BURHAN

Dénombrement : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/denombrement/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Application	8

Exercice 1

Enquête dans une supérette

Une supérette interroge 60 clients (données fictives). 35 achètent du thé, 28 achètent du café et 14 achètent les deux. On note E l'ensemble des clients interrogés, T celui des acheteurs de thé et K celui des acheteurs de café.

Thé ou café

Combien de clients achètent du thé ou du café ?

INDICE

Les ensembles T et K ont des éléments communs : utilise le cardinal de la réunion de deux ensembles.

CORRIGÉ

Les ensembles T et K ne sont pas disjoints, car $\operatorname{card}(T \cap K) = 14$: le principe additif ne suffit pas.

D'après le cardinal de la réunion de deux ensembles :

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(T \cup K) \\ &= \operatorname{card}(T) + \operatorname{card}(K) \\ &\quad - \operatorname{card}(T \cap K) \\ &= 35 + 28 - 14 \\ &= 49. \end{aligned}$$

Conclusion. 49 clients achètent du thé ou du café.

Ni l'un ni l'autre

Combien de clients n'achètent ni thé ni café ?

INDICE

Ces clients forment le complémentaire de $T \cup K$ dans E.

CORRIGÉ

Les clients qui n'achètent ni thé ni café sont ceux de E qui restent hors de $T \cup K$: ils forment le complémentaire de $T \cup K$ dans E.

D'après le cardinal du complémentaire et la question 1, leur nombre est $60 - 49 = 11$.

Conclusion. 11 clients n'achètent ni thé ni café.

Thé seulement

Combien de clients achètent du thé mais pas de café ?

INDICE

Partage T en deux parties disjointes : les clients qui achètent aussi du café, et les autres.

CORRIGÉ

Notons x le nombre de clients qui achètent du thé mais pas de café.

L'ensemble T se partage en deux ensembles disjoints : $T \cap K$, qui compte 14 clients, et l'ensemble des acheteurs de thé sans café, qui en compte x.

D'après le principe additif, $35 = 14 + x$. Donc $x = 35 - 14 = 21$.

Conclusion. 21 clients achètent du thé mais pas de café.

Exercice 2

Plateaux-repas d'un traiteur

Un traiteur compose des plateaux-repas (exemple fictif) : une entrée parmi 4, un plat parmi 5 et un dessert parmi 3.

Plateaux complets

Combien de plateaux différents le traiteur peut-il composer ?

INDICE

Décris l'arbre de choix : entrée, puis plat, puis dessert. Le nombre de branches dépend-il du chemin suivi ?

CORRIGÉ

Composer un plateau revient à faire trois choix successifs :

- l'entrée, de 4 façons ;
- puis, pour chaque entrée, le plat, de 5 façons ;
- puis, pour chaque couple entrée-plat, le dessert, de 3 façons.

Quelle que soit l'entrée prise, il reste 5 plats ; quel que soit le couple entrée-plat, il reste 3 desserts. D'après le principe général du dénombrement, il y a $4 \times 5 \times 3 = 60$ plateaux.

Conclusion. Le traiteur peut composer 60 plateaux différents.

Avec une boisson

Le traiteur ajoute une boisson au choix parmi 2. Combien de plateaux avec boisson peut-il proposer ?

INDICE

Un quatrième choix s'ajoute aux trois premiers, avec le même nombre de façons pour chaque plateau.

CORRIGÉ

Chaque plateau de la question 1 se complète par une boisson, de 2 façons, quel que soit ce plateau.

D'après le principe général, il y a $60 \times 2 = 120$ plateaux avec boisson.

Conclusion. Le traiteur peut proposer 120 plateaux avec boisson.

Sans entrée

Un client ne prend pas d'entrée : il choisit seulement un plat et un dessert. Combien de choix a-t-il ?

INDICE

Il ne reste que deux choix successifs.

CORRIGÉ

Le client fait deux choix successifs : le plat, de 5 façons, puis, pour chaque plat, le dessert, de 3 façons.

D'après le principe général, il a $5 \times 3 = 15$ choix.

Conclusion. Sans entrée, le client dispose de 15 choix.

Exercice 3

Codes clients

Une enseigne attribue des codes à ses clients (exemple fictif). Les chiffres vont de 0 à 9, et un chiffre peut être répété. On note E l'ensemble des 10 chiffres.

Quatre chiffres

Combien de codes de 4 chiffres peut-on former ?

INDICE

Un code est une suite ordonnée de 4 chiffres, distincts ou non : quel objet du chapitre reconnais-tu ?

CORRIGÉ

Un code est une suite ordonnée de 4 éléments de E, où un chiffre peut revenir : c'est une 4-liste de E.

D'après le cardinal de E^p, ici avec $\mathrm{card}(E) = 10$ et $p = 4$, il y a $10^4 = 10\,000$ codes.

Conclusion. On peut former $10\,000$ codes de 4 chiffres.

Une lettre, puis quatre chiffres

Un nouveau code commence par une lettre, choisie parmi 26, suivie de 4 chiffres. Combien de codes de ce type existe-t-il ?

INDICE

Sépare le code en deux morceaux, la partie lettre et la partie chiffres : quel ensemble de paires reconnais-tu ?

CORRIGÉ

Un code de ce type est un couple : une lettre, puis un code de 4 chiffres. L'ensemble de ces codes est le produit cartésien de l'ensemble des 26 lettres par l'ensemble des codes de la question 1.

D'après le cardinal d'un produit cartésien et la question 1, il y a $26 \times 10\,000 = 260\,000$ codes.

Conclusion. Il existe $260\,000$ codes formés d'une lettre suivie de 4 chiffres.

Chiffres impairs

Combien de codes de 4 chiffres n'utilisent que des chiffres impairs ?

INDICE

Écris la liste des chiffres impairs : c'est le nouvel ensemble dans lequel on choisit.

CORRIGÉ

Les chiffres impairs sont 1, 3, 5, 7 et 9 : ils forment un ensemble à 5 éléments.

Un tel code est une 4-liste de cet ensemble. D'après le cardinal de E^p appliqué à ce nouvel ensemble, il y en a $5^4 = 625$.

Conclusion. 625 codes de 4 chiffres n'utilisent que des chiffres impairs.

Exercice 4

Missions de stagiaires

Une agence de conseil emploie 7 stagiaires (exemple fictif).

Calculs de factorielles

Calcule $6!$, puis $\dfrac{8!}{6!}$ sans calculer $8!$.

INDICE

Écris $8! = 8 \times 7 \times 6!$.

CORRIGÉ

Calcul de $6!$. D'après la définition de la factorielle :

$$\begin{aligned} 6! &= 1 \times 2 \times 3 \\ &\quad \times 4 \times 5 \times 6 \\ &= 720. \end{aligned}$$

Calcul du quotient. Comme $8! = 8 \times 7 \times 6!$, on simplifie par $6!$:

$$\frac{8!}{6!} = 8 \times 7 = 56.$$

Conclusion. $6! = 720$ et $\dfrac{8!}{6!} = 56$.

Trois missions

L'agence confie trois missions différentes (un audit, une étude de marché, un inventaire) à trois stagiaires distincts. De combien de façons peut-elle le faire ?

INDICE

Les missions sont différentes : l'ordre des stagiaires choisis compte-t-il ? Un stagiaire peut-il recevoir deux missions ?

CORRIGÉ

Une répartition est une 3-liste de stagiaires deux à deux distincts : le premier fait l'audit, le deuxième l'étude, le troisième l'inventaire. L'ordre compte et personne n'est choisi deux fois.

C'est donc un arrangement de 3 stagiaires parmi 7. D'après le nombre d'arrangements, il y a $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ façons.

Conclusion. L'agence peut répartir les trois missions de 210 façons.

Ordre des rendez-vous

Un stagiaire doit enchaîner 4 rendez-vous dans la journée. De combien de façons peut-il les ordonner ?

INDICE

Ranger tous les éléments d'un ensemble dans un ordre : quel objet du chapitre ?

CORRIGÉ

Ordonner les 4 rendez-vous, c'est ranger tous les éléments d'un ensemble à 4 éléments : on forme une permutation de cet ensemble.

D'après le nombre de permutations, il y a $4! = 24$ ordres possibles.

Conclusion. Le stagiaire peut ordonner ses rendez-vous de 24 façons.

Exercice 5

Une association de commerçants

Une association de commerçants compte 15 membres (exemple fictif).

Une commission

Elle forme une commission de 4 membres, sans rôle particulier. Combien de commissions sont possibles ?

INDICE

L'ordre des membres choisis compte-t-il ? Simplifie avant de multiplier.

CORRIGÉ

Une commission est une partie à 4 éléments de l'ensemble des 15 membres : l'ordre ne compte pas et personne n'est choisi deux fois.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} & C_{15}^{4} \\ &= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4!} \\ &= \frac{32\,760}{24} \\ &= 1365. \end{aligned}$$

Conclusion. 1365 commissions sont possibles.

Un bureau

Elle élit un président et un trésorier, deux personnes distinctes. Combien de bureaux sont possibles ?

INDICE

Les deux postes sont différents.

CORRIGÉ

Un bureau est un couple (président, trésorier) de deux membres distincts : l'ordre compte, car les postes diffèrent. C'est un arrangement de 2 membres parmi 15.

D'après le nombre d'arrangements, $A_{15}^{2} = 15 \times 14 = 210$.

Conclusion. 210 bureaux sont possibles.

Deux vérificateurs

Elle désigne deux vérificateurs aux comptes, qui ont le même rôle. Combien de choix a-t-elle ? Compare avec la question 2.

INDICE

Ici, échanger les deux personnes ne change rien.

CORRIGÉ

Les deux vérificateurs ont le même rôle : ils forment une partie à 2 éléments de l'ensemble des membres.

D'après le nombre de combinaisons, $C_{15}^{2} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 105$.

Comparaison. On trouve la moitié de 210 : chaque paire de membres donne $2! = 2$ bureaux, selon la personne qui est présidente.

Conclusion. L'association a 105 choix, deux fois moins que de bureaux.

Exercice 6

Symétrie et triangle de Pascal

La ligne 7 du triangle de Pascal est : $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$.

Symétrie

Calcule C_9^7 en utilisant la symétrie.

INDICE

Remplace l'exposant 7 par $9 - 7$.

CORRIGÉ

D'après la symétrie des coefficients, puis le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_9^7 &= C_9^{9-7} = C_9^2 \\ &= \frac{9 \times 8}{2} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Conclusion. $C_9^7 = 36$.

La ligne suivante

Écris la ligne 8 du triangle de Pascal.

INDICE

Applique la relation de Pascal à chaque case intérieure. Que valent les deux bords ?

CORRIGÉ

D'après la relation de Pascal, pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq 7$:

$$\begin{aligned} C_8^p = C_7^{p-1} \\ + C_7^p. \end{aligned}$$

Les deux bords valent 1 : $C_8^0 = C_8^8 = 1$.

On additionne, de gauche à droite, les termes consécutifs de la ligne 7 : $1 + 7 = 8$, $7 + 21 = 28$, $21 + 35 = 56$, $35 + 35 = 70$, $35 + 21 = 56$, $21 + 7 = 28$ et $7 + 1 = 8$.

Conclusion. La ligne 8 est : $1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$.

Un coefficient de la ligne 9

Calcule C_9^3 avec la relation de Pascal et la ligne 8.

INDICE

Écris C_9^3 comme la somme de deux coefficients de la ligne 8.

CORRIGÉ

D'après la relation de Pascal et la ligne 8 :

$$\begin{aligned} C_9^3 &= C_8^2 + C_8^3 \\ &= 28 + 56 \\ &= 84. \end{aligned}$$

Contrôle. Par le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_9^3 &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} \\ &= \frac{504}{6} = 84. \end{aligned}$$

Conclusion. $C_9^3 = 84$.

Exercice 7

Deux développements

On développe deux puissances avec la formule du binôme.

Une puissance troisième

Développe $(x+5)^3$.

INDICE

Quels sont a, b et n ? Quelle ligne du triangle faut-il lire ?

CORRIGÉ

On applique la formule du binôme avec $a=x$, $b=5$ et $n=3$. La ligne 3 du triangle de Pascal est 1, 3, 3, 1.

D'après la formule du binôme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x+5)^3 &= x^3 + 3\times 5\,x^2 \\ &\quad + 3\times 25\,x + 125 \\ &= x^3 + 15x^2 \\ &\quad + 75x + 125.\end{aligned}$$

Contrôle. Avec $x=1$: $1+15+75+125 = 216 = 6^3$, et $(1+5)^3 = 6^3$.

Conclusion. $(x+5)^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$.

Une puissance cinquième

Développe $(1+y)^5$.

INDICE

Avec $a=1$, chaque terme se réduit à $C_5^p\,y^p$; lis la ligne 5 du triangle.

CORRIGÉ

On applique la formule du binôme avec $a=1$, $b=y$ et $n=5$. Comme $1^{5-p}=1$, le terme d'indice p se réduit à $C_5^p\,y^p$.

La ligne 5 du triangle est 1, 5, 10, 10, 5, 1. Donc, pour tout réel y :

$$\begin{aligned}(1+y)^5 &= 1 + 5y + 10y^2 \\ &\quad + 10y^3 + 5y^4 + y^5.\end{aligned}$$

Contrôle. Avec $y=1$: $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

Conclusion. $(1+y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$.

Exercice 8

Modules d'un logiciel

Un logiciel de gestion se vend avec 5 modules optionnels (exemple fictif) : facturation, stocks, paie, agenda et tableaux de bord. Une configuration est l'ensemble des modules choisis, éventuellement aucun.

Toutes les configurations

Combien de configurations sont possibles ?

INDICE

Une configuration est une partie de l'ensemble des 5 modules.

CORRIGÉ

Notons M l'ensemble des 5 modules. Une configuration est une partie de M, la partie vide comprise.

D'après le nombre de parties d'un ensemble fini :

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(\mathcal{P}(M))\\&= 2^5 = 32.\end{aligned}$$

Conclusion. 32 configurations sont possibles.

Exactement deux modules

Combien de configurations comportent exactement 2 modules ?

INDICE

Une telle configuration est une combinaison.

CORRIGÉ

Ces configurations sont les parties à 2 éléments de M, c'est-à-dire les combinaisons de 2 modules parmi 5.

D'après le nombre de combinaisons, $C_5^2 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.

Conclusion. 10 configurations comportent exactement 2 modules.

Au moins un module

Combien de configurations comportent au moins un module ?

INDICE

Une seule configuration n'en comporte aucun.

CORRIGÉ

La seule configuration sans module est la partie vide. Les configurations à au moins un module forment le complémentaire, dans $\mathcal{P}(M)$, de l'ensemble réduit à cette partie vide.

Par le complémentaire, leur nombre est $32 - 1 = 31$.

Conclusion. 31 configurations comportent au moins un module.