BURHAN

Dénombrement : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/denombrement/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Entraînement	7

Exercice 1

Langues parlées dans une entreprise

Une entreprise compte 80 salariés (données fictives). 46 parlent anglais, 31 parlent espagnol et 9 ne parlent aucune de ces deux langues. On note A l'ensemble des salariés qui parlent anglais et L l'ensemble de ceux qui parlent espagnol.

Au moins une langue

Combien de salariés parlent au moins l'une des deux langues ?

INDICE

Ces salariés forment $A \cup L$; tu connais son complémentaire.

CORRIGÉ

Les salariés qui ne parlent aucune des deux langues forment le complémentaire de $A \cup L$ dans l'entreprise.

D'après le cardinal du complémentaire :

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(A \cup L) \\ &= 80 - 9 = 71. \end{aligned}$$

Conclusion. 71 salariés parlent au moins l'une des deux langues.

Les deux langues

Combien de salariés parlent les deux langues ?

INDICE

Écris le cardinal de la réunion, puis isole $\operatorname{card}(A \cap L)$.

CORRIGÉ

D'après le cardinal de la réunion, $71 = 46 + 31 - \operatorname{card}(A \cap L)$, c'est-à-dire $71 = 77 - \operatorname{card}(A \cap L)$.

Donc :

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(A \cap L) \\ &= 77 - 71 = 6. \end{aligned}$$

Conclusion. 6 salariés parlent les deux langues.

Une seule langue

Combien de salariés parlent anglais sans espagnol ? espagnol sans anglais ? exactement une des deux langues ?

INDICE

Retire l'intersection de chaque ensemble, puis additionne deux cas disjoints.

CORRIGÉ

Une seule langue, cas par cas. L'ensemble A se partage en $A \cap L$ et en l'ensemble des salariés qui parlent anglais sans espagnol ; de même pour L. D'après le principe additif :

- anglais sans espagnol : $46 - 6 = 40$ salariés ;
- espagnol sans anglais : $31 - 6 = 25$ salariés.

Exactement une langue. Ces deux ensembles sont disjoints. D'après le principe additif, $40 + 25 = 65$.

Conclusion. 40 salariés parlent anglais sans espagnol, 25 espagnol sans anglais, et 65 exactement une des deux langues.

Contrôle

Vérifie que les cas trouvés couvrent toute l'entreprise.

INDICE

Découpe les 80 salariés en quatre cas qui ne se recouvrent pas.

CORRIGÉ

Les quatre cas « anglais seulement », « espagnol seulement », « les deux langues » et « aucune » sont deux à deux disjoints, et tout salarié relève de l'un d'eux.

D'après le principe additif, leur total vaut $40 + 25 + 6 + 9 = 80$.

Conclusion. On retrouve les 80 salariés : les cas trouvés couvrent toute l'entreprise.

Exercice 2

Sacs personnalisés

Une maroquinerie personnalise des sacs (exemple fictif). Le client choisit d'abord la matière : cuir ou toile. En cuir, il choisit une couleur parmi 3, puis une taille parmi 2. En toile, il choisit une couleur parmi 5, puis une taille parmi 3.

L'arbre de choix

Décris l'arbre de choix. Peut-on obtenir le nombre de sacs par un seul produit ?

INDICE

Regarde si le nombre de couleurs est le même sous la branche « cuir » et sous la branche « toile ».

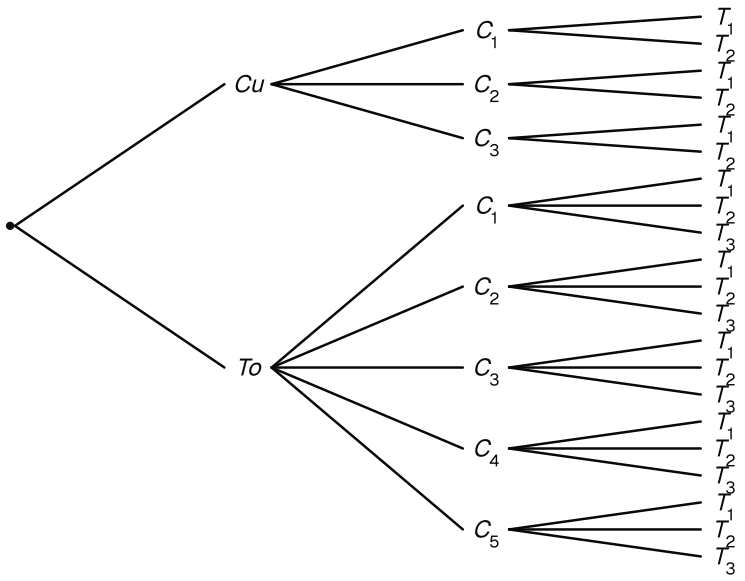
CORRIGÉ

L'arbre de choix compte trois niveaux :

- premier niveau : 2 branches, cuir et toile ;
- sous « cuir » : 3 branches de couleur, puis 2 branches de taille sous chacune ;
- sous « toile » : 5 branches de couleur, puis 3 branches de taille sous chacune.

Le principe général demande le même nombre de branches à chaque étape, quel que soit le chemin. Ici, le nombre de couleurs dépend de la matière : cette condition n'est pas remplie pour l'arbre entier.

Conclusion. On ne peut donc pas obtenir le nombre de sacs par un seul produit ; on compte chaque branche à part.



Arbre de choix des sacs : Cu (cuir) mène à 3 couleurs puis 2 tailles, To (toile) à 5 couleurs puis 3 tailles ; les deux sous-arbres n'ont pas la même forme.

Chaque matière

Combien de sacs en cuir peut-on commander ? Combien de sacs en toile ?

INDICE

Une fois la matière fixée, le principe général s'applique.

CORRIGÉ

Une fois la matière fixée, chaque couleur offre le même nombre de tailles. D'après le principe général :

- sous « cuir » : $3 \times 2 = 6$ sacs ;
- sous « toile » : $5 \times 3 = 15$ sacs.

Conclusion. On peut commander 6 sacs en cuir et 15 sacs en toile.

Tous les sacs

Combien de sacs différents la maroquinerie propose-t-elle ?

INDICE

Les sacs en cuir et les sacs en toile forment deux ensembles disjoints.

CORRIGÉ

Un sac est en cuir ou en toile, jamais les deux : les deux ensembles de la question 2 sont disjoints.

D'après le principe additif, il y a $6 + 15 = 21$ sacs différents.

Conclusion. La maroquinerie propose 21 sacs différents.

Avec des initiales

Chaque sac peut, en plus, porter ou non les initiales du client. Combien de commandes différentes sont possibles ?

INDICE

Un dernier choix à deux issues s'ajoute à chaque chemin de l'arbre.

CORRIGÉ

Chaque sac se commande avec ou sans initiales : 2 façons, quel que soit le sac.

D'après le principe général, il y a $21 \times 2 = 42$ commandes différentes.

Conclusion. 42 commandes différentes sont possibles.

Exercice 3

Trois façons de tirer des jetons

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10 (exemple fictif). On note E l'ensemble des 10 numéros. On tire 3 jetons de trois façons différentes.

Avec remise

On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, et on recommence jusqu'à trois tirages. Combien de résultats sont possibles ?

INDICE

L'ordre compte-t-il ? Un numéro peut-il revenir ? Déduis-en le modèle.

CORRIGÉ

L'ordre compte (premier, deuxième, troisième tirage) et un numéro peut revenir : un résultat est une 3-liste de E.

D'après le cardinal de E^p avec $p = 3$, il y a $10^3 = 1000$ résultats.

Conclusion. Le tirage avec remise donne 1000 résultats possibles.

Sans remise

On tire trois jetons l'un après l'autre, sans les remettre. Combien de résultats sont possibles ?

INDICE

L'ordre compte toujours ; un numéro peut-il encore revenir ?

CORRIGÉ

L'ordre compte et un jeton tiré ne revient pas : un résultat est un arrangement de 3 numéros parmi 10.

D'après le nombre d'arrangements, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ résultats.

Conclusion. Le tirage successif sans remise donne 720 résultats possibles.

Simultanément

On prend trois jetons d'un seul coup. Combien de résultats sont possibles ?

INDICE

Une poignée de jetons n'a pas d'ordre ; utilise le lien entre arrangements et combinaisons.

CORRIGÉ

Une poignée de jetons n'a ni ordre ni répétition : un résultat est une combinaison de 3 numéros parmi 10.

Chaque combinaison correspond à $3!$ arrangements, selon l'ordre de sortie. D'après le nombre de combinaisons, $C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{720}{6} = 120$ résultats.

Conclusion. Le tirage simultané donne 120 résultats possibles.

Numéros pairs

Dans le tirage sans remise, combien de résultats ne comportent que des numéros pairs ?

INDICE

Change d'ensemble : celui des numéros pairs du sac.

CORRIGÉ

Les numéros pairs du sac sont 2, 4, 6, 8 et 10 : il y en a 5.

Un tel résultat est un arrangement de 3 numéros parmi ces 5. D'après le nombre d'arrangements, on obtient $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ résultats.

Conclusion. Dans le tirage sans remise, 60 résultats ne comportent que des numéros pairs.

Exercice 4

Comité d'un service commercial

Le service commercial d'une entreprise compte 6 femmes et 7 hommes (données fictives). On forme un comité de 4 personnes, sans rôle particulier.

Tous les comités

Combien de comités peut-on former ?

INDICE

Un comité est une partie à 4 éléments d'un ensemble de 13 personnes.

CORRIGÉ

Le service compte 13 personnes (6 femmes et 7 hommes). Un comité est une combinaison de 4 personnes parmi ces 13.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} & C_{13}^{4} \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4!} \\ &= \frac{17\,160}{24} \\ &= 715. \end{aligned}$$

Conclusion. On peut former 715 comités.

Deux femmes et deux hommes

Combien de comités comptent exactement 2 femmes et 2 hommes ?

INDICE

Deux choix successifs : les femmes, puis les hommes.

CORRIGÉ

On fait deux choix successifs :

- 2 femmes parmi 6, de $C_6^2 = 15$ façons ;
- puis, pour chaque choix, 2 hommes parmi 7, de $C_7^2 = 21$ façons.

D'après le principe général, il y a $15 \times 21 = 315$ comités.

Conclusion. 315 comités comptent exactement 2 femmes et 2 hommes.

Au moins une femme

Combien de comités comptent au moins une femme ?

INDICE

Compte d'abord les comités qui ne comptent aucune femme.

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins une femme » est « aucune femme ». Un comité sans femme est formé de 4 hommes parmi 7. D'après la symétrie, $C_7^4 = C_7^3 = 35$, car $\dfrac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$.

Par le complémentaire dans l'ensemble des 715 comités, $715 - 35 = 680$.

Conclusion. 680 comités comptent au moins une femme.

Un refus

Deux personnes du service, Nadia et Karim, refusent de siéger ensemble. Combien de comités respectent ce refus ?

INDICE

Compte d'abord les comités qui ne respectent pas le refus.

CORRIGÉ

Comptons d'abord les comités qui ne respectent pas le refus. Un comité qui contient Nadia et Karim se complète par 2 personnes parmi les 11 autres : $C_{11}^2 = \dfrac{11 \times 10}{2} = 55$ comités.

Par le complémentaire, $715 - 55 = 660$.

Conclusion. 660 comités respectent le refus de Nadia et Karim.

Exercice 5

Codes et anagrammes

Un service informatique crée des codes de 5 chiffres (exemple fictif), chaque chiffre allant de 0 à 9.

Chiffres distincts

Combien de codes ont leurs 5 chiffres distincts ?

INDICE

L'ordre compte et aucun chiffre ne revient.

CORRIGÉ

Un code à chiffres distincts est une 5-liste d'éléments deux à deux distincts : un arrangement de 5 chiffres parmi 10.

D'après le nombre d'arrangements, $A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$ codes.

Conclusion. $30\,240$ codes ont leurs 5 chiffres distincts.

Au moins une répétition

Combien de codes comportent au moins un chiffre répété ?

INDICE

Compare avec l'ensemble de tous les codes de 5 chiffres.

CORRIGÉ

Tous les codes. Un code de 5 chiffres est une 5-liste de l'ensemble des 10 chiffres : il y en a $10^{5} = 100\,000$.

Codes avec répétition. Ils forment le complémentaire des codes à chiffres distincts. D'après le cardinal du complémentaire et la question 1, on obtient $100\,000 - 30\,240 = 69\,760$ codes.

Conclusion. $69\,760$ codes comportent au moins un chiffre répété.

Premier chiffre non nul

Combien de codes à chiffres distincts ne commencent pas par 0 ?

INDICE

Choisis d'abord le premier chiffre, puis les quatre autres parmi les chiffres restants.

CORRIGÉ

Premier chiffre. Il est choisi de 1 à 9 : 9 façons.

Quatre chiffres suivants. Pour chaque premier chiffre, ils forment un arrangement de 4 chiffres parmi les 9 restants, 0 compris : $A_{9}^{4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ façons.

Total. D'après le principe général, il y a $9 \times 3024 = 27\,216$ codes.

Conclusion. $27\,216$ codes à chiffres distincts ne commencent pas par 0.

Anagrammes

Un mot de passe provisoire est une anagramme du mot BUDGET : ses six lettres, dans un ordre quelconque. Combien y en a-t-il ? Combien commencent par une voyelle ?

INDICE

Les six lettres sont distinctes ; pour la seconde question, place d'abord la voyelle.

CORRIGÉ

Toutes les anagrammes. Les lettres B, U, D, G, E, T sont distinctes : une anagramme est une permutation de ces 6 lettres. D'après le nombre de permutations, il y en a $6! = 720$.

Première lettre voyelle. On choisit la première lettre parmi U et E (2 façons), puis on range les 5 autres lettres ($5! = 120$ façons). D'après le principe général, $2 \times 120 = 240$ anagrammes commencent par une voyelle.

Conclusion. Il y a 720 anagrammes de BUDGET, dont 240 commencent par une voyelle.

Exercice 6

Coefficients d'un développement

On étudie le développement de $(2x-1)^6$ par la formule du binôme.

Terme général

Écris le terme d'indice p du développement, pour $0 \leq p \leq 6$.

INDICE

Prends $a = 2x$ et $b = -1$.

CORRIGÉ

D'après la formule du binôme avec $a = 2x$, $b = -1$ et $n = 6$: pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq 6$, le terme d'indice p est :

$$\begin{aligned} & C_6^p \, (2x)^{6-p} \, (-1)^p \\ &= C_6^p \times 2^{6-p} \\ &\quad \times (-1)^p \, x^{6-p}. \end{aligned}$$

La seconde forme vient de $(2x)^{6-p} = 2^{6-p} \, x^{6-p}$.

Conclusion. Le terme d'indice p est $C_6^p \times 2^{6-p} \times (-1)^p \, x^{6-p}$.

Un premier coefficient

Calcule le coefficient de x^4.

INDICE

Cherche la valeur de p telle que $6 - p = 4$.

CORRIGÉ

D'après le terme général de la question 1, la puissance x^4 correspond à $6 - p = 4$, c'est-à-dire $p = 2$. Le coefficient vaut :

$$\begin{aligned} & C_6^2 \times 2^4 \times (-1)^2 \\ &= 15 \times 16 \times 1 \\ &= 240. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient de x^4 est 240.

Un coefficient négatif

Calcule le coefficient de x^3.

INDICE

Même démarche ; surveille le signe de $(-1)^p$.

CORRIGÉ

D'après le terme général, la puissance x^3 correspond à $6-p=3$, c'est-à-dire $p=3$. Comme p est impair, $(-1)^3=-1$ et le coefficient est négatif :

$$\begin{aligned} & C_6^3 \times 2^3 \times (-1)^3 \\ &= 20 \times 8 \times (-1) \\ &= -160. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient de x^3 est -160.

Somme des coefficients

Calcule la somme de tous les coefficients du développement.

INDICE

La somme des coefficients d'un polynôme est sa valeur en $x=1$.

CORRIGÉ

Pour $x=1$, toutes les puissances de x valent 1 : le développement se réduit à la somme de ses coefficients.

Cette somme vaut donc $(2\times 1-1)^6=1^6=1$.

Conclusion. La somme des coefficients du développement est 1.

Exercice 7

Sélections dans une gamme

Une gamme compte 6 produits (exemple fictif). Le magasin étudie toutes les sélections possibles de produits de la gamme, y compris la sélection vide. On note G l'ensemble des 6 produits.

Toutes les sélections

Combien de sélections sont possibles ?

INDICE

Une sélection est une partie de G.

CORRIGÉ

Une sélection est une partie de G, la sélection vide comprise.

D'après le nombre de parties d'un ensemble fini :

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(\mathcal{P}(G))\\&= 2^{6} = 64.\end{aligned}$$

Conclusion. 64 sélections sont possibles.

Au moins deux produits

Combien de sélections comportent au moins deux produits ?

INDICE

Quelles sélections ne conviennent pas ? Retire-les du total.

CORRIGÉ

Les sélections qui ne conviennent pas comptent 0 ou 1 produit :

- sélections à 0 produit : $C_{6}^{0} = 1$;
- sélections à 1 produit : $C_{6}^{1} = 6$.

Par le complémentaire, $64 - 1 - 6 = 57$.

Conclusion. 57 sélections comportent au moins deux produits.

Contrôle par le triangle

Écris la ligne 6 du triangle de Pascal et vérifie que sa somme vaut 64.

INDICE

Construis-la à partir de la ligne 5 : $1, 5, 10, 10, 5, 1$.

CORRIGÉ

Ligne 6. On part de la ligne 5 et on additionne ses termes consécutifs, d'après la relation de Pascal : $1+5=6$, $5+10=15$, $10+10=20$, puis les mêmes sommes dans l'ordre inverse. La ligne 6 est $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$.

Somme.

$$\begin{aligned} &1+6+15+20 \\ &\quad +15+6+1 \\ &=64=2^6. \end{aligned}$$

C'est ce que donne la formule du binôme avec $a=b=1$ et $n=6$.

Conclusion. La somme de la ligne 6 vaut bien 64, le nombre total de sélections.

Nombre pair de produits

Combien de sélections comportent un nombre pair de produits (0, 2, 4 ou 6) ?

INDICE

Quelles tailles de sélection sont paires ? Quels coefficients de la ligne 6 les comptent ?

CORRIGÉ

Les sélections à 0, 2, 4 et 6 produits forment quatre cas disjoints, comptés par la ligne 6.

D'après le principe additif :

$$\begin{aligned} &C_6^0+C_6^2 \\ &\quad +C_6^4+C_6^6 \\ &=1+15+15+1 \\ &=32. \end{aligned}$$

Conclusion. 32 sélections comportent un nombre pair de produits, exactement la moitié de 64.