BURHAN

Dénombrement : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/denombrement/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Jetons de deux couleurs

Une urne contient 13 jetons (exemple fictif) : 8 rouges et 5 verts. Les jetons sont tous distincts, car ils portent chacun un numéro.

Tirage simultané 0,75 pts

On tire simultanément 3 jetons. Montrer que le nombre de tirages possibles est 286.

INDICE

Un tirage simultané est une partie de l'ensemble des jetons.

CORRIGÉ

Un tirage simultané de 3 jetons est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 13 jetons : ni ordre, ni répétition. C'est une combinaison de 3 jetons parmi 13.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} & C_{13}^{3} \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11}{3!} \\ &= \frac{1716}{6} \\ &= 286. \end{aligned}$$

Conclusion. Le nombre de tirages simultanés possibles est bien 286.

Exactement deux rouges 1 pts

Combien de tirages simultanés comportent exactement 2 jetons rouges ?

INDICE

Choisis les jetons rouges, puis le jeton vert.

CORRIGÉ

On fait deux choix successifs :

- 2 rouges parmi 8 : $C_8^2 = 28$ façons, car $\dfrac{8 \times 7}{2} = 28$;
- puis, pour chacun de ces choix, 1 vert parmi 5 : $C_5^1 = 5$ façons.

D'après le principe général, il y a $28 \times 5 = 140$ tirages.

Conclusion. 140 tirages simultanés comportent exactement 2 jetons rouges.

Au moins un vert 1 pts

Montrer que 230 tirages simultanés contiennent au moins un jeton vert.

INDICE

Le contraire de « au moins un vert » est « aucun vert ».

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins un vert » est « aucun vert ». Un tirage sans vert est formé de 3 rouges parmi 8 : $C_8^3 = 56$ tirages, car $\dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$.

Par le complémentaire dans l'ensemble des 286 tirages de la question 1, $286 - 56 = 230$.

Conclusion. 230 tirages simultanés contiennent bien au moins un jeton vert.

Sans remise 1,25 pts

On tire maintenant successivement et sans remise 3 jetons. Combien de tirages sont possibles ? Combien ne comportent que des jetons rouges ?

INDICE

L'ordre compte désormais ; pour la seconde partie, raisonne seulement sur les jetons rouges.

CORRIGÉ

Tous les tirages. L'ordre compte et un jeton tiré ne revient pas : un tirage est un arrangement de 3 jetons parmi 13. D'après le nombre d'arrangements, il y en a $A_{13}^3 = 13 \times 12 \times 11 = 1716$.

Tirages tout rouges. Ce sont les arrangements de 3 jetons parmi les 8 rouges : $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Conclusion. Il y a 1716 tirages successifs sans remise, dont 336 ne comportent que des jetons rouges.

Avec remise, une seule couleur 1 pts

On tire successivement et avec remise 3 jetons. Combien de tirages sont possibles ? Combien ont leurs trois jetons de la même couleur ?

INDICE

Découpe en deux cas disjoints : tout rouge, tout vert.

CORRIGÉ

Tous les tirages. Avec remise, un tirage est une 3-liste de l'ensemble des 13 jetons : $13^3 = 2197$ tirages.

Même couleur. On distingue deux cas disjoints :

- tout rouge : une 3-liste des 8 rouges, $8^3 = 512$ tirages ;
- tout vert : une 3-liste des 5 verts, $5^3 = 125$ tirages.

D'après le principe additif, $512 + 125 = 637$.

Conclusion. Il y a 2197 tirages avec remise, dont 637 ont leurs trois jetons de la même couleur.

Exercice 2 — 4 pts

Renouvellement d'un comité d'entreprise

Une entreprise renouvelle son comité (données fictives). Les candidats sont 8 cadres et 6 employés. Le comité compte 5 membres, sans rôle particulier au départ.

Nombre de comités — 0,75 pts

Montrer qu'il y a 2002 comités possibles.

INDICE

Simplifie la fraction avant de multiplier tous les facteurs.

CORRIGÉ

Un comité est une combinaison de 5 personnes parmi les $8+6=14$ candidats. D'après le nombre de combinaisons, $C_{14}^{5}=\dfrac{14\times13\times12\times11\times10}{5!}$.

Comme $5!=120=12\times10$, on simplifie avant de multiplier :

$$\begin{aligned} &C_{14}^{5}\\ &=14\times13\times11\\ &=2002. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a bien 2002 comités possibles.

Exactement trois cadres — 1 pts

Combien de comités comptent exactement 3 cadres ?

INDICE

Le comité compte alors 2 employés.

CORRIGÉ

Un comité de 5 membres qui compte 3 cadres compte aussi 2 employés. On fait deux choix successifs :

- 3 cadres parmi 8 : $C_{8}^{3}=56$ façons ;
- puis, pour chacun de ces choix, 2 employés parmi 6 : $C_{6}^{2}=15$ façons.

D'après le principe général, il y a $56\times15=840$ comités.

Conclusion. 840 comités comptent exactement 3 cadres.

Au moins un employé 1 pts

Combien de comités comptent au moins un employé ?

INDICE

Quels comités ne comptent aucun employé ?

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins un employé » est « aucun employé ». Un comité sans employé est formé de 5 cadres parmi 8. D'après la symétrie, $C_8^5 = C_8^3 = 56$ comités.

Par le complémentaire, $2002 - 56 = 1946$.

Conclusion. 1946 comités comptent au moins un employé.

Le bureau 0,75 pts

Le comité élu désigne en son sein un président, un secrétaire et un trésorier, trois personnes distinctes. Montrer qu'il y a 60 bureaux possibles.

INDICE

Trois postes différents à pourvoir parmi les 5 membres.

CORRIGÉ

Les trois postes sont différents et personne n'en cumule deux : l'ordre compte, sans répétition. Un bureau est donc un arrangement de 3 membres parmi les 5 du comité.

D'après le nombre d'arrangements, $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Conclusion. Il y a bien 60 bureaux possibles.

Comité et bureau 0,5 pts

En déduire le nombre de façons de former le comité, puis son bureau.

INDICE

Deux choix successifs, avec le même nombre de bureaux pour chaque comité.

CORRIGÉ

On choisit le comité, de 2002 façons (question 1), puis, pour chaque comité, son bureau, de 60 façons (question 4).

D'après le principe général, il y a $2002 \times 60 = 120\,120$ façons.

Conclusion. On peut former le comité puis son bureau de $120\,120$ façons.

Exercice 3 — 4 pts

Triangle de Pascal et formule du binôme

Dans cet exercice, x désigne un nombre réel. La ligne 4 du triangle de Pascal est : $1, 4, 6, 4, 1$.

Lignes 5 et 6 — 0,75 pts

Écrire les lignes 5 et 6 du triangle de Pascal, en nommant la règle utilisée.

INDICE

Chaque nombre intérieur se calcule à partir de deux nombres de la ligne précédente.

CORRIGÉ

D'après la relation de Pascal, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$:

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}.$$

Chaque case intérieure est donc la somme de deux voisins de la ligne précédente, et chaque bord vaut 1.

- Ligne 5 : $1, 5, 10, 10, 5, 1$.
- Ligne 6 : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$.

Conclusion. Les lignes 5 et 6 s'obtiennent par la relation de Pascal, comme ci-dessus.

Symétrie — 0,75 pts

Montrer que $C_{15}^{13} = 105$.

INDICE

Ramène l'exposant à un petit nombre, puis applique la formule.

CORRIGÉ

D'après la symétrie des coefficients, $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$, car $15 - 13 = 2$.

D'après le nombre de combinaisons :

$$C_{15}^{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 105.$$

Conclusion. $C_{15}^{13} = 105$.

Un développement 1 pts

Développer $(2x+1)^4$.

INDICE

Quelles sont les valeurs de a et de b ? Quelle ligne du triangle faut-il lire ?

CORRIGÉ

On lit la ligne 4 du triangle : $1, 4, 6, 4, 1$. D'après la formule du binôme avec $a = 2x$, $b = 1$ et $n = 4$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(2x+1)^4\\&= (2x)^4 + 4\times(2x)^3\\&\quad + 6\times(2x)^2\\&\quad + 4\times 2x + 1\\&= 16x^4 + 32x^3\\&\quad + 24x^2 + 8x + 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$.

Une différence 1 pts

Montrer que $(2x+1)^4 - (2x-1)^4 = 64x^3 + 16x$.

INDICE

Développe $(2x-1)^4$ avec $b = -1$: seuls certains signes changent.

CORRIGÉ

Développement de $(2x-1)^4$. Avec $b = -1$, les termes d'indice impair changent de signe. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(2x-1)^4\\&= 16x^4 - 32x^3\\&\quad + 24x^2 - 8x + 1.\end{aligned}$$

Différence. En soustrayant terme à terme, les termes en x^4, en x^2 et les constantes s'annulent :

$$\begin{aligned}&(2x+1)^4 - (2x-1)^4\\&= 2\times 32x^3 + 2\times 8x\\&= 64x^3 + 16x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $(2x+1)^4 - (2x-1)^4 = 64x^3 + 16x$.

Application numérique

0,5 pts

En déduire la valeur de $11^4 - 9^4$.

INDICE

Quel x rend $2x+1$ égal à 11 ? Que vaut alors $2x-1$?

CORRIGÉ

Avec $x = 5$, on a $2x+1 = 11$ et $2x-1 = 9$, et $5^3 = 125$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} &11^4 - 9^4 \\ &= 64 \times 125 + 16 \times 5 \\ &= 8000 + 80 \\ &= 8080. \end{aligned}$$

Contrôle. $11^4 = 14\,641$ et $9^4 = 6561$, donc $14\,641 - 6561 = 8080$.

Conclusion. $11^4 - 9^4 = 8080$.

Exercice 4 — 3 pts

Options d'un vélo

Un fabricant vend un vélo de ville avec 7 options facultatives (exemple fictif), dont un porte-bagages et un siège enfant. Une configuration est l'ensemble des options choisies, éventuellement aucune.

Nombre de configurations — 0,75 pts

Montrer qu'il existe 128 configurations.

INDICE

Une configuration est une partie de l'ensemble des options.

CORRIGÉ

Notons O l'ensemble des 7 options. Une configuration est une partie de O, la partie vide comprise.

D'après le nombre de parties d'un ensemble fini :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\mathcal{P}(O)) \\ = 2^{7} = 128.\end{aligned}$$

Conclusion. Il existe bien 128 configurations.

Trois options — 0,75 pts

Combien de configurations comportent exactement 3 options ?

INDICE

Ce sont des parties à 3 éléments.

CORRIGÉ

Ce sont les parties à 3 éléments de O, c'est-à-dire les combinaisons de 3 options parmi 7.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned}C_{7}^{3} &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \\ &= \frac{210}{6} = 35.\end{aligned}$$

Conclusion. 35 configurations comportent exactement 3 options.

Au moins deux options

0,75 pts

Combien de configurations comportent au moins 2 options ?

INDICE

Retire les configurations à 0 et à 1 option.

CORRIGÉ

Les configurations qui ne conviennent pas comptent 0 ou 1 option :

- sans option : $C_7^0 = 1$ configuration ;
- à une option : $C_7^1 = 7$ configurations.

Par le complémentaire, $128 - 1 - 7 = 120$.

Conclusion. 120 configurations comportent au moins deux options.

Une incompatibilité

0,75 pts

Pour des raisons de poids, le porte-bagages et le siège enfant ne peuvent pas être choisis ensemble. Combien de configurations restent possibles ?

INDICE

Pense au complémentaire : quelles configurations sont interdites ?

CORRIGÉ

Configurations interdites. Une configuration qui contient le porte-bagages et le siège enfant est déterminée par le choix parmi les 5 autres options, c'est-à-dire par une partie d'un ensemble à 5 éléments. D'après le nombre de parties, il y en a $2^5 = 32$.

Configurations possibles. Par le complémentaire, $128 - 32 = 96$.

Conclusion. 96 configurations restent possibles.

Exercice 5 — 4 pts

Codes d'accès d'une entreprise

Une entreprise attribue à chaque salarié un code d'accès (exemple fictif) : 3 lettres, choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, suivies de 2 chiffres, choisis de 0 à 9. Les répétitions sont permises, sauf mention contraire.

Nombre de codes — 0,75 pts

Montrer qu'il y a $1\,757\,600$ codes.

INDICE

Un code est un couple : une 3-liste de lettres, puis une 2-liste de chiffres.

CORRIGÉ

Partie lettres. C'est une 3-liste de l'ensemble des 26 lettres : $26^3 = 17\,576$ façons.

Partie chiffres. C'est une 2-liste de l'ensemble des 10 chiffres : $10^2 = 100$ façons.

Total. Un code est un couple (partie lettres, partie chiffres). D'après le cardinal d'un produit cartésien, il y a $17\,576 \times 100 = 1\,757\,600$ codes.

Conclusion. Il y a bien $1\,757\,600$ codes.

Sans répétition — 1,25 pts

Montrer qu'il y a $1\,404\,000$ codes dont les trois lettres sont distinctes et les deux chiffres distincts.

INDICE

Les lettres, comme les chiffres, forment maintenant des arrangements.

CORRIGÉ

Lettres distinctes. Un arrangement de 3 lettres parmi 26 : $A_{26}^{3} = 26 \times 25 \times 24 = 15\,600$ façons.

Chiffres distincts. Un arrangement de 2 chiffres parmi 10 : $A_{10}^{2} = 10 \times 9 = 90$ façons.

Total. D'après le principe général, il y a $15\,600 \times 90 = 1\,404\,000$ codes.

Conclusion. Il y a bien $1\,404\,000$ codes à lettres distinctes et chiffres distincts.

Au moins une répétition — 0,75 pts

Combien de codes comportent au moins une répétition, de lettre ou de chiffre ?

INDICE

C'est le contraire de la situation de la question précédente.

CORRIGÉ

Un code comporte au moins une répétition, de lettre ou de chiffre, exactement quand il n'a pas à la fois ses lettres distinctes et ses chiffres distincts. Ces codes forment le complémentaire de ceux de la question 2.

Par le complémentaire, il y a $1\,757\,600 - 1\,404\,000 = 353\,600$ codes.

Conclusion. $353\,600$ codes comportent au moins une répétition.

Chiffres croissants

1,25 pts

Combien de codes ont leurs deux chiffres dans l'ordre strictement croissant, comme 3 puis 7 ?

INDICE

Choisis d'abord l'ensemble des deux chiffres : de combien de façons peut-on le ranger dans l'ordre croissant ?

CORRIGÉ

Partie chiffres. Deux chiffres rangés dans l'ordre strictement croissant sont distincts. Un ensemble de 2 chiffres distincts se range d'une seule façon dans l'ordre croissant. Il y a donc autant de couples croissants que de combinaisons de 2 chiffres parmi 10 : $C_{10}^{2} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$.

Total. Avec $17\,576$ choix pour les lettres, d'après le principe général, il y a $17\,576 \times 45 = 790\,920$ codes.

Conclusion. $790\,920$ codes ont leurs deux chiffres dans l'ordre strictement croissant.