BURHAN

Dénombrement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/denombrement/resume

Chapitre	Semestre
Dénombrement	Semestre 2

Ensembles finis et cardinal

Remarque : Petit rappel de vocabulaire

- $A \cap B$ (intersection) : les éléments communs à A et à B.
- $A \cup B$ (réunion) : les éléments qui sont dans A, dans B, ou dans les deux.

A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$. Le **complémentaire** $\overline{A}$ de A dans E regroupe les éléments de E qui ne sont pas dans A.

Le principe additif, ci-dessous, et le principe général du dénombrement, à la section suivante, sont admis : tu les cites sans les prouver.

Définition : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est **fini** s'il est vide, ou s'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on puisse numéroter ses éléments de 1 à n, chaque élément recevant un seul numéro et chaque numéro étant employé une seule fois.

L'entier n s'appelle alors le **cardinal** de E : c'est le nombre d'éléments de E. On le note $\mathrm{card}(E)$. Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

Propriété : Principe additif

Soit A et B deux ensembles finis **disjoints**, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A \cup B)\\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B).\end{aligned}$$

Plus généralement, si A_1, A_2, ..., A_p sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p)\\ &= \mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2)\\ &\quad + \cdots + \mathrm{card}(A_p).\end{aligned}$$

Propriété : Cardinal du complémentaire et de la réunion

Soit E un ensemble fini, et A et B deux parties de E.

- Le **complémentaire** $\overline{A}$ de A dans E (ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A) vérifie

$$\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A).$$

- La réunion de A et B vérifie

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A \cup B)\\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)\\ &\quad - \mathrm{card}(A \cap B).\end{aligned}$$

Exemple

Une épicerie fine référence 30 produits (données fictives). Parmi eux, 12 sont bio (ensemble A), 9 sont en promotion (ensemble B), et 4 sont à la fois bio et en promotion.

- Bio ou en promotion : $\mathrm{card}(A \cup B) = 12 + 9 - 4 = 17$.
- Ni bio ni en promotion : c'est le complémentaire de $A \cup B$, donc $30 - 17 = 13$ produits.
- Bio mais pas en promotion : $12 - 4 = 8$ produits.

Attention : Ne compte pas deux fois l'intersection

Dans l'épicerie, $12 + 9 = 21$ dépasse le vrai nombre 17 : les 4 produits bio en promotion sont comptés deux fois. On additionne directement les cardinaux seulement pour des ensembles **disjoints**. Sinon, on retire $\mathrm{card}(A \cap B)$.

Méthode : Passer par le contraire, ou découper en cas

1. **Repère les mots « au moins »** : compte d'abord le contraire, « aucun », puis retire-le du total.
2. **Découpe** une situation à plusieurs cas en cas qui ne se recouvrent pas : « exactement 0 », « exactement 1 », et ainsi de suite.
3. **Additionne** les nombres trouvés, grâce au principe additif.
4. **Contrôle** : chaque situation doit tomber dans un cas, et dans un seul.

Principe général, arbre de choix, p-listes

Propriété : Principe général du dénombrement

On considère une situation qui se réalise par p choix successifs ($p \geq 2$). On suppose que :

- le premier choix peut se faire de n_1 façons ;
- pour chaque façon de faire le premier choix, le deuxième peut se faire de n_2 façons ;

- et ainsi de suite : pour chaque façon de faire les choix précédents, le p-ième choix peut se faire de n_p façons.

Alors le nombre total de façons de réaliser la situation est

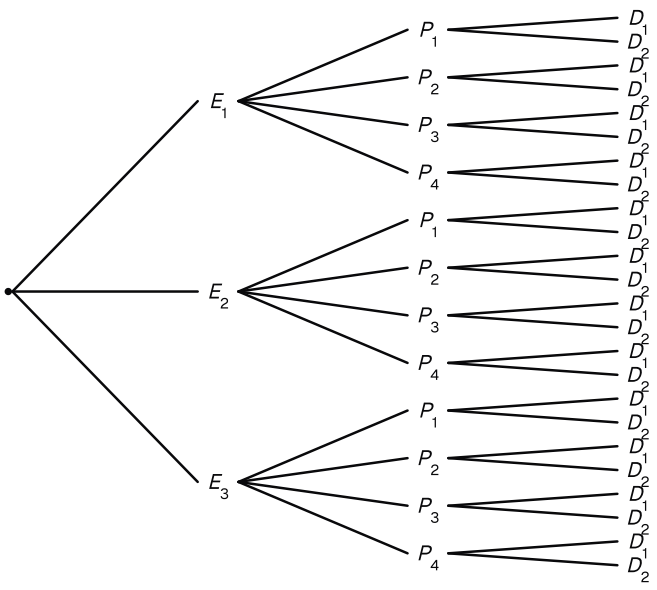
$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Exemple

La cantine d'une entreprise propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts (exemple fictif).

Arbre de choix : premier choix, l'entrée (3 branches) ; pour chaque entrée, le plat (4 branches) ; pour chaque plat, le dessert (2 branches).

Un menu est un chemin de l'arbre. D'après le principe général du dénombrement, il y a $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus. Dessine les premières branches sur ton cahier pour le vérifier.



Tous les menus de la cantine : trois entrées E, quatre plats P sous chacune, deux desserts D sous chaque plat, soit 24 bouts de branches.

Méthode : Compter avec un arbre de choix

1. **Découpe** la situation en une suite de choix, faits dans un ordre que tu fixes.
2. **Esquisse** l'arbre : une branche pour chaque façon de faire un choix.
3. **Vérifie** que chaque choix a le même nombre de branches, quel que soit le chemin déjà suivi.
4. **Multiplie** ces nombres si c'est le cas. Sinon, compte les chemins sous chaque branche, puis **additionne**.

Exemple

Une marque de jus (exemple fictif) vend une bouteille en 4 parfums, une brique en 3 parfums et une canette en 2 parfums. Le nombre de parfums dépend du format : on ne peut pas multiplier. On compte les chemins branche par branche : $4 + 3 + 2 = 9$ produits.

Propriété : Cardinal d'un produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Alors

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(E \times F)\\&= \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).\end{aligned}$$

Plus généralement, si E a n éléments et si p est un entier naturel non nul, une **p-liste** d'éléments de E est une suite ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, distincts ou non. L'ensemble E^p des p-listes d'éléments de E vérifie

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p.$$

Exemple

Une tenue de travail associe une chemise parmi 4 et un pantalon parmi 3 (exemple fictif) : c'est un couple du produit cartésien, d'où $4 \times 3 = 12$ tenues.

Un questionnaire de satisfaction a 5 questions, chacune à 3 réponses : oui, non, sans avis. Une fiche remplie est une 5-liste de l'ensemble des 3 réponses : il y a $3^5 = 243$ fiches possibles.

Arrangements et permutations

Définition : Factorielle, arrangement

Pour tout entier naturel non nul n, la **factorielle** de n est le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. Dans un arrangement, l'ordre compte et aucun élément n'est répété. Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments se note A_n^p.

Propriété : Nombre d'arrangements

Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Alors

$$\begin{aligned} A_n^p &= n \times (n-1) \times \dots \\ &\quad \times (n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Le premier produit compte p facteurs.

Exemple

Neuf boutiques (exemple fictif) concourent pour la plus belle vitrine. Le palmarès nomme un gagnant, un deuxième et un troisième : l'ordre compte, et aucune boutique ne figure deux fois au palmarès.

Un palmarès est donc un arrangement de 3 boutiques parmi les 9 boutiques :

$$A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504.$$

Avec les factorielles :

$$\frac{9!}{6!} = \frac{362\,880}{720} = 504.$$

Propriété : Nombre de permutations

Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E : c'est une façon de ranger tous les éléments de E dans un ordre. Le nombre de permutations de E est

$$n!.$$

Exemple

Premières factorielles : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$.

Ranger 5 produits différents sur une étagère, c'est former une permutation de ces 5 produits : $5! = 120$ rangements.

Astuce de calcul : $n! = n \times (n-1)!$, par exemple $7! = 7 \times 720 = 5040$.

Attention : Zéro factorielle vaut un

$0! = 1$, et non 0. Sans cette convention, la formule $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ne marcherait pas pour $p = n$. Avec $n = 6$:

$$\begin{aligned} A_6^6 &= \frac{6!}{0!} = \frac{720}{1} \\ &= 720 = 6!. \end{aligned}$$

Écrire $0! = 0$ ferait diviser par zéro.

Combinaisons

Définition : Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une **partie** de E qui a p éléments. Dans une combinaison, l'ordre ne compte pas et aucun élément n'est répété.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments se note C_n^p.

Propriété : Nombre de combinaisons

Soit n un entier naturel non nul et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Alors

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

En particulier, pour $1 \leq p \leq n$, $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Exemple

Un service qualité choisit 4 produits parmi 11 pour un test (exemple fictif). L'ordre ne compte pas et aucun produit n'est pris deux fois : c'est une combinaison.

$$\begin{aligned} C_{11}^4 &= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4!} \\ &= \frac{7920}{24} \\ &= 330. \end{aligned}$$

Il y a donc 330 échantillons possibles.

Attention : L'ordre compte-t-il ?

Dans une équipe fictive de 12 personnes, désigner un chef et un adjoint donne $A_{12}^2 = 12 \times 11 = 132$ choix : les deux postes sont différents.

Désigner **deux représentants** au même rôle donne $C_{12}^2 = \dfrac{132}{2} = 66$ choix. On divise par $2! = 2$ seulement quand l'ordre ne compte pas.

Exemple

Un comité de 3 personnes est choisi dans un groupe fictif de 5 femmes et 6 hommes.

- En tout : $C_{11}^3 = 165$ comités.
- Sans femme : $C_6^3 = 20$ comités.

- Avec au moins une femme, par le complémentaire : $165 - 20 = 145$ comités.

Attention : « Au moins une » n'est pas « exactement une »

Dans le comité précédent, les choix à exactement une femme sont $5 \times C_6^2 = 5 \times 15 = 75$, et non 145.

Il manque les comités à deux femmes, $C_5^2 \times 6 = 60$, et à trois femmes, $C_5^3 = 10$. Le découpage complet redonne bien $75 + 60 + 10 = 145$.

Choisir le modèle de tirage

À retenir : Les trois modèles de tirage

On tire p jetons dans une urne de n jetons tous différents.

Tirage	L'ordre compte	Répétition possible	Objet compté	Nombre
successif avec remise	oui	oui	p-liste	n^p
successif sans remise	oui	non	arrangement	A_n^p
simultané	non	non	combinaison	C_n^p

Méthode : Choisir le modèle en deux questions

1. **L'ordre compte-t-il ?** Oui pour un code, un classement, des postes différents. Non pour un groupe, un lot, une poignée tirée d'un coup.
2. **Un élément peut-il revenir ?** Oui avec remise, ou pour un chiffre réutilisable. Non pour des personnes, ou sans remise.
3. **Conclus** : ordre et répétition, n^p ; ordre sans répétition, A_n^p ; ni ordre ni répétition, C_n^p.

Exemple

Une urne fictive contient 8 jetons numérotés. On en tire 3.

- Successivement avec remise : $8^3 = 512$ tirages.
- Successivement sans remise : $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages.
- Simultanément : $C_8^3 = \dfrac{336}{3!} = \dfrac{336}{6} = 56$ tirages.

Remarque : Un lien entre les modèles

Les p jetons d'un tirage simultané peuvent être rangés de $p!$ façons. C'est pourquoi $A_n^p = p! \times C_n^p$. Dans l'urne précédente : $336 = 6 \times 56$.

Propriétés des coefficients

Propriété : Premières propriétés des coefficients

Soit n un entier naturel non nul.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = n$.
- Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$C_n^{n-p} = C_n^p.$$

Propriété : Relation de Pascal

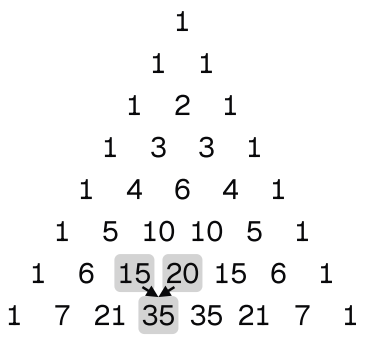
Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n-1$. Alors

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

À retenir : Le triangle de Pascal

La ligne n donne C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n. Les deux bords valent 1. À l'intérieur, la relation de Pascal fait lire la ligne du dessus : on ajoute le nombre de la même colonne et celui de la colonne précédente.

n	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1



Les lignes 0 à 7 rangées en triangle : chaque ligne se lit pareil dans les deux sens, et 35 s'obtient en ajoutant 15 et 20 de la ligne 6.

Exemple

Par symétrie, on garde le plus petit des deux nombres 18 et 2 :

$$\begin{aligned} C_{20}^{18} &= C_{20}^{2} \\ &= \frac{20 \times 19}{2} \\ &= 190. \end{aligned}$$

Par la relation de Pascal :

$$\begin{aligned} C_{7}^{3} &= C_{6}^{2} + C_{6}^{3} \\ &= 15 + 20 \\ &= 35, \end{aligned}$$

ce que confirme la ligne 7 du triangle.

Méthode : Calculer un coefficient vite et juste

1. **Remplace** p par $n - p$ si $n - p$ est plus petit (symétrie).
2. **Écris** au numérateur p facteurs qui descendent à partir de n, et $p!$ au dénominateur.
3. **Simplifie** la fraction avant de multiplier.
4. Pour les petites valeurs de n, **lis** le coefficient dans le triangle de Pascal.

Formule du binôme, nombre de parties, formulaire

Théorème : Formule du binôme

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}\, b^p \\ &= C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} b \\ &\quad + C_n^2\, a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad + C_n^n\, b^n,\end{aligned}$$

avec la convention $x^0 = 1$ pour tout réel x.

Méthode : Développer une puissance d'une somme

1. **Identifie** a, b et n, en gardant le signe de b.
2. **Recopie** la ligne n du triangle de Pascal.
3. **Écris** les termes $C_n^p\, a^{n-p}\, b^p$ pour p allant de 0 à n.
4. **Calcule** chaque terme, puis **contrôle** en remplaçant la variable par 1.

Exemple

Pour $(x+3)^4$, on lit la ligne 4 du triangle : $1, 4, 6, 4, 1$.

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= x^4 + 4 \times 3\, x^3 \\ &\quad + 6 \times 9\, x^2 + 4 \times 27\, x \\ &\quad + 81 \\ &= x^4 + 12x^3 + 54x^2 \\ &\quad + 108x + 81.\end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 1$: $1 + 12 + 54 + 108 + 81 = 256 = 4^4$.

Exemple

Pour $(2x-1)^3$, on prend $a = 2x$ et $b = -1$.

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 &= (2x)^3 \\ &\quad + 3 \times (2x)^2 \times (-1) \\ &\quad + 3 \times 2x \times (-1)^2 \\ &\quad + (-1)^3 \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.\end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 1$: $8 - 12 + 6 - 1 = 1 = (2-1)^3$.

Attention : Le signe de b

Écrire $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$ est faux.

Avec $b = -2$, on a $(-2)^1 = -2$, $(-2)^2 = 4$ et $(-2)^3 = -8$: les signes $+$ et $-$ alternent devant les termes. Le bon développement est

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

Vérifie aussi que, dans chaque terme, les exposants de x et de -2 ont pour somme 3.

Exemple

Coefficient de x^5 dans $(x+2)^7$: le terme d'indice p est $C_7^p\, x^{7-p}\, 2^p$. On veut $7 - p = 5$, donc $p = 2$.

Le coefficient vaut $C_7^2 \times 2^2 = 21 \times 4 = 84$.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 0$). L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, a 2^n éléments :

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul n :

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Exemple

Un ordinateur se vend avec 4 options facultatives (exemple fictif). Une configuration est une partie de l'ensemble des 4 options : il y en a $2^4 = 16$.

En les classant selon le nombre d'options :

$$\begin{aligned} &C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 \\ &= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16. \end{aligned}$$

Configurations à au moins deux options : $16 - 1 - 4 = 11$.

Remarque : Somme d'une ligne du triangle

Avec $a = b = 1$, la formule du binôme donne

$$\begin{aligned} &C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n \\ &= (1+1)^n = 2^n. \end{aligned}$$

La somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut donc 2^n.

Réunion de deux ensembles

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(A \cup B)\\&= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)\\&\quad - \operatorname{card}(A \cap B)\end{aligned}$$

Complémentaire dans E

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$$

Produit cartésien

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$

p-listes d'un ensemble à n éléments

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p$$

Factorielle

$$\begin{aligned}&n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n\\&0! = 1\end{aligned}$$

Arrangements, p entre 1 et n

$$\begin{aligned}A_n^p &= n \times (n-1) \times \ldots\\&\quad \times (n-p+1)\\&= \frac{n!}{(n-p)!}\end{aligned}$$

Permutations de n éléments

$$A_n^n = n!$$

Combinaisons, p entre 0 et n

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Symétrie

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Relation de Pascal, p entre 1 et n - 1

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Formule du binôme

$$\begin{aligned}&(a+b)^n\\&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}\, b^p\end{aligned}$$

Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

À retenir : Trois réflexes avant de compter

- **Nomme ce que tu comptes** : une liste ordonnée, un groupe sans ordre, une partie ?
- **Cherche les mots « au moins »** : ils appellent le contraire, puis une soustraction.
- **Contrôle par un autre chemin** : une petite liste écrite à la main, une somme de cas disjoints, ou $x = 1$ dans un développement.