,}01$

Faux.

Faux. $0{,}01$ est $\sqrt{h}$: le taux est son inverse.

C. $10\,000$

Faux.

Faux. $10\,000$ est $\dfrac{1}{h}$; ici le taux vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

D. 0

Faux.

Faux. Le taux grandit quand h se rapproche de 0 ; il ne s'approche pas de 0.

Indice 1

Le taux vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$: calcule d'abord $\sqrt{0{,}0001}$.

Correction

Pour $h = 0{,}0001$, on a $\sqrt{h} = 0{,}01$, donc le taux vaut :

$$\frac{1}{0{,}01} = 100.$$

Plus h est petit, plus le taux est grand : il tend vers $+\infty$.

La méthode

Méthode : calculer un nombre dérivé

1. **Écrire** $f(a+h) - f(a)$ et le simplifier.
2. **Diviser** par h, avec $h \neq 0$, et simplifier pour faire disparaître la forme $\dfrac{0}{0}$.
3. **Chercher** la limite quand h tend vers 0. Si elle est finie, f est dérivable en a et $f'(a)$ est cette limite. Sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple : la méthode sur un quotient

Soit g la fonction définie pour $x \neq -1$ par $g(x) = \dfrac{4}{x+1}$, et $a = 1$. On a $g(1) = 2$.

Écrire la différence. Pour $h \neq 0$ proche de 0 :

$$\begin{aligned} g(1+h) - g(1) &= \frac{4}{2+h} - 2 \\ &= \frac{4 - 4 - 2h}{2+h} \\ &= \frac{-2h}{2+h}. \end{aligned}$$

Diviser par h. Le taux vaut $\dfrac{-2}{2+h}$.

Passer à la limite. Quand h tend vers 0, il tend vers $\dfrac{-2}{2} = -1$.

Conclusion. g est dérivable en 1 et $g'(1) = -1$.

Deux pièges

Attention : simplifier avant de passer à la limite

✗ Remplacer tout de suite h par 0 dans $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$: on obtient $\dfrac{0}{0}$, qui n'a pas de sens.

✓ D'abord simplifier par h, avec $h \neq 0$, puis chercher la limite. Pour le coût des lampes :

$$\frac{80h + h^2}{h} = 80 + h,$$

qui tend vers 80.

Trouve l'erreur : La copie de Yasmine

Yasmine étudie $f(x) = x^2$ en $a = 3$. Elle écrit : « Le taux vaut $\frac{6h + h^2}{h}$. Je remplace h par 0 et j'obtiens $\frac{0}{0}$. Donc f n'est pas dérivable en 3. » Où est l'erreur ?

A. Le taux est mal calculé.

Faux.

Faux. $(3 + h)^2 - 9 = 6h + h^2$: le taux est juste.

B. La forme $\frac{0}{0}$ ne permet aucune conclusion.

Juste.

Juste. Il faut simplifier : $\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$, qui tend vers 6.

C. La limite d'un taux n'existe jamais.

Faux.

Faux. Ici, après simplification, la limite existe et vaut 6.

D. h n'a pas le droit d'être petit.

Faux.

Faux. On fait justement tendre h vers 0, avec $h \neq 0$.

Indice 1

Relis la première étape de la méthode, puis la deuxième.

Correction

L'erreur est dans la conclusion : la forme $\frac{0}{0}$ ne permet de rien conclure.

Pour $h \neq 0$, on simplifie d'abord :

$$\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Quand h tend vers 0, $6 + h$ tend vers 6. Donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Attention : un nombre ou une fonction

✗ Écrire « $f' = 6$ » quand on sait seulement que le nombre dérivé en 3 vaut 6.

✓ Écrire « $f'(3) = 6$ ».

Le symbole $f'(a)$ désigne un **nombre** : le nombre dérivé en a. Le symbole f' désigne une **fonction** : tu la rencontreras plus loin dans ce chapitre.

À toi

À toi : Recette et nombre dérivé

Une boutique fictive vend q articles. Sa **recette**, c'est-à-dire l'argent encaissé, vaut $R(q) = 50q - q^2$ en DH. Calcule $R'(10)$ par le taux d'accroissement. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : écris d'abord $R(10+h)$ et $R(10)$.
Indice 2
$R(10) = 400$ et $R(10+h) = 400 + 30h - h^2$.
Indice 3
Point délicat : simplifie par h avant de faire tendre h vers 0.

Réponse
Taux d'accroissement. Pour tout réel h :

$$\begin{aligned} &R(10+h) - R(10) \\ &= 30h - h^2. \end{aligned}$$

Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\dfrac{30h - h^2}{h} = 30 - h$.

Limite. Quand h tend vers 0, $30 - h$ tend vers 30, qui est un réel.

Conclusion. R est dérivable en 10 et $R'(10) = 30$.

Vers 10 articles, un article de plus rapporte environ 30 DH.

Tu sais maintenant calculer un nombre dérivé avec la définition.

Dans la section suivante, tu vas le voir sur une courbe : c'est une pente.

Tangente et approximation affine

De la sécante à la tangente

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$, et $A(2, 2)$ le point de sa courbe d'abscisse 2.

Pour $h \neq 0$, place le point M de la courbe d'abscisse $2 + h$. La droite (AM) est une **sécante**.

Son coefficient directeur est le taux d'accroissement de v entre 2 et $2 + h$:

$$\frac{v(2+h) - v(2)}{h} = 2 + \frac{h}{2}.$$

Devine : Le point M glisse

Avec $h = 2$, puis $h = 1$, puis $h = 0{,}5$, la sécante (AM) a pour coefficient directeur 3, puis $2{,}5$, puis $2{,}25$. Que se passe-t-il quand M se rapproche de A ?

A. La sécante devient verticale.

Faux.

Faux. Son coefficient directeur se rapproche de 2 : il ne grandit pas sans fin.

B. La sécante devient horizontale.

Faux.

Faux. Une droite horizontale a un coefficient directeur nul ; ici, il se rapproche de 2.

C. Elle se rapproche d'une droite de pente 2.

Juste.

Juste. $2 + \dfrac{h}{2}$ tend vers 2 quand h tend vers 0.

D. Elle n'a aucune position limite.

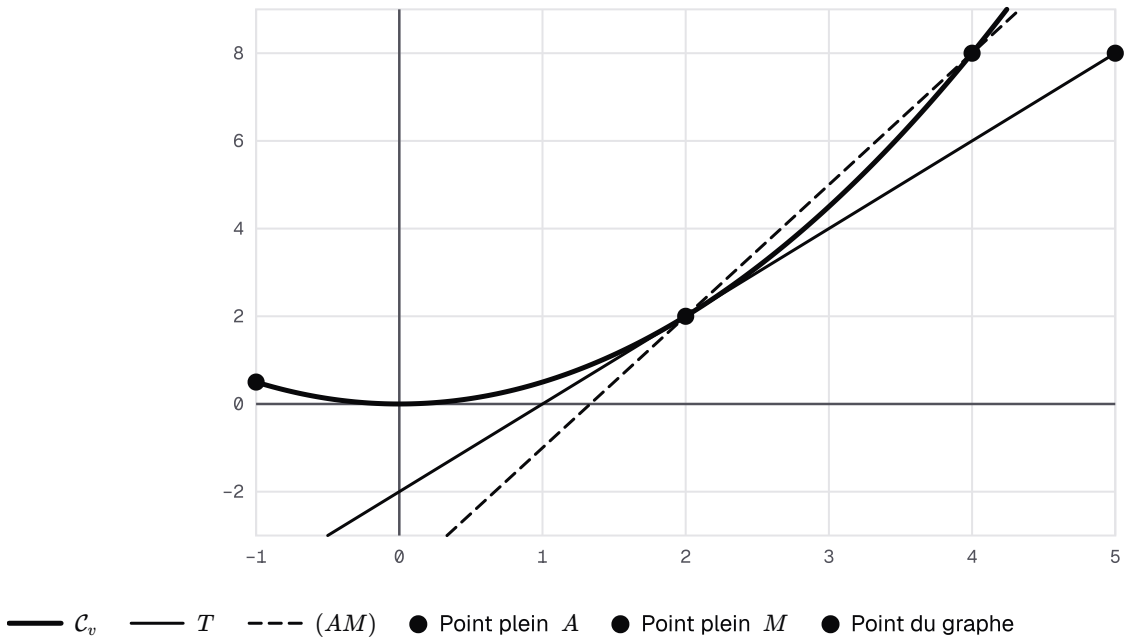
Faux.

Faux. Les coefficients directeurs se rapprochent de 2 : une position limite existe.

Correction

Le coefficient directeur $2 + \dfrac{h}{2}$ tend vers 2, qui est $v'(2)$.

Quand M glisse vers A, la sécante pivote autour de A. Sa position limite, de pente 2, s'appelle la **tangente** en A. La figure la montre.



La courbe de v, la sécante (AM) pour $h = 2$ et la tangente T en A.

L'équation de la tangente

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Une équation de cette tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple : la tangente en A

Pour v en $a = 2$: $v(2) = 2$, et $v'(2) = 2$ est la limite de $2 + \frac{h}{2}$.

La tangente en $A(2, 2)$ a pour équation :

$$y = 2(x - 2) + 2,$$

soit, en développant :

$$y = 2x - 2.$$

Contrôle : pour $x = 2$, $y = 2 \times 2 - 2 = 2$, qui est bien $v(2)$.

Méthode : écrire l'équation d'une tangente

1. **Calculer** $f(a)$ et $f'(a)$.
2. **Remplacer** dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. **Développer** pour obtenir $y = mx + p$. Puis **contrôler** : le point $A(a, f(a))$ doit vérifier l'équation.

Attention : le facteur x moins a

✗ Écrire la tangente sous la forme $y = f'(a)\,x + f(a)$. Pour v en 2, cela donne $y = 2x + 2$, qui ne passe pas par $A(2, 2)$.

✓ Garder le facteur $x - a$: $y = 2(x - 2) + 2 = 2x - 2$.

Contrôle simple : remplace x par a, tu dois retrouver $f(a)$.

Vérifie : Une tangente à écrire

À la section précédente, pour $f(x) = 2x^2 - 3x$, on a trouvé $f(1) = -1$ et $f'(1) = 1$. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?

A. $y = x - 1$

Faux.

Faux. C'est $y = f'(1)\,x + f(1)$: le facteur $x - 1$ manque, et le point $(1, -1)$ ne vérifie pas l'équation.

B. $y = x - 2$

Juste.

Juste. $y = 1 \times (x - 1) + (-1) = x - 2$, et pour $x = 1$ on retrouve $y = -1$.

C. $y = -x + 2$

Faux.

Faux. Les rôles de $f(1)$ et $f'(1)$ sont échangés : le coefficient directeur est $f'(1) = 1$.

D. $y = x$

Faux.

Faux. Pour $x = 1$, cette droite donne $y = 1$, et non $f(1) = -1$.

Indice 1

Remplace a, $f(a)$ et $f'(a)$ dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Correction

On remplace dans $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$:

$$y = (x - 1) - 1 = x - 2.$$

Contrôle : pour $x = 1$, $y = -1 = f(1)$.

L'approximation affine

Près de A, la courbe et la tangente se confondent presque. Pour $x = 2{,}1$:

- la courbe donne $v(2{,}1) = 2{,}205$;
- la tangente donne $2 \times 2{,}1 - 2 = 2{,}2$.

L'écart vaut seulement $0{,}005$. Pourquoi est-ce vrai ?

Le taux d'accroissement de v entre 2 et $2 + h$ est proche de $v'(2) = 2$ quand h est petit ; on multiplie ensuite par h.

Propriété : Approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a et dérivable en a. Il existe une fonction ε, définie pour h voisin de 0, telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + h\, \varepsilon(h).$$

Pour h voisin de 0, on en déduit l'**approximation affine** $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$. La fonction affine $h \mapsto f(a) + f'(a)\, h$ s'appelle l'approximation affine de $h \mapsto f(a + h)$ au voisinage de 0.

Démonstration

Étape 1. Pour $h \neq 0$ voisin de 0, on pose $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a)$, et on pose $\varepsilon(0) = 0$.

Étape 2. Par définition du nombre dérivé, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. D'après les opérations sur les limites, $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = f'(a) - f'(a) = 0$.

Étape 3. Pour $h \neq 0$, on multiplie l'égalité de l'étape 1 par h : $h\,\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)\,h$. Donc $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + h\,\varepsilon(h)$. Pour $h = 0$, les deux membres valent $f(a)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On nomme $\varepsilon(h)$ l'écart entre le taux d'accroissement et $f'(a)$. Par définition du nombre dérivé, cet écart tend vers 0.

On multiplie ensuite par h pour revenir à $f(a+h)$.

Le terme $h\,\varepsilon(h)$ est l'erreur commise : il devient très petit devant h.

Vérifie : L'argument clé

Dans la preuve, quel argument donne $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$?

A. Le taux tend vers $f'(a)$, par définition du nombre dérivé.

Juste.

Juste. D'après les opérations sur les limites, $\varepsilon(h)$ tend alors vers $f'(a) - f'(a) = 0$.

B. On multiplie l'égalité par h.

Faux.

Faux. Cette multiplication vient après : elle sert à retrouver $f(a+h)$.

C. On remplace h par 0 dans le taux.

Faux.

Faux. Le taux n'est pas défini pour $h = 0$: on passe à la limite.

D. La courbe est au-dessus de sa tangente.

Faux.

Faux. La preuve n'emploie aucune position de la courbe par rapport à la tangente.

Correction

Par définition du nombre dérivé, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$.

Or $\varepsilon(h)$ est ce taux moins $f'(a)$. D'après les opérations sur les limites, $\varepsilon(h)$ tend vers $f'(a) - f'(a) = 0$.

Exemple : quatre approximations au voisinage de 0

On applique l'approximation affine en $a = 1$, avec h voisin de 0, à quatre fonctions. Leurs taux d'accroissement en 1 valent :

- $2+h$ pour $x \mapsto x^2$;
- $3+3h+h^2$ pour $x \mapsto x^3$;
- $-\dfrac{1}{1+h}$ pour $x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}$ pour $x \mapsto \sqrt{x}$.

Par exemple, $\dfrac{1}{1+h} - 1 = \dfrac{-h}{1+h}$, puis on divise par h.

Les limites usuelles et les opérations sur les limites donnent 2, 3, -1 et $\dfrac{1}{2}$. D'où, pour h voisin de 0 :

$$(1+h)^2 \approx 1+2h$$
$$(1+h)^3 \approx 1+3h$$
$$\frac{1}{1+h} \approx 1-h$$
$$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}$$

Valeurs approchées et coût marginal

Méthode : obtenir une valeur approchée

1. **Écrire** le nombre cherché sous la forme $f(a+h)$, avec $f(a)$ et $f'(a)$ faciles à calculer et h petit.
2. **Calculer** $f(a)+f'(a)\,h$.
3. **Conclure** par $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)\,h$. C'est une valeur approchée : on l'écrit avec $\approx$, jamais avec $=$.

Exemple : une puissance proche de 1

On cherche une valeur approchée de $(0{,}98)^3$. On écrit $0{,}98 = 1+h$, avec $h=-0{,}02$.

D'après l'approximation de $(1+h)^3$:

$$\begin{aligned}(0{,}98)^3 &\approx 1+3\times(-0{,}02)\\ &= 0{,}94.\end{aligned}$$

La calculatrice donne $(0{,}98)^3 = 0{,}941192$: l'erreur est inférieure à $0{,}002$.

Exemple : le coût marginal

Pour les lampes, $C'(30)=80$. On applique l'approximation affine avec $a=30$ et $h=1$:

$$\begin{aligned}C(31) &\approx C(30)+C'(30)\times 1\\ &= 2\,080.\end{aligned}$$

La trente et unième lampe coûte donc environ $C'(30)=80$ DH ; le calcul exact donnait 81 DH.

Le nombre $C'(q)$ s'appelle le **coût marginal** : il approche le coût d'une unité de plus. De même, pour une recette R, le nombre $R'(q)$ s'appelle la **recette marginale**.

À toi : Deux valeurs approchées

Par l'approximation affine, donne une valeur approchée de $\sqrt{1{,}06}$, puis de $\dfrac{1}{1{,}06}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $1{,}06 = 1 + h$: que vaut h ?

Indice 2

Avec $h = 0{,}06$, utilise $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$ et $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

Indice 3

Point délicat : écris chaque résultat avec $\approx$, car ce n'est pas une valeur exacte.

Réponse

Racine carrée. On écrit $1{,}06 = 1 + h$, avec $h = 0{,}06$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1{,}06} &\approx 1 + 0{,}03 \\ &= 1{,}03.\end{aligned}$$

Inverse. Avec le même h :

$$\frac{1}{1{,}06} \approx 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Contrôle. La calculatrice donne $\sqrt{1{,}06} \approx 1{,}0296$ et $\dfrac{1}{1{,}06} \approx 0{,}9434$. Les deux écarts restent inférieurs à $0{,}004$.

Dérivabilité à droite et à gauche

Un tarif à deux régimes

Une imprimerie fictive facture q affiches. Jusqu'à 100 affiches, chacune coûte 3 DH. Au-delà, chaque affiche de plus coûte 2 DH.

Le prix total vaut :

$$P(q) = \begin{cases} 3q & \text{si } 0 \le q \le 100 \\ 2q + 100 & \text{si } q > 100 \end{cases}$$

Les deux formules donnent $P(100) = 300$ DH. Que se passe-t-il autour de 100 ?

Vérifie : Un taux à gauche

Calcule le taux d'accroissement de P entre 100 et $100+h$ pour $h=-1$, c'est-à-dire entre 100 et 99 .

A. 2

Faux.

Faux. 2 est le taux à droite, par exemple pour $h=1$. À gauche de 100, on utilise $3q$.

B. -3

Faux.

Faux. $P(99)-P(100)=-3$, mais il faut encore diviser par $h=-1$.

C. 3

Juste.

Juste. $\dfrac{P(99)-P(100)}{-1}=\dfrac{297-300}{-1}=3$.

D. 297

Faux.

Faux. 297 est $P(99)$, le prix de 99 affiches.

Indice 1

Pour $q=99$, c'est la formule $3q$ qui s'applique.

Correction

On a $P(99)=3\times 99=297$. Le taux vaut :

$$\frac{297-300}{-1}=3.$$

Pour $h=1$, il vaudrait $\dfrac{302-300}{1}=2$: les taux à gauche et à droite diffèrent.

Un nombre dérivé de chaque côté

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel.

- Si f est définie sur un intervalle $[a,a+r[$ avec $r>0$, on dit que f est **dérivable à droite** en a lorsque $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé à droite** de f en a ; on la note $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur un intervalle $]a-r,a]$ avec $r>0$, on dit que f est **dérivable à gauche** en a lorsque $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé à gauche** de f en a ; on la note $f'_g(a)$.

Exemple : le tarif de l'imprimerie

À droite. Pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} P(100+h) &= 2(100+h) + 100 \\ &= 300 + 2h. \end{aligned}$$

Le taux vaut $\dfrac{2h}{h} = 2$, donc $P'_d(100) = 2$.

À gauche. Pour $h < 0$, avec $100 + h \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(100+h) &= 3(100+h) \\ &= 300 + 3h. \end{aligned}$$

Le taux vaut $\dfrac{3h}{h} = 3$, donc $P'_g(100) = 3$.

Conclusion. P est dérivable à droite et à gauche en 100.

Le lien avec la dérivabilité

Pour le tarif, le taux vaut 2 à droite et 3 à gauche. Peut-on parler d'un nombre dérivé de P en 100 ? La propriété suivante répond non.

Pourquoi est-ce vrai ? Au chapitre des limites, tu as vu qu'une fonction a une limite en 0 exactement quand ses deux limites latérales en 0 existent et coïncident.

Propriété : Dérivabilité et nombres dérivés à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas,

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

Démonstration

Étape 1. On note $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, pour $h \neq 0$ voisin de 0. D'après le chapitre des limites, une fonction admet une limite finie ℓ en 0 si et seulement si elle admet en 0 une limite à droite et une limite à gauche, toutes deux égales à ℓ.

Étape 2. Par définition, f est dérivable en a si et seulement si τ admet une limite finie en 0 ; f est dérivable à droite (à gauche) en a si et seulement si τ admet une limite finie à droite (à gauche) en 0 .

Étape 3. On applique l'étape 1 à τ : f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égales, et alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne calcule rien. Elle lit le taux d'accroissement avec une règle du chapitre des limites : pour avoir une limite en 0, il faut et il suffit d'avoir la même limite des deux côtés de 0.

Pour étudier la dérivabilité, tu peux donc séparer les deux côtés.

Vérifie : Le ressort de la preuve

Sur quel résultat repose la preuve de cette propriété ?

A. Une tangente a un coefficient directeur.

Faux.

Faux. La preuve n'emploie pas la tangente : elle porte sur les limites du taux.

B. La limite d'une somme de deux fonctions.

Faux.

Faux. Aucune somme de limites n'apparaît dans cette preuve.

C. Une limite en 0 se lit par ses deux côtés.

Juste.

Juste. Le taux a une limite en 0 quand il a la même limite à droite de 0 et à gauche de 0.

D. Le taux se simplifie toujours par h.

Faux.

Faux. La preuve ne simplifie aucun taux : elle vaut pour toute fonction.

Correction

La preuve applique au taux d'accroissement $\tau(h)$ une propriété du chapitre des limites.

Le taux τ a une limite finie ℓ en 0 dans un seul cas : ses limites à droite et à gauche en 0 valent toutes deux ℓ, c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0^+} \tau(h) = \lim_{h \to 0^-} \tau(h) = \ell.$$

Exemple : deux côtés qui se raccordent

Pour le tarif, $P'_d(100) = 2$ et $P'_g(100) = 3$ diffèrent : P n'est pas dérivable en 100.

Soit maintenant la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

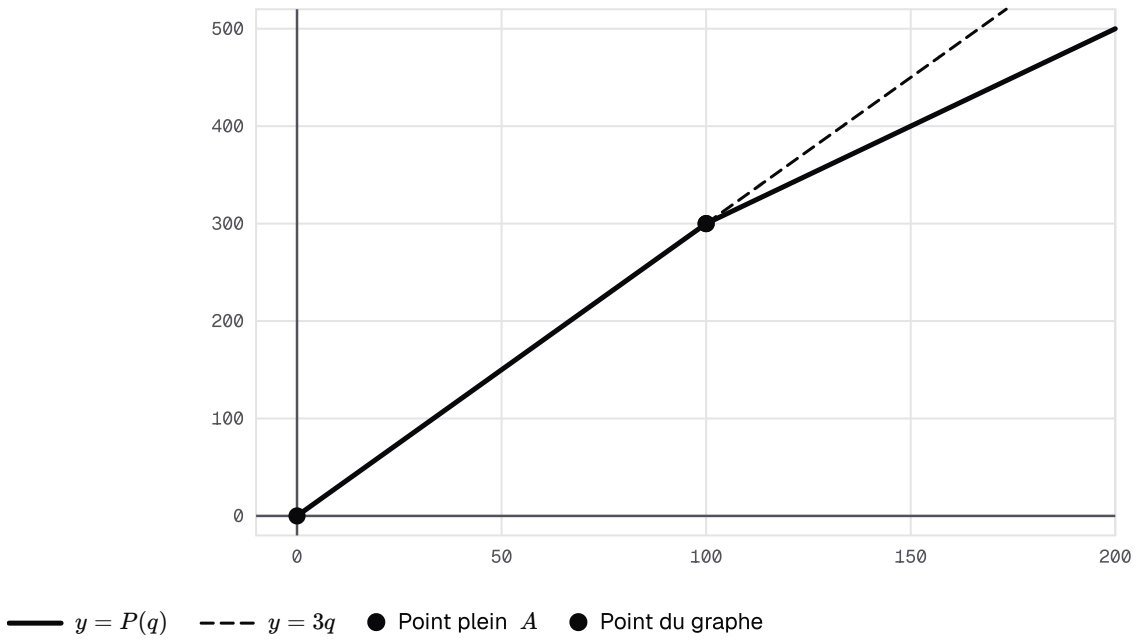
On a $k(2) = 2$.

À gauche. Pour $h < 0$, $k(2+h) - k(2) = 3h + h^2$, donc le taux vaut $3 + h$, de limite 3.

À droite. Pour $h > 0$, le taux vaut :

$$\frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} = 3.$$

Conclusion. $k'_g(2) = k'_d(2) = 3$: k est dérivable en 2 et $k'(2) = 3$.



Le prix total P des affiches : pente 3 jusqu'à 100 affiches, pente 2 au-delà. En 100, la courbe change brusquement d'inclinaison et forme un angle.

Les demi-tangentes

Définition : Demi-tangentes

Soit f une fonction et $A(a, f(a))$ un point de sa courbe $\mathcal{C}_f$.

- Si f est dérivable à droite en a, la courbe admet au point A une **demi-tangente à droite** : la demi-droite d'origine A, formée des points d'abscisse $x \geq a$ de la droite d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.
- Si f est dérivable à gauche en a, la courbe admet au point A une **demi-tangente à gauche** : la demi-droite d'origine A, formée des points d'abscisse $x \leq a$ de la droite d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$.
- Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand h tend vers 0 à droite, f n'est pas dérivable à droite en a, et la courbe admet au point A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$. De même à gauche.

Lorsque $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, les deux demi-tangentes ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre : on dit que A est un **point anguleux** de la courbe.

Exemple : un point anguleux

Soit la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par :

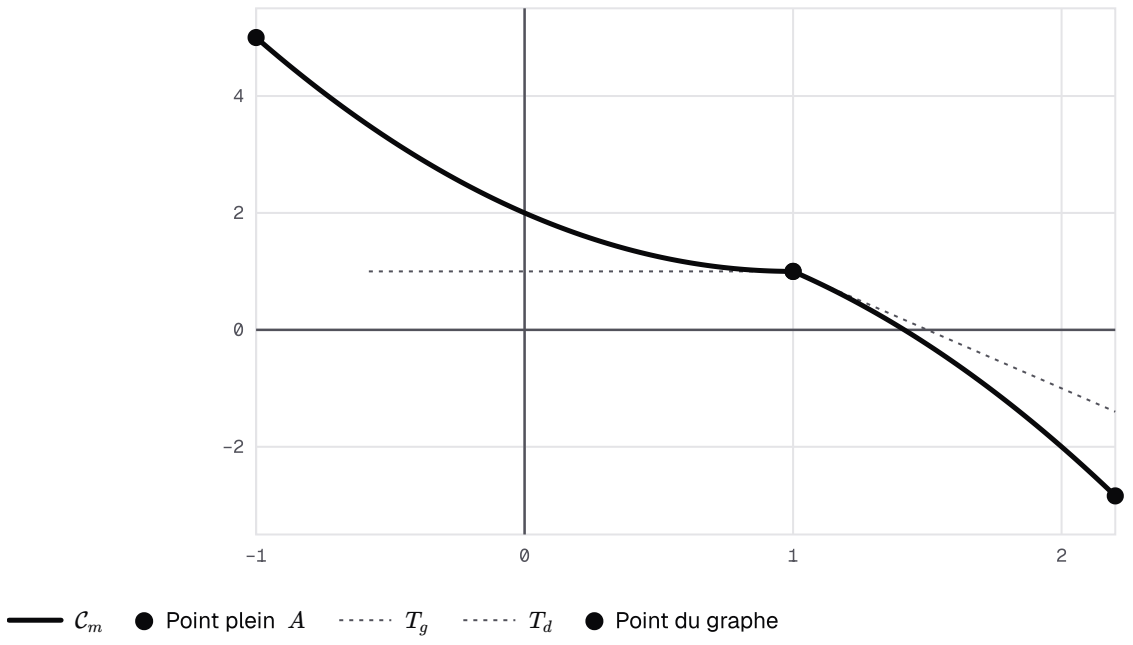
$$m(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $m(1) = 1$.

À gauche. Le taux vaut $\dfrac{h^2}{h} = h$, donc $m'_g(1) = 0$. La demi-tangente à gauche est horizontale, d'équation $y = 1$.

À droite. Le taux vaut $\dfrac{-2h - h^2}{h} = -2 - h$, donc $m'_d(1) = -2$. La demi-tangente à droite est portée par la droite d'équation $y = -2x + 3$.

Conclusion. Comme $0 \neq -2$, le point $A(1, 1)$ est un point anguleux.



Le point anguleux $A(1, 1)$ de la courbe de m et ses deux demi-tangentes.

La demi-tangente verticale

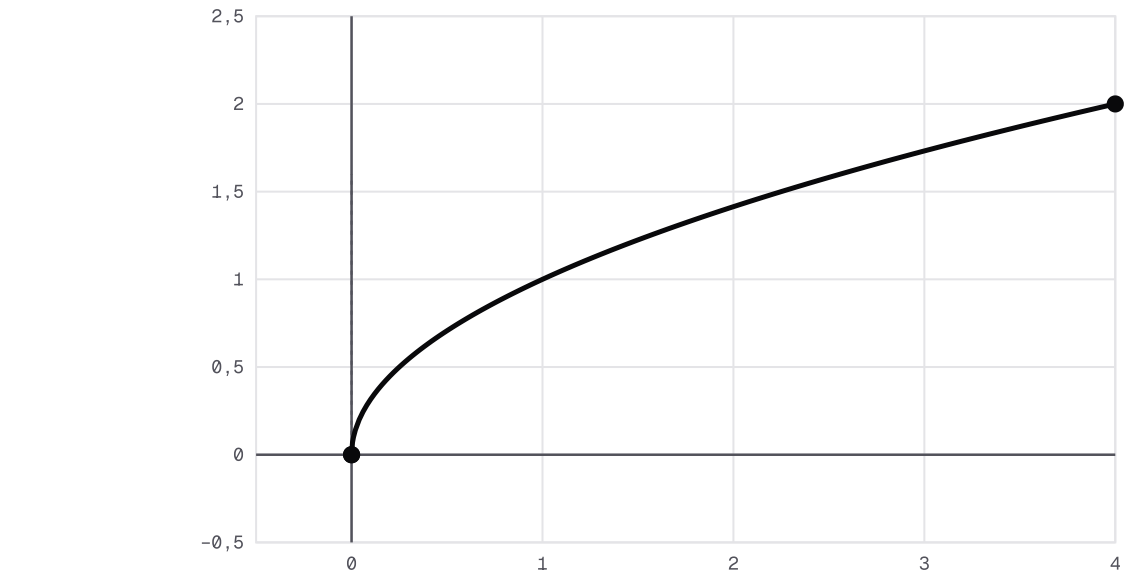
Exemple : la racine carrée en 0

Pour $h > 0$, le taux de $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et h vaut :

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Pour $h = 0{,}04$, il vaut 5 ; pour $h = 0{,}0004$, il vaut 50. Il tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0 à droite.

Il n'existe donc aucun nombre dérivé à droite en 0. La courbe de la racine carrée admet au point $O(0,0)$ une demi-tangente verticale, portée par la droite d'équation $x = 0$.



La courbe de la racine carrée part de O verticalement.

Méthode, piège et entraînement

Méthode : étudier la dérivabilité à droite et à gauche

1. **Écrire** le taux d'accroissement en a avec l'expression valable à droite de a. Chercher sa limite quand h tend vers 0 à droite.
2. **Faire de même** à gauche, avec l'expression valable à gauche de a.
3. **Comparer** et interpréter. Deux limites finies et égales : f est dérivable en a. Deux limites finies et différentes : point anguleux. Une limite infinie : demi-tangente verticale.

Attention : deux côtés ne suffisent pas

✗ « f est dérivable à droite et à gauche en a, donc dérivable en a. »

✓ Il faut aussi $f'_d(a) = f'_g(a)$. Rappel :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Pour $x \mapsto |x-1|$ en 1, le taux vaut donc 1 à droite et -1 à gauche : point anguleux, aucun nombre dérivé.

À toi : Deux demi-tangentes

Soit

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudie la dérivabilité de s à droite et à gauche en 0, puis donne les équations des demi-tangentes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : un taux à droite avec $3x$, un taux à gauche avec $x^2 + x$.
Indice 2
À gauche, $\dfrac{h^2+h}{h} = h+1$; à droite, $\dfrac{3h}{h} = 3$.
Indice 3
Point délicat : compare les deux limites avant de conclure, et précise le côté de chaque demi-tangente.

Réponse
On a $s(0) = 0$.

À gauche. Le taux vaut $h+1$; il tend vers 1, donc $s'_g(0) = 1$.

À droite. Le taux vaut 3, donc $s'_d(0) = 3$.

Comparaison. Les deux limites sont finies et différentes : s n'est pas dérivable en 0, et $O(0,0)$ est un point anguleux.

Demi-tangentes.

- À gauche : la demi-droite d'équation $y = x$, avec $x \leq 0$.
- À droite : la demi-droite d'équation $y = 3x$, avec $x \geq 0$.

Remarque : s est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à droite en 0. La section suivante dira alors que s est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Fonction dérivée et dérivées usuelles

Une fonction dérivée

Reprends le coût des lampes. Pour une quantité q quelconque et pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{C(q+h) - C(q)}{h} &= \frac{2qh + h^2 + 20h}{h} \\ &= 2q + 20 + h. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers $2q + 20$. Ainsi, pour tout q, $C'(q) = 2q + 20$.

À chaque quantité, on associe un coût marginal : c'est une nouvelle fonction.

Vérifie : Le coût marginal à 50 lampes

Avec $C'(q) = 2q + 20$, que vaut le coût marginal pour $q = 50$ lampes ?

A. 100 DH
Faux.
Faux. $2 \times 50 = 100$, mais il faut ajouter 20.

B. $4\,000$ DH
Faux.
Faux. $4\,000$ DH est $C(50)$, le coût total de 50 lampes.

C. 70 DH
Faux.
Faux. Le coefficient 2 de q a été oublié.

D. 120 DH
Juste.
Juste. $C'(50) = 2 \times 50 + 20 = 120$ DH.

Correction
Le coût marginal vaut $C'(50) = 2 \times 50 + 20 = 120$ DH.

Vers 50 lampes, une lampe de plus coûte environ 120 DH ; vers 30 lampes, environ 80 DH.

Définition : Fonction dérivée, dérivée seconde

Soit I un intervalle ouvert. Une fonction f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout réel de I. La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f ; on la note f'.

Une fonction est dérivable sur un intervalle $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b ; on note alors $f'(a) = f'_d(a)$ et $f'(b) = f'_g(b)$ (de même sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$).

Si f' est elle-même dérivable sur I, sa fonction dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de f ; on la note f''. Ainsi $f'' = (f')'$.

Exemple : une dérivée seconde

Pour le coût des lampes, $C'(q) = 2q + 20$. On dérive à nouveau : pour $h \neq 0$,

$$\frac{C'(q+h) - C'(q)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Donc $C''(q) = 2$ pour tout réel q. Ici, le coût marginal augmente de 2 DH par lampe de plus.

Les dérivées usuelles

Tu as déjà calculé plusieurs taux d'accroissement : $2 + h$ pour $x \mapsto x^2$ en 1, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ pour la racine carrée en 0.

En un réel a quelconque, les mêmes calculs donnent des formules générales. Pourquoi est-ce vrai ? Chaque formule vient d'un taux simplifié, puis de sa limite.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Soit k un réel et n un entier naturel, $n \geq 2$. Les fonctions suivantes sont dérivables sur l'intervalle indiqué, et leur fonction dérivée est donnée.

- $x \mapsto k$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 0$.
- $x \mapsto x$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1$.
- $x \mapsto x^n$: dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n\,x^{n-1}$.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$: dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$: dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle n'est pas dérivable à droite en 0.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour chaque fonction, on écrit le taux d'accroissement entre a et $a + h$, on le simplifie pour $h \neq 0$, puis on cherche sa limite quand h tend vers 0. Pour $x \mapsto x^2$, le taux vaut $2a + h$, de limite $2a$. Pour $x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $a \neq 0$, il vaut $-\frac{1}{a(a+h)}$, de limite $-\frac{1}{a^2}$. Pour $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $a > 0$, la quantité conjuguée donne $\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$, de limite $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ d'après les limites usuelles et les opérations sur les limites ; en $a = 0$, pour $h > 0$, le taux vaut $\frac{1}{\sqrt{h}}$ et tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0 à droite. Les constantes et $x \mapsto x$ donnent des taux constants. Le cas général de $x \mapsto x^n$ n'est pas détaillé ici : il est admis.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque formule suit la même recette : écrire le taux, le simplifier pour $h \neq 0$, puis passer à la limite.

Pour la racine carrée, le numérateur du taux est $\sqrt{a+h} - \sqrt{a}$. On multiplie par sa **quantité conjuguée** $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$: l'identité $(p - q)(p + q) = p^2 - q^2$ fait disparaître les racines.

Le cas général de $x \mapsto x^n$ est admis.

Vérifie : Le taux de l'inverse

Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ avec $a \neq 0$, quel est le taux d'accroissement simplifié, pour $h \neq 0$?

A. $-\dfrac{1}{a^2}$

Faux.

Faux. C'est la limite du taux, pas le taux lui-même.

B. $-\dfrac{1}{a(a+h)}$

Juste.

Juste. $\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-h}{a(a+h)}$, puis on divise par h.

C. $\dfrac{1}{a(a+h)}$

Faux.

Faux. Le signe moins est perdu : $a - (a+h) = -h$.

D. $\dfrac{-h}{a(a+h)}$

Faux.

Faux. Il reste à diviser par h.

Correction

Pour $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} &= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)}. \end{aligned}$$

On divise par h : le taux vaut $-\dfrac{1}{a(a+h)}$. Sa limite en 0 est $-\dfrac{1}{a^2}$.

Exemple : trois dérivées usuelles

D'après les dérivées des fonctions usuelles :

- si $f(x) = x^5$ pour tout réel x, alors $f'(x) = 5x^4$, donc $f'(-1) = 5$;
- la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour nombre dérivé en 2 le réel $-\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$;
- la racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour nombre dérivé en 9 le réel $\dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$.

Somme et produit par un réel

Une entreprise fictive a deux postes de coût : la matière et le transport. Chacun augmente à sa propre vitesse.

Le coût total augmente alors à la somme des deux vitesses. Pourquoi est-ce vrai ? Le taux d'accroissement d'une somme est la somme des deux taux.

Propriété : Dérivée d'une somme et d'un produit par un réel

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et λ un réel. Les fonctions $f+g$ et λf sont dérivables sur I, et

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda\, f'.$$

Démonstration

Étape 1. Soit a un réel de I et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Le taux d'accroissement de $f+g$ entre a et $a+h$ s'écrit

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

Étape 2. Quand h tend vers 0, les deux taux du second membre tendent vers $f'(a)$ et vers $g'(a)$, car f et g sont dérivables en a. D'après les opérations sur les limites (limite d'une somme), le taux de $f+g$ tend vers $f'(a)+g'(a)$.

Étape 3. De même, le taux de λf entre a et $a+h$ vaut $\lambda \times \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; il tend vers $\lambda\, f'(a)$. Ces égalités valent pour tout réel a de I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit le taux de $f+g$ comme la somme des taux de f et de g. Ensuite, la limite d'une somme est la somme des limites.

Pour λf, le réel λ sort du taux, puis de la limite.

Vérifie : La propriété des limites

Quelle propriété des limites sert à la deuxième étape de la preuve ?

A. La limite d'un produit.
Faux.
Faux. Aucun produit de deux taux n'apparaît : le taux de $f+g$ est une somme.

B. La limite d'un quotient.
Faux.
Faux. On ne divise pas un taux par un autre.

C. La limite d'une racine.

Faux.

Faux. Aucune racine n'intervient dans cette preuve.

D. La limite d'une somme.

Juste.

Juste. Le taux de $f+g$ est la somme de deux taux qui tendent vers $f'(a)$ et $g'(a)$.

Correction

La preuve écrit le taux de $f+g$ comme la somme des taux de f et de g, qui tendent vers $f'(a)$ et $g'(a)$.

D'après la limite d'une somme, le taux de $f+g$ tend donc vers $f'(a)+g'(a)$.

Dériver un polynôme

Exemple : dériver un polynôme

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=4x^3-5x^2+7x-2$.

On dérive chaque terme avec les dérivées usuelles ; chaque coefficient reste en facteur et les termes s'ajoutent. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4\times 3x^{2}-5\times 2x+7 \\ &= 12x^2-10x+7. \end{aligned}$$

On dérive encore : $p''(x)=24x-10$.

Par exemple, $p'(1)=9$ et $p''(1)=14$.

À toi : Coût marginal d'une autre entreprise

Une entreprise fictive a un coût total $K(q)=0{,}01q^3-0{,}6q^2+15q+200$ en DH. Calcule $K'(q)$, puis $K''(q)$. Donne le coût marginal pour $q=20$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Dérive terme à terme : dérivées usuelles, somme et produit par un réel.

Indice 2

$(0{,}01q^3)'=0{,}03q^2$ et $(-0{,}6q^2)'=-1{,}2q$.

Indice 3

Point délicat : la constante 200 a pour dérivée 0, et K'' est la dérivée de K', pas de K.

Réponse

Dérivées. Terme à terme, pour tout q :

$$\begin{aligned} &K'(q) \\ &=0{,}03q^2-1{,}2q+15, \end{aligned}$$

$$K''(q) = 0{,}06q - 1{,}2.$$

Coût marginal pour $q = 20$.

$$\begin{aligned} &K'(20) \\ &= 0{,}03 \times 400 \\ &\quad - 1{,}2 \times 20 + 15 \\ &= 12 - 24 + 15 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coût marginal vaut 3 DH : vers 20 objets, un objet de plus coûte environ 3 DH.

Dérivées et opérations

Produit et quotient

Devine : Dériver un produit

Une recette est un produit : prix unitaire fois quantité vendue. Pour dériver un produit, une idée vient vite : multiplier les dérivées. Teste-la avec $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$, dont le produit est $x \mapsto x^5$. Que vaut $(fg)'(x)$?

A. $6x^3$, le produit des dérivées

Faux.

Faux. $2x \times 3x^2 = 6x^3$, mais $(x^5)' = 5x^4$: le produit des dérivées ne convient pas.

B. $5x^4$

Juste.

Juste. fg est la fonction $x \mapsto x^5$, de dérivée $5x^4$ d'après les dérivées usuelles.

C. x^4

Faux.

Faux. L'exposant baisse de 1, mais le coefficient 5 manque.

Correction

Pour tout réel x, $f(x)g(x) = x^5$, donc $(fg)'(x) = 5x^4$.

Le produit des dérivées donne $6x^3$: ce n'est pas la bonne règle.

La bonne règle suit : $(fg)' = f'g + fg'$. Ici, on retrouve bien

$$2x \times x^3 + x^2 \times 3x^2 = 5x^4.$$

Propriété : Dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.

- La fonction fg est dérivable sur I, et $(fg)' = f'g + fg'$.

- Si g ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I, et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En conséquence, toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Sa preuve demande un outil que ton programme ne traite pas cette année.

Tu l'utilises comme une règle de calcul.

Exemple : un produit et un quotient

Un produit. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^2-3) \\ &\quad + (2x+1)\times 2x \\ &= 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x \\ &= 6x^2 + 2x - 6. \end{aligned}$$

Un quotient. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ sur $]-4, +\infty[$, où $x+4 \neq 0$. D'après la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(x+4) - (2x+3)\times 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{5}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

Attention : produit et quotient

✗ $(fg)' = f' \times g'$, ou un numérateur $fg' - f'g$ dans la dérivée d'un quotient.

✓ $(fg)' = f'g + fg'$. Pour un quotient, le numérateur est $f'g - fg'$, dans cet ordre, et le dénominateur est g^2.

Avec le mauvais ordre, $g'(x)$ ci-dessus deviendrait $-\dfrac{5}{(x+4)^2}$: le signe change.

Les puissances

Propriété : Dérivée d'une puissance

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et n un entier relatif non nul. On note f^n la fonction $x \mapsto \big(f(x)\big)^n$.

- Si $n \geq 1$, la fonction f^n est dérivable sur I.
- Si $n \leq -1$ et si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I.

Dans les deux cas, $(f^n)' = n\,f'\,f^{n-1}$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il se déduit des dérivées d'un produit et d'un inverse, elles-mêmes admises.

Exemple : une puissance positive, une puissance négative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x)^2$. Avec $n = 2$, pour tout réel x : $f'(x) = 2(2x - 3)(x^2 - 3x)$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3},$$

car $x^2 + 1$ ne s'annule pas. Avec $n = -3$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3 \times 2x \times (x^2+1)^{-4} \\ &= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}. \end{aligned}$$

Une fonction de ax + b

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$, et f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On note J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J, et pour tout réel x de J,

$$g'(x) = a\,f'(ax + b).$$

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis.

Retiens le facteur a devant : la vitesse de variation est multipliée par a.

Exemple : un facteur à ne pas oublier

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (5-2x)^3$. On pose $f : x \mapsto x^3$, $a = -2$ et $b = 5$, de sorte que $k(x) = f(ax+b)$.

D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= -2 \times 3(5-2x)^2 \\ &= -6(5-2x)^2. \end{aligned}$$

De même, $x \mapsto \dfrac{1}{4x+1}$ a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{4}{(4x+1)^2}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

La racine carrée d'une fonction

Propriété : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle ouvert I. La fonction $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur I, et

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis.

Avant de l'appliquer, vérifie que l'expression sous la racine est strictement positive sur l'intervalle.

Exemple : une racine carrée

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = \sqrt{x^2+9}$. Pour tout réel x, $x^2+9 > 0$.

D'après la dérivée de la racine carrée d'une fonction, r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$r'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Par exemple, $r'(4) = \dfrac{4}{5}$.

Attention : là où la racine s'annule

✗ Appliquer $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ en un réel où f s'annule : le dénominateur serait nul.

✓ La formule ne vaut que là où f est **strictement positive**. Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x-2}$ se dérive par cette formule sur $]2, +\infty[$ seulement.

En 2, on étudie le taux d'accroissement à droite.

La méthode

Méthode : calculer une fonction dérivée

1. **Reconnaître** la forme : somme, produit par un réel, produit, inverse, quotient, puissance, $x \mapsto f(ax+b)$ ou racine carrée d'une fonction.
2. **Préciser** l'intervalle où la formule s'applique : dénominateur non nul, expression sous la racine strictement positive.
3. **Appliquer** la formule, puis simplifier ou factoriser pour étudier le signe.

À toi : Le coût moyen d'une lampe

Le coût moyen d'une lampe vaut $M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{q^2+20q+500}{q}$, pour $q > 0$. Calcule $M'(q)$ avec la dérivée d'un quotient, puis $M'(10)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le numérateur $q^2+20q+500$ a pour dérivée $2q+20$; le dénominateur q a pour dérivée 1.

Indice 2

$M'(q) = \dfrac{(2q+20)q - (q^2+20q+500)}{q^2}$.

Indice 3

Point délicat : développe le numérateur avec soin ; les termes en $20q$ se compensent.

Réponse

D'après la dérivée d'un quotient, pour tout q de $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} M'(q) &= \frac{(2q+20)q}{q^2} - \frac{q^2+20q+500}{q^2} \\ &= \frac{q^2-500}{q^2}. \end{aligned}$$

Pour $q = 10$:

$$\begin{aligned} M'(10) &= \frac{100-500}{100} \\ &= -4. \end{aligned}$$

Vers 10 lampes, le coût moyen baisse quand la production augmente.

Signe de la dérivée et variations

Ce que disent les tangentes

Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $w(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Sa dérivée vaut $w'(x) = 3x^2 - 6x$.

En -1, 1 et 3, elle vaut 9, -3 et 9 : ce sont les coefficients directeurs des tangentes en ces points.

Une tangente qui monte suggère une courbe qui monte. Une tangente qui descend suggère une courbe qui descend.

Devine : Où la courbe descend

Sur quel intervalle penses-tu que w décroît ? Aide-toi du signe de $w'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

A. $[0, 2]$
Juste.
Juste. $w'(x) \leq 0$ entre 0 et 2 : les tangentes y descendent.

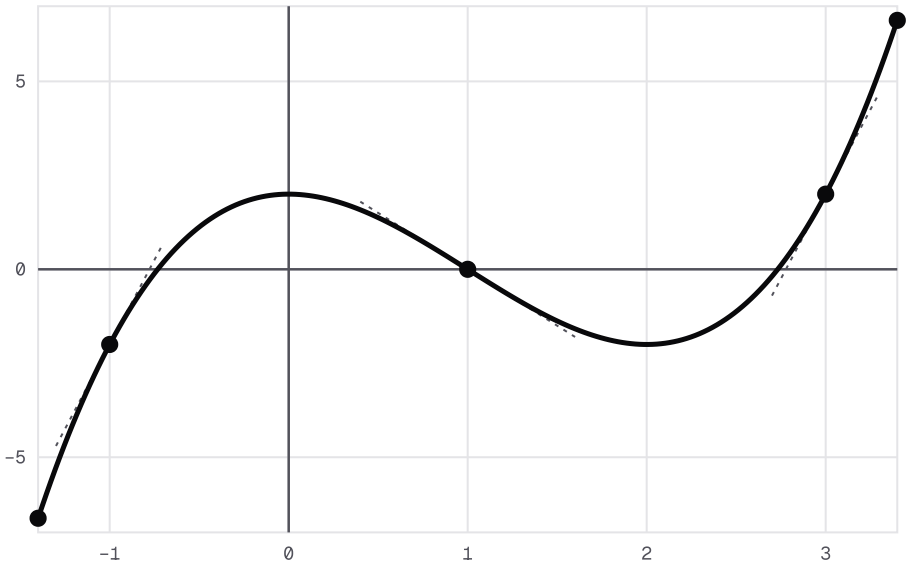
B. $[1, +\infty[$
Faux.
Faux. Pour $x = 3$, $w'(3) = 9 > 0$: la courbe monte.

C. $]-\infty, 1]$
Faux.
Faux. Pour $x = -1$, $w'(-1) = 9 > 0$: la courbe monte.

D. Aucun intervalle
Faux.
Faux. En 1, la tangente a pour coefficient directeur -3 : la courbe descend.

Correction
Pour tout réel x, $w'(x) = 3x(x-2)$: elle est négative entre 0 et 2, positive ailleurs.

La figure confirme : w décroît sur $[0, 2]$ et croît de part et d'autre. Le théorème qui suit transforme cette intuition en règle.



La courbe de w et ses tangentes en -1, 1 et 3.

Le théorème

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I. Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, si $f' < 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Réciproquement, si f est croissante sur I, alors $f' \geq 0$ sur I ; si f est décroissante sur I, alors $f' \leq 0$ sur I.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. La figure des tangentes en donne l'idée ; elle ne le démontre pas.

Pour l'utiliser, cite ses hypothèses : f dérivable sur un intervalle, et le signe de f' sur cet intervalle.

Exemple : un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$. C'est un polynôme, donc f est dérivable et, pour tout x de $[0, 3]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe. Rappel : un trinôme $a(x-x_1)(x-x_2)$ a le signe de a hors de ses racines, le signe contraire entre elles. Ici $a = 6 > 0$:

- $f'(x) > 0$ sur $[0, 1[$ et sur $]2, 3]$;
- $f'(x) < 0$ sur $]1, 2[$.

Variations. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, 2]$, puis croissante sur $[2, 3]$.

Valeurs. On calcule $f(0) = -4$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$ et $f(3) = 5$.

Variations de f sur $[0, 3]$.

x	0		1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-4	↗	1	↘	0	↗	5

Une fonction rationnelle

Exemple : une fonction rationnelle

Soit g la fonction définie sur $[-3, 3]$ par $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; son dénominateur ne s'annule pas. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout x de $[-3, 3]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : $g'(x)$ a le signe de $1 - x^2$. Il est positif sur $]-1, 1[$, négatif sur $[-3, -1[$ et sur $]1, 3]$.

Variations. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, g décroît sur $[-3, -1]$, croît sur $[-1, 1]$, puis décroît sur $[1, 3]$.

Variations de g sur $[-3, 3]$.

x	-3		-1		1		3
$g'(x)$		–	0	+	0	–	
$g(x)$	$-\frac{3}{10}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

Méthode et entraînement

Méthode : étudier les variations d'une fonction

1. **Déterminer** l'ensemble de définition et l'intervalle où f est dérivable.
2. **Calculer** $f'(x)$ et l'écrire sous une forme dont le signe se lit : produit de facteurs, trinôme, quotient de signe connu.
3. **Étudier** le signe de $f'(x)$, puis **dresser** le tableau de variations, en citant le théorème liant le signe de la dérivée et les variations.

Vérifie : Lire le signe d'un quotient

Sur $]0, +\infty[$, une fonction f vérifie $f'(x) = \dfrac{x-4}{x^2}$. Que peut-on dire de f ?

A. f est croissante sur $]0, +\infty[$.
Faux.
Faux. Pour $x = 1$, $f'(1) = -3 < 0$.

B. f décroît sur $]0, 4]$, puis croît sur $[4, +\infty[$.
Juste.
Juste. $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 4$.

C. f croît sur $]0, 4]$, puis décroît sur $[4, +\infty[$.
Faux.
Faux. $x - 4$ est négatif avant 4 : f commence par décroître.

D. On ne peut rien dire sans connaître $f(x)$.
Faux.
Faux. Le théorème n'a besoin que du signe de f' sur un intervalle.

Correction
Sur $]0, +\infty[$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 4$: négatif sur $]0, 4[$, positif sur $]4, +\infty[$.

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, f est décroissante sur $]0, 4]$ et croissante sur $[4, +\infty[$.

À toi : Un tableau de variations

Étudie les variations et dresse le tableau de variations de $k(x) = 2x^3 - 6x + 1$ sur $[-2, 2]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $k'(x)$ et factorise-la.
Indice 2
$k'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$.
Indice 3
Point délicat : calcule les images de -2, -1, 1 et 2, puis cite le théorème.

Réponse
Dérivée. k est un polynôme, dérivable sur $[-2, 2]$. Pour tout x de $[-2, 2]$:

$$k'(x) = 6(x-1)(x+1).$$

Signe.

- $k'(x) > 0$ sur $[-2, -1[$ et sur $]1, 2]$;
- $k'(x) < 0$ sur $]-1, 1[$.

Variations. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, k est croissante sur $[-2, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, puis croissante sur $[1, 2]$.

Valeurs. $k(-2) = -3$, $k(-1) = 5$, $k(1) = -3$ et $k(2) = 5$.

Extremums et optimisation

Le sommet d'un bénéfice

L'entreprise de lampes vend chaque lampe 120 DH ; ses données restent fictives. Pour q lampes, sa recette vaut $120q$.

Son **bénéfice** est la recette moins le coût :

$$\begin{aligned} B(q) &= 120q - (q^2 + 20q + 500) \\ &= -q^2 + 100q - 500. \end{aligned}$$

On a $B(40) = 1\,900$, $B(50) = 2\,000$ et $B(60) = 1\,900$ DH.

Devine : Au sommet

Le bénéfice semble atteindre un sommet vers $q = 50$. Que vaut, selon toi, le nombre dérivé $B'(50)$?

A. $2\,000$
Faux.
Faux. $2\,000$ DH est la valeur $B(50)$, pas un nombre dérivé.

B. 100

Faux.

Faux. 100 est le coefficient de q ; le terme $-q^2$ compte aussi.

C. -100

Faux.

Faux. Un nombre dérivé négatif signalerait un bénéfice en baisse en 50.

D. 0

Juste.

Juste. $B'(q) = -2q + 100$, donc $B'(50) = 0$: la tangente au sommet est horizontale.

Correction

Pour tout q, $B'(q) = -2q + 100$, donc $B'(50) = 0$.

Au sommet de la courbe, la tangente est horizontale. Ce lien entre extremum et dérivée nulle est l'objet de cette section.

Maximum et minimum local

Définition : Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- On dit que $f(a)$ est un **maximum local** de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que, pour tout réel x de J, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que $f(a)$ est un **minimum local** de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que, pour tout réel x de J, $f(x) \geq f(a)$.

Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local. Le maximum (le minimum) de f sur I tout entier, s'il existe, est aussi un maximum (un minimum) local.

Exemple : un maximum qui reste local

Reprends la fonction $w : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ de la section précédente.

- Pour tout x de $]-1, 1[$, $w(x) \leq w(0) = 2$: 2 est un maximum local de w.
- Pour tout x de $]1, 3[$, $w(x) \geq w(2) = -2$: -2 est un minimum local de w.

Mais 2 n'est pas le maximum de w sur $\mathbb{R}$, car $w(4) = 18$.

Dérivée nulle et extremum

Au sommet d'une courbe, tout point voisin est plus bas. À gauche, les taux d'accroissement sont positifs ou nuls ; à droite, ils sont négatifs ou nuls. Leur limite commune ne peut être que 0.

Pourquoi est-ce vrai ? L'idée de la preuve suit exactement ce raisonnement.

Propriété : Dérivée et extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

1. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
2. Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f : c'est un maximum local si f' est positive à gauche de a et négative à droite, un minimum local si f' est négative à gauche de a et positive à droite.

Démonstration

Idée de la preuve. Point 1, pour un maximum local : sur un intervalle ouvert autour de a, $f(a+h) - f(a) \leq 0$. Le taux d'accroissement est donc négatif ou nul pour $h > 0$, positif ou nul pour $h < 0$. En passant à la limite quand h tend vers 0 (limites et ordre, chapitre des limites, détail non repris ici), on obtient $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$, donc $f'(a) = 0$. Point 2, si $f' \geq 0$ sur $]a-r, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+r[$: d'après le théorème liant signe de la dérivée et variations, admis, appliqué sur ces deux intervalles qui contiennent a, f est croissante sur le premier et décroissante sur le second, donc $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de $]a-r, a+r[$. Le cas du minimum est symétrique.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour le premier point, on compare le signe des taux d'accroissement de part et d'autre de a, puis on passe à la limite.

Pour le second, on utilise le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, qui est admis.

L'esquisse ne justifie pas pourquoi des taux positifs ou nuls ont une limite positive ou nulle.

Vérifie : Le second point

Dans l'idée de la preuve, quel résultat donne le second point : « f' positive à gauche de a et négative à droite, donc maximum local » ?

A. Le théorème liant le signe de la dérivée et les variations.

Juste.
Juste. f est croissante sur $]a-r, a]$ et décroissante sur $[a, a+r[$, deux intervalles qui contiennent a : donc $f(x) \leq f(a)$ autour de a.

B. Le passage à la limite dans une inégalité.

Faux.
Faux. Ce passage sert au premier point, pas au second.

C. L'équation de la tangente en a.

Faux.

Faux. L'équation de la tangente n'intervient pas dans cette idée de preuve.

D. L'approximation affine en a.

Faux.

Faux. L'approximation affine donne des valeurs proches, pas une comparaison avec $f(a)$.

Correction

Le second point emploie le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, qui est admis.

Supposons $f' \geq 0$ sur $]a-r, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+r[$. Le théorème donne : f est croissante sur $]a-r, a]$ et décroissante sur $[a, a+r[$.

Ces deux intervalles contiennent a : donc $f(x) \leq f(a)$ autour de a, et $f(a)$ est un maximum local.

Exemple : deux extremums locaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

- f' s'annule en 1 en passant du positif au négatif : $f(1) = 4$ est un maximum local.
- f' s'annule en 3 en passant du négatif au positif : $f(3) = 0$ est un minimum local.

Un piège

Attention : une dérivée nulle ne suffit pas

✗ « $f'(a) = 0$, donc $f(a)$ est un extremum local. »

✓ Il faut aussi que f' **change de signe** en a.

Pour $x \mapsto x^3$, la dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: aucun extremum en 0.

Trouve l'erreur : La copie de Karim

Karim étudie $g(x) = (x-2)^3 + 1$. Il écrit : « $g'(x) = 3(x-2)^2$, donc $g'(2) = 0$. Ainsi $g(2) = 1$ est un extremum local. » Que penses-tu de sa copie ?

A. Sa dérivée est fausse.

Faux.

Faux. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, $g'(x) = 3(x-2)^2$: elle est juste.

B. $g(2)$ ne vaut pas 1.

Faux.

Faux. $g(2) = 0 + 1 = 1$.

C. g' ne change pas de signe en 2.

Juste.

Juste. $3(x-2)^2 > 0$ sauf en 2 : g est strictement croissante.

D. Sa conclusion est juste.

Faux.

Faux. $g(3) = 2 > 1$ et $g(1) = 0 < 1$: $g(2)$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Correction

Pour tout réel x, $g'(x) = 3(x-2)^2$: elle s'annule en 2, mais reste strictement positive ailleurs.

D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il n'y a donc aucun extremum local en 2.

Un problème de bénéfice

Exemple : le bénéfice maximal

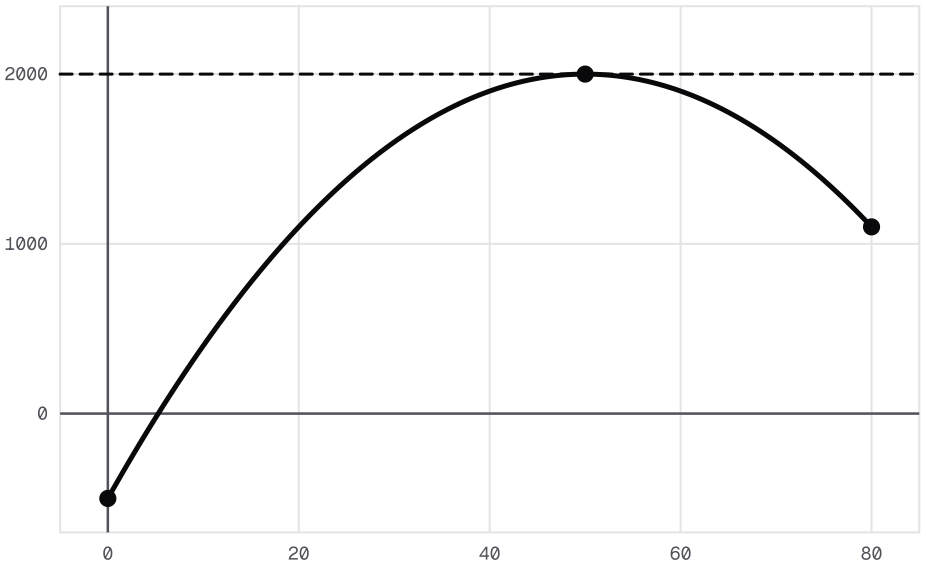
L'atelier produit au plus 80 lampes : $q \in [0, 80]$. La fonction B est un polynôme, donc dérivable, et $B'(q) = 2(50 - q)$ pour tout q de $[0, 80]$.

Signe. $B'(q) > 0$ sur $[0, 50[$ et $B'(q) < 0$ sur $]50, 80]$.

Variations. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, B croît sur $[0, 50]$, puis décroît sur $[50, 80]$.

Conclusion. Le bénéfice est maximal pour 50 lampes ; il vaut alors $B(50) = 2\,000$ DH.

En ce point, la recette marginale $R'(50) = 120$ égale le coût marginal $C'(50) = 120$.



Le bénéfice B sur [0, 80] : la courbe monte jusqu'à 2 000 DH pour 50 lampes, puis redescend ; au sommet, la tangente, en pointillés, est horizontale.

Variations du bénéfice B sur $[0, 80]$.

q	0		50		80
$B'(q)$		+	0	–	
$B(q)$	-500	↗	$2\,000$	↘	$1\,100$

Méthode : résoudre un problème d'optimisation

1. **Choisir** la variable et son intervalle. Exprimer la grandeur à optimiser (coût, recette, bénéfice) comme une fonction de cette variable.
2. **Étudier** le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations.
3. **Lire** l'extremum dans le tableau. Répondre à la question par une phrase, avec les unités.

À toi : Le coût moyen le plus bas

Une entreprise fictive a un coût moyen par objet $D(q) = \frac{q}{4} + 10 + \frac{100}{q}$ en DH, pour $q > 0$ objets. Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal ? Que vaut-il alors ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : calcule $D'(q)$ sur $]0, +\infty[$ et mets-la au même dénominateur.

Indice 2

$D'(q) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{100}{q^2} = \dfrac{q^2 - 400}{4q^2}$.

Indice 3

Point délicat : $q^2 - 400 = (q - 20)(q + 20)$ et $q + 20 > 0$; le signe de $D'(q)$ est donc celui de $q - 20$.

Réponse

Dérivée. Pour tout q de $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} & D'(q) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{100}{q^2} \\ &= \frac{(q-20)(q+20)}{4q^2}. \end{aligned}$$

Signe. Sur $]0, +\infty[$, $4q^2 > 0$ et $q + 20 > 0$: $D'(q)$ a le signe de $q - 20$, négatif sur $]0, 20[$, positif sur $]20, +\infty[$.

Variations. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, D décroît sur $]0, 20]$ puis croît sur $[20, +\infty[$.

Conclusion. Le coût moyen est minimal pour 20 objets : $D(20) = 5 + 10 + 5 = 20$ DH par objet.

Synthèse

À retenir : L'essentiel du chapitre

- Le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite finie du taux d'accroissement.
- La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Pour h voisin de 0, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$.
- Si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égales, f est dérivable en a.
- Les formules donnent f' et f'' sans repasser par les limites.
- Le signe de f' donne les variations ; si f' s'annule en a en changeant de signe, $f(a)$ est un extremum local.

Avec ces outils, tu sais étudier une fonction de l'économie : coût, recette, bénéfice.

Au chapitre suivant, tu les réuniras pour étudier une fonction complète et tracer sa courbe.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivabilité » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)