BURHAN

Dénombrement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/denombrement/cours

Chapitre	Semestre
Dénombrement	Semestre 2

Combien de formules ?

Un snack fictif de ton quartier affiche une formule à petit prix : une entrée, un plat et une boisson. La carte propose 3 entrées, 4 plats et 2 boissons. Le gérant veut imprimer une affiche qui présente chaque formule possible sur une ligne. Combien de lignes doit-il prévoir ?

Devine : Ton estimation

Sans tout écrire, combien de formules différentes le snack peut-il servir ?

A. 9 formules

Faux.
Une formule réunit trois choix faits ensemble. Or $3 + 4 + 2 = 9$ compte les plats de la carte, pas les formules.

B. 24 formules

Juste.
Chaque entrée se combine avec chaque plat, puis chaque couple avec chaque boisson.

C. 12 formules

Faux.
$3 \times 4 = 12$ compte les couples formés d'une entrée et d'un plat. La boisson double encore ce nombre.

Correction

Pour chaque entrée, on a 4 plats possibles : $3 \times 4 = 12$ couples formés d'une entrée et d'un plat.

Pour chacun de ces couples, on a 2 boissons : $12 \times 2 = 24$ formules.

L'affiche compte donc 24 lignes.

Tu viens de compter sans faire la liste. C'est tout l'objet de ce chapitre : compter vite et sans oubli. Tu sauras dire quand on additionne, quand on multiplie, et quand l'ordre compte. Codes d'accès, comités, commandes : tout se compte en une ligne de calcul, à condition de choisir le bon modèle.

Ensembles finis et cardinal

Compter les éléments d'un ensemble

Devine : Deux rayons

Une papeterie fictive range ses articles en deux rayons. Rayon scolaire : cahier, stylo, règle, gomme, classeur. Rayon bureau : stylo, classeur, agrafeuse, trombones. Combien d'articles différents la papeterie vend-elle ?

A. 7 articles

Juste.
Le stylo et le classeur sont dans les deux rayons : on ne les compte qu'une fois.

B. 9 articles

Faux.
$5 + 4 = 9$ compte deux fois le stylo et le classeur, présents dans les deux rayons.

C. 2 articles

Faux.
2 est le nombre d'articles communs aux deux rayons, pas le nombre total d'articles.

Correction
On liste les articles sans répétition : cahier, stylo, règle, gomme, classeur, agrafeuse, trombones. Il y en a 7.

L'addition $5 + 4 = 9$ compte deux fois les 2 articles communs : $9 - 2 = 7$.

Un petit rappel de vocabulaire, au moment où il sert.

- Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, ses **éléments**. On écrit $x \in E$ quand x est un élément de E.
- Une **partie** de E est un ensemble dont tous les éléments sont dans E.
- L'**intersection** $A \cap B$ réunit les éléments communs à A et à B.
- La **réunion** $A \cup B$ réunit les éléments de A ou de B, ou des deux.
- Deux ensembles sans élément commun sont **disjoints**.
- Si A est une partie de E, son **complémentaire** $\overline{A}$ contient les éléments de E qui restent hors de A.

Définition : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est **fini** s'il est vide, ou s'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on puisse numéroter ses éléments de 1 à n, chaque élément recevant un seul numéro et chaque numéro étant employé une seule fois.

L'entier n s'appelle alors le **cardinal** de E : c'est le nombre d'éléments de E. On le note $\mathrm{card}(E)$. Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

Exemple : Compter un rayon

On note S l'ensemble des articles du rayon scolaire et B celui du rayon bureau.

On numérote les articles de B : agrafeuse 1, classeur 2, stylo 3, trombones 4. Chaque article reçoit un seul numéro, donc $\text{card}(B) = 4$. De même, $\text{card}(S) = 5$.

Enfin, $S \cap B$ contient le stylo et le classeur : $\text{card}(S \cap B) = 2$.

Le principe additif

Une classe fictive compte 34 élèves. Chacun suit une seule option : 19 suivent l'option économie, les 15 autres l'option informatique. Pour compter la classe, on ajoute les deux groupes : $19 + 15 = 34$.

Cette addition est juste pour une raison précise : aucun élève n'est dans les deux groupes.

Propriété : Principe additif

Soit A et B deux ensembles finis **disjoints**, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$. Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Plus généralement, si A_1, A_2, ..., A_p sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_p)$.

Remarque : Un principe de départ

Ce résultat est admis. C'est un point de départ du chapitre : on découpe un ensemble en morceaux sans élément commun, on compte chaque morceau, puis on additionne.

Exemple : Trois destinations

Une agence de voyages fictive a vendu ce mois-ci 13 séjours au Maroc, 7 en Europe et 5 en Asie. Chaque séjour a une seule destination : les trois ensembles de séjours sont deux à deux disjoints.

D'après le principe additif, le nombre de séjours vendus est

$$13 + 7 + 5 = 25.$$

Complémentaire et réunion

Retour à la papeterie : le stylo et le classeur sont dans les deux rayons. Additionner les cardinaux des deux rayons fait entrer ces deux articles deux fois dans le total : on enlève donc une fois les articles communs.

Pourquoi est-ce vrai ? On sépare les articles en paquets qui ne se chevauchent pas, et le principe additif fait le compte.

Propriété : Cardinal du complémentaire et de la réunion

Soit E un ensemble fini, et A et B deux parties de E.

- Le **complémentaire** $\overline{A}$ de A dans E (ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A) vérifie

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A).$$

- La réunion de A et B vérifie

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Démonstration

Étape 1. Les ensembles A et $\overline{A}$ sont disjoints et leur réunion est E. D'après le principe additif, $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(\overline{A})$, d'où $\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$.

Étape 2. Soit C l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire $C = B \cap \overline{A}$. Les ensembles $A \cap B$ et C sont disjoints et leur réunion est B. D'après le principe additif, $\operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.

Étape 3. Les ensembles A et C sont disjoints et leur réunion est $A \cup B$. D'après le principe additif, $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On ne soustrait jamais au hasard : on découpe en morceaux disjoints.

- L'ensemble E se coupe en A et $\overline{A}$.
- La réunion $A \cup B$ se coupe en A et en « éléments de B hors de A ».

Le principe additif s'applique ensuite à chaque découpage.

Exemple : Une enquête auprès de clients

Un supermarché fictif interroge 200 clients. Parmi eux, 120 paient par carte, 90 paient en espèces, et 35 utilisent les deux moyens. On note C et S ces deux ensembles de clients.

D'après le cardinal de la réunion :

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(C \cup S) &= 120 + 90 - 35 \\ &= 175. \end{aligned}$$

D'après le cardinal du complémentaire dans l'ensemble des 200 clients, $200 - 175 = 25$ clients n'utilisent ni la carte ni les espèces.

Attention : Deux ensembles qui se recouvrent

✗ « Dans un atelier fictif, 18 salariés parlent anglais, 11 parlent espagnol et 6 parlent les deux : 29 salariés parlent au moins une des deux langues. »

✓ L'addition compte deux fois les 6 salariés bilingues. Le bon compte est $18 + 11 - 6 = 23$ salariés.

On n'additionne directement que des ensembles disjoints.

Au moins un

Méthode : Compter « au moins un » ou plusieurs cas

1. **Repérer la forme de la question** : « au moins un » regroupe plusieurs cas (un, deux, trois…).
2. **Compter le contraire** : le cas « aucun » est le complémentaire, un seul cas à compter.
3. **Soustraire du total** : $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.
4. **Ou découper en cas disjoints** : « exactement un », « exactement deux »… puis additionner, en vérifiant qu'aucun cas n'en recouvre un autre.

Attention : « Au moins un » ou « exactement un » ?

Dans un autre atelier fictif, 17 salariés parlent exactement une des deux langues et 6 parlent les deux.

✗ « 17 salariés parlent au moins une langue. »

✓ « Au moins une » compte aussi ceux qui parlent les deux : $17 + 6 = 23$ salariés.

Pour « au moins un », le plus sûr reste le complémentaire : le total moins ceux qui n'en ont aucun.

À toi : Une salle de sport

Une salle de sport fictive compte 150 abonnés. Parmi eux, 80 suivent le cours de cardio, 65 le cours de musculation, et 40 suivent les deux cours. Combien d'abonnés suivent au moins un des deux cours ? Combien n'en suivent aucun ?

Indice 1
Nomme C et M les deux ensembles d'abonnés. Sont-ils disjoints ?
Indice 2

Calcule $\mathrm{card}(C \cup M)$ avec le cardinal de la réunion.

Indice 3

Point délicat : « aucun des deux cours » est le complémentaire de $C \cup M$, et non celui de C ou de M seul.

Réponse

On note C et M les abonnés du cardio et ceux de la musculation. Ils ne sont pas disjoints : 40 abonnés sont dans les deux.

Au moins un cours. D'après le cardinal de la réunion :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(C \cup M)\\&= 80 + 65 - 40\\&= 105.\end{aligned}$$

Aucun cours. C'est le complémentaire de $C \cup M$. D'après le cardinal du complémentaire dans l'ensemble des 150 abonnés : $150 - 105 = 45$.

Conclusion. 105 abonnés suivent au moins un des deux cours, et 45 n'en suivent aucun.

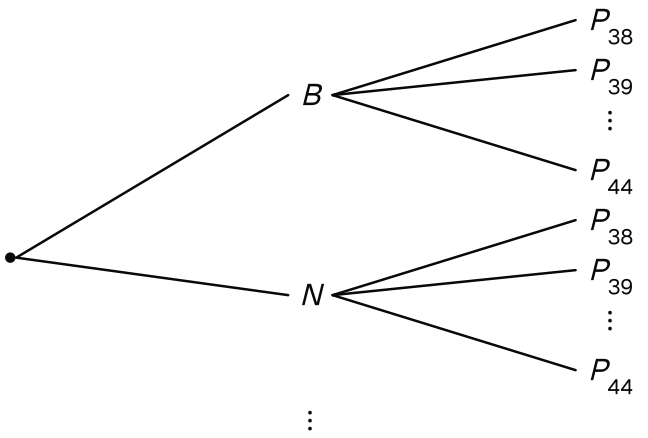
Le principe général du dénombrement

Un arbre de choix

Une marque fictive de baskets décline un modèle en 4 couleurs (blanc, noir, rouge, bleu) et en 7 pointures, de 38 à 44.

Dessine sur ton cahier l'**arbre de choix** de ce modèle. Premier niveau : une branche par couleur. Pour chaque couleur, deuxième niveau : une branche par pointure.

Chaque chemin, de la racine au bout d'une branche, est une paire de baskets différente. Début de l'arbre : blanc, puis 38, 39, ..., 44 ; noir, puis 38, 39, ..., 44 ; et ainsi de suite.



Le début de l'arbre des baskets : B pour blanc et N pour noir, chacune suivie des pointures P_38, P_39 jusqu'à P_44 ; des points remplacent les branches omises.

Devine : Les chemins de l'arbre

Combien de chemins ton arbre compte-t-il ?

A. 11 chemins

Faux.

$4 + 7 = 11$ additionne les couleurs et les pointures. Or chaque couleur porte ses propres branches de pointures.

B. 7 chemins

Faux.

7 est le nombre de branches sous une seule couleur. Chacune des autres couleurs porte aussi ses branches.

C. 28 chemins

Juste.

Chacune des 4 couleurs porte 7 branches de pointures.

Correction

Au premier niveau, il y a 4 branches. Sous chacune, il y a 7 branches de pointures.

Le nombre de chemins est $4 \times 7 = 28$: la marque propose 28 paires différentes de ce modèle.

Le principe général

Propriété : Principe général du dénombrement

On considère une situation qui se réalise par p choix successifs ($p \geq 2$). On suppose que :

- le premier choix peut se faire de n_1 façons ;
- pour chaque façon de faire le premier choix, le deuxième peut se faire de n_2 façons ;
- et ainsi de suite : pour chaque façon de faire les choix précédents, le p-ième choix peut se faire de n_p façons.

Alors le nombre total de façons de réaliser la situation est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Remarque : Un deuxième principe de départ

Ce résultat est admis. Comme le principe additif, il traduit l'arbre de choix : on multiplie les nombres de branches de chaque niveau. Il faut seulement que ce nombre soit le même sous chaque branche du niveau précédent.

Exemple : Un questionnaire de satisfaction

Un questionnaire fictif compte 3 questions. La première a 4 réponses possibles, la deuxième 3, la troisième 5.

Remplir le questionnaire, c'est faire 3 choix successifs ; le nombre de réponses d'une question est le même quelles que soient les réponses déjà données.

D'après le principe général du dénombrement, le nombre de façons de le remplir est

$$4 \times 3 \times 5 = 60.$$

Des branches inégales

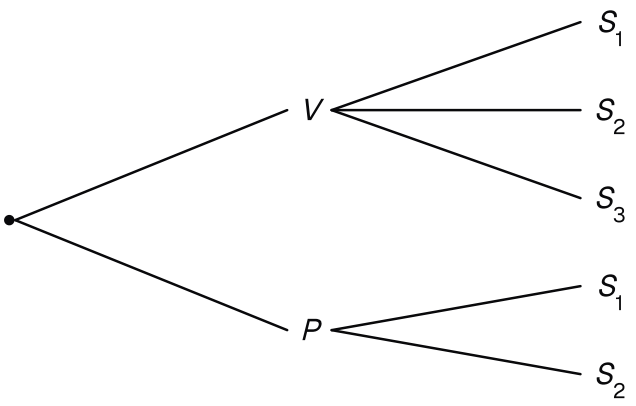
Exemple : Viande ou poisson

Un traiteur fictif propose un plat de viande ou un plat de poisson. Avec la viande, 3 sauces au choix ; avec le poisson, 2 sauces seulement. Voici l'arbre, à recopier sur ton cahier :

- Viande : sauce 1, sauce 2, sauce 3 (3 chemins) ;
- Poisson : sauce 1, sauce 2 (2 chemins).

Le deuxième niveau n'a pas le même nombre de branches partout : on ne peut pas multiplier directement.

On compte les chemins de chaque branche, puis, d'après le principe additif, il y a $3 + 2 = 5$ choix possibles (plat et sauce).



L'arbre du traiteur : V pour la viande, suivie de trois sauces, P pour le poisson, suivi de deux sauces seulement ; 3 + 2 = 5 chemins.

Méthode : Dénombrer avec un arbre de choix

1. **Découper la situation** en choix successifs, dans un ordre fixé.
2. **Décrire l'arbre** : une branche par façon de faire chaque choix ; dessine au moins les premières branches.
3. **Vérifier les niveaux** : chaque choix se fait-il d'un même nombre de façons, quel que soit le chemin suivi ?
4. **Conclure** : si oui, multiplier ces nombres ; sinon, compter les chemins de chaque branche, puis additionner.

Vérifie : Essence ou électrique

Une voiture fictive existe en version essence ou électrique. La version essence se décline en 5 couleurs et 2 boîtes de vitesses. La version électrique existe en 3 couleurs, avec une seule boîte. Combien de voitures différentes peut-on commander ?

A. 20 voitures

Faux.

$2 \times 5 \times 2 = 20$ donne à la version électrique les choix de la version essence. Or ses branches sont différentes.

B. 13 voitures

Juste.

On compte chaque branche de l'arbre, puis on additionne.

C. 30 voitures

Faux.

$5 \times 2 \times 3 = 30$ multiplie des choix qui ne se suivent pas : les 3 couleurs ne concernent que la version électrique.

D. 10 voitures

Faux.

$5 \times 2 = 10$ compte seulement la version essence ; il manque les voitures électriques.

Correction

- Essence : 5 couleurs, puis 2 boîtes pour chacune, soit $5 \times 2 = 10$ voitures d'après le principe général ;
- Électrique : 3 couleurs et une seule boîte, soit 3 voitures.

Les deux branches sont disjointes : d'après le principe additif, il y a $10 + 3 = 13$ voitures.

Couples et listes

Un code de vestiaire fictif s'écrit avec une lettre parmi A, B, C, suivie d'un chiffre de 0 à 9. Un tel code est un **couple** : une lettre, puis un chiffre.

Le résultat suivant compte les couples et, plus largement, les listes ordonnées. Pourquoi est-ce vrai ? Former une liste, c'est faire des choix successifs : le principe général fait le reste.

Propriété : Cardinal d'un produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Alors

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

Plus généralement, si E a n éléments et si p est un entier naturel non nul, une **p-liste** d'éléments de E est une suite ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, distincts ou non. L'ensemble E^p des p -listes d'éléments de E vérifie

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p.$$

Démonstration

Étape 1. Former un couple (x, y) de $E \times F$, c'est faire deux choix successifs : choisir x dans E, de $\mathrm{card}(E)$ façons, puis, pour chaque choix de x, choisir y dans F, de $\mathrm{card}(F)$ façons.

Étape 2. D'après le principe général du dénombrement, il y a $\mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$ couples.

Étape 3. Former une p-liste d'éléments de E, c'est faire p choix successifs, chacun parmi les n éléments de E, quels que soient les choix précédents (les répétitions sont permises). Pour $p = 1$, il y a $n = n^1$ listes ; pour $p \geq 2$, le principe général du dénombrement donne $n \times n \times \cdots \times n = n^p$ listes.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une liste se remplit case par case, et chaque case est un choix. Si les répétitions sont permises, chaque case offre toujours les n mêmes possibilités. Le principe général multiplie alors n par lui-même, une fois par case : n^p.

Exemple : Codes et listes

Codes de vestiaire : la lettre est dans $E = \{A, B, C\}$ et le chiffre dans l'ensemble F des dix chiffres. D'après le cardinal d'un produit cartésien, le nombre de codes est

$$\mathrm{card}(E \times F) = 3 \times 10 = 30.$$

Un code de carte fictif de 4 chiffres, répétitions permises, est une 4-liste de F : il y a $10^4 = 10\,000$ codes.

À toi

À toi : Des plaques de casier

Une plaque de casier fictive porte deux lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, puis trois chiffres. Les répétitions sont permises. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Indice 1
Découpe la plaque en cinq cases : chacune est un choix.
Indice 2
Combien de lettres possibles pour une case ? combien de chiffres ? Écris le produit des cinq nombres de choix.
Indice 3
Point délicat : les répétitions sont permises, donc chaque case garde tous ses choix ; on ne retire rien d'une case à l'autre.

Réponse
Remplir une plaque, c'est faire cinq choix successifs : 26 lettres pour chacune des deux premières cases, 10 chiffres pour chacune des trois suivantes.

D'après le principe général du dénombrement, le nombre de plaques est

$$\begin{aligned} 26^2 \times 10^3 &= 676 \times 1\,000 \\ &= 676\,000. \end{aligned}$$

Conclusion. On peut fabriquer $676\,000$ plaques différentes.

Tu sais maintenant compter un arbre sans le dessiner en entier. Retiens le réflexe : des choix successifs se multiplient, des cas séparés s'additionnent. La suite du chapitre ajoute une contrainte : un élément déjà choisi ne revient plus.

Arrangements et permutations

Un classement

Devine : Un podium

Un concours fictif de création d'entreprise réunit 8 équipes. Le jury attribue une première, une deuxième et une troisième place. Une équipe ne reçoit qu'une place. Combien de podiums différents le jury peut-il former ?

A. 512 podiums

Faux.
$8^3 = 512$ permet à une équipe d'occuper plusieurs places. Or chaque équipe ne reçoit qu'une place.

B. 56 podiums

Faux.
56 compte les groupes de 3 équipes sans tenir compte des places. Or être premier ou troisième, ce n'est pas pareil.

C. 21 podiums

Faux.
$8 + 7 + 6 = 21$ additionne les choix des trois places. Or les places se remplissent l'une après l'autre : les choix se multiplient.

D. 336 podiums

Juste.
8 choix pour la première place, puis 7, puis 6.

Correction

- Première place : 8 équipes possibles.
- Deuxième place : 7, car l'équipe classée première ne peut pas être aussi deuxième.
- Troisième place : 6.

D'après le principe général du dénombrement, le nombre de podiums est

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Dans un podium, l'ordre compte et une équipe ne revient pas. À chaque place, le stock d'équipes baisse d'une unité. C'est la différence avec les codes de la section précédente, où un chiffre pouvait revenir. Pour écrire ces produits de façon courte, il faut un nouvel outil : la factorielle.

Factorielle et arrangement

Définition : Factorielle, arrangement

Pour tout entier naturel non nul n, la **factorielle** de n est le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. Dans un arrangement, l'ordre compte et aucun élément n'est répété. Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments se note A_n^p.

Exemple : Premières factorielles

On calcule chaque factorielle à partir de la précédente : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ et $6! = 6 \times 5! = 720$. La factorielle grandit très vite : $10! = 3\,628\,800$.

Avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la liste $(3, 1, 4)$ est un arrangement de 3 éléments de E. La liste $(3, 1, 3)$ n'en est pas un : le 3 revient.

Attention : Factorielle de zéro

✗ « $0! = 0$, puisqu'il n'y a rien à multiplier. »

✓ Par convention, $0! = 1$. Cette valeur prolonge la règle $n! = n \times (n-1)!$: pour $n = 1$, elle donne $1! = 1 \times 0!$, et comme $1! = 1$, il faut $0! = 1$.

Avec $0! = 0$, cette règle tomberait en défaut, et les calculs de la suite aussi, dans les cas extrêmes où l'on prend tous les éléments ou aucun.

Le nombre d'arrangements

Revenons au podium : 8 équipes possibles pour la première place, puis 7, puis 6. Le nombre de facteurs est le nombre de places.

Pourquoi est-ce vrai en général ? La preuve fait les choix un par un et compte, à chaque choix, les éléments qui restent.

Propriété : Nombre d'arrangements

Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Alors

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Le premier produit compte p facteurs.

Démonstration

Étape 1. Soit E un ensemble à n éléments. Former un arrangement de p éléments de E, c'est faire p choix successifs : le premier élément parmi les n éléments de E ; le deuxième parmi les $n-1$ éléments restants, quel que soit le premier ; et ainsi de suite, le p-ième parmi les $n-p+1$ éléments non encore choisis.

Étape 2. D'après le principe général du dénombrement (pour $p = 1$, il y a directement n arrangements), $A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

Étape 3. Or $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p)!$: pour $p < n$, le second facteur regroupe les entiers de 1 à $n-p$; pour $p = n$, il vaut $0! = 1$. En divisant par $(n-p)!$, qui n'est pas nul, on obtient $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque choix retire un élément du stock : n, puis $n-1$, puis $n-2$, et ainsi de suite. On s'arrête après p facteurs, donc au facteur $n-p+1$. L'écriture avec les factorielles vient de $n! = A_n^p \times (n-p)!$.

Vérifie : Le dernier facteur

On écrit A_{12}^4 comme un produit d'entiers consécutifs, en commençant par 12. Quel est le dernier facteur ?

A. 9

Juste.
Le produit a quatre facteurs : 12, 11, 10 et 9.

B. 8

Faux.
$12 - 4 = 8$ oublie le « $+1$ » : en t'arrêtant à 8, tu écris cinq facteurs.

C. 1

Faux.
Descendre jusqu'à 1 donne $12!$, qui compte les rangements des 12 éléments, pas les listes de 4.

Correction

D'après le nombre d'arrangements, A_{12}^{4} a 4 facteurs et le dernier vaut $12-4+1=9$. Donc

$$A_{12}^{4}=12\times 11\times 10\times 9=11\,880.$$

Exemple : Un bureau d'association

Une association fictive de 11 membres élit un président, un secrétaire et un trésorier, trois postes différents. Un bureau est un arrangement de 3 membres parmi 11 :

$$A_{11}^{3}=11\times 10\times 9=990.$$

Avec les factorielles, on retrouve $\dfrac{11!}{8!}=990$, car $11!=11\times 10\times 9\times 8!$.

Les permutations

Une vitrine fictive expose 5 produits côte à côte. Un rangement de la vitrine est une liste qui utilise les 5 produits, chacun une seule fois. C'est un arrangement de 5 éléments parmi 5.

Pourquoi est-ce vrai que leur nombre est une factorielle ? On applique le nombre d'arrangements avec $p=n$.

Propriété : Nombre de permutations

Soit E un ensemble à n éléments ($n\geq 1$). Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E : c'est une façon de ranger tous les éléments de E dans un ordre. Le nombre de permutations de E est

$$n!.$$

Démonstration

Étape 1. Une permutation de E est un arrangement de n éléments de E : leur nombre est A_n^n.

Étape 2. D'après le nombre d'arrangements, avec $p=n$, $A_n^n=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}=n!$, car $0!=1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une permutation est un arrangement où l'on prend tous les éléments : $p=n$. La convention $0!=1$ fait le reste, puisque $(n-n)!=0!=1$.

Exemple : Ranger une vitrine

La vitrine se range de $5!=120$ façons.

Si le produit vedette doit rester au centre, on range seulement les 4 autres produits : $4! = 24$ façons.

À toi : Un code à chiffres distincts

Un code d'accès fictif comporte 4 chiffres **tous différents**, pris parmi les 10 chiffres. Combien de codes différents existe-t-il ? Combien d'entre eux commencent par 7 ?

Indice 1
L'ordre compte et aucun chiffre ne revient : quel objet du cours compte ces codes ?
Indice 2
Calcule A_{10}^{4} en écrivant ses 4 facteurs.
Indice 3
Point délicat : pour les codes qui commencent par 7, la première case est imposée. Combien de cases restent à remplir, et combien de chiffres sont encore disponibles ?

Réponse
Tous les codes. Un code est un arrangement de 4 chiffres parmi 10. D'après le nombre d'arrangements, le nombre de codes est

$$\begin{aligned} A_{10}^{4} &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 5\,040. \end{aligned}$$

Codes qui commencent par 7. La première case est imposée ; on choisit les 3 autres chiffres, dans l'ordre, parmi les 9 restants : $A_{9}^{3} = 9 \times 8 \times 7 = 504$ codes.

Conclusion. Il existe $5\,040$ codes, dont 504 commencent par 7.

Les combinaisons

Un groupe sans ordre

Une coopérative fictive de 5 membres, Amal, Badr, Chama, Driss et Elias, envoie 2 délégués à un salon. Les deux délégués ont le même rôle. Envoyer Amal et Badr, ou Badr et Amal, c'est la même délégation.

Devine : Les délégations

Combien de délégations différentes la coopérative peut-elle envoyer ?

A. 20 délégations
Faux.
$5 \times 4 = 20$ compte les listes ordonnées : chaque délégation y apparaît sous deux ordres.

B. 25 délégations
Faux.
$5^2 = 25$ autorise à envoyer deux fois la même personne, et tient compte de l'ordre.

C. 10 délégations

Juste.

Chaque délégation correspond à deux listes ordonnées : $\frac{20}{2} = 10$.

Correction

On liste les délégations par initiales, dans l'ordre alphabétique : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$, $\{D, E\}$. Il y en a 10.

Le calcul $5 \times 4 = 20$ compte chaque délégation deux fois, une fois par ordre.

Combinaison

Définition : Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une **partie** de E qui a p éléments. Dans une combinaison, l'ordre ne compte pas et aucun élément n'est répété.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments se note C_n^p.

Exemple : Parties et listes

Avec $E = \{A, B, C, D\}$, la partie $\{A, C\}$ est une combinaison de 2 éléments de E. Elle s'écrit aussi $\{C, A\}$: c'est le même ensemble. Au contraire, (A, C) et (C, A) sont deux arrangements différents.

Les combinaisons de 3 éléments de E sont $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$ et $\{B, C, D\}$: donc $C_4^3 = 4$.

Le nombre de combinaisons

Dans la coopérative, chaque délégation de 2 personnes donne $2! = 2$ listes ordonnées. Il y a donc deux fois plus de listes que de délégations.

Pourquoi est-ce vrai en général ? La preuve range les éléments de chaque partie de toutes les façons possibles.

Propriété : Nombre de combinaisons

Soit n un entier naturel non nul et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Alors

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

En particulier, pour $1 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$.

Démonstration

Étape 1. Soit E un ensemble à n éléments et $1 \leq p \leq n$. Former un arrangement de p éléments de E, c'est faire deux choix successifs : choisir la partie formée de ses p éléments, de C_n^p façons ; puis, pour chaque partie, ranger ses p éléments dans un ordre, de $p!$ façons d'après le nombre de permutations. Chaque arrangement est obtenu ainsi une seule fois.

Étape 2. D'après le principe général du dénombrement, $A_n^p = C_n^p \times p!$, donc $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ d'après le nombre d'arrangements.

Étape 3. Pour $p = 0$, la seule partie de E à 0 élément est l'ensemble vide, donc $C_n^0 = 1$; et $\dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$. La formule est encore vraie.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour obtenir un arrangement, on choisit d'abord quels éléments prendre, sans ordre, puis on les range. Chaque partie à p éléments donne $p!$ arrangements. Diviser A_n^p par $p!$ efface l'ordre.

Vérifie : Un audit

Un responsable fictif choisit 4 dossiers parmi 10 pour un audit, sans les classer. Quel calcul donne le nombre de choix possibles ?

A. $10 \times 9 \times 8 \times 7$

Faux.
Ce produit vaut A_{10}^4 : il compte les listes ordonnées de dossiers. Or les dossiers ne sont pas classés.

B. $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}$

Juste.
On divise les listes ordonnées par les $4!$ ordres de chaque groupe de dossiers.

C. 10^4

Faux.
10^4 autorise à choisir plusieurs fois le même dossier, et tient compte de l'ordre.

D. $\dfrac{10!}{4!}$

Faux.
Il manque $6!$ au dénominateur : $\dfrac{10!}{4!\,6!}$ est la bonne écriture avec les factorielles.

Correction

Les dossiers forment un groupe sans ordre : une combinaison de 4 éléments parmi 10. D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_{10}^{4} &= \frac{A_{10}^{4}}{4!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{24} \\ &= \frac{5\,040}{24} \\ &= 210. \end{aligned}$$

Exemple : Un lot d'échantillons

Un magasin fictif choisit 3 produits parmi 9 pour un lot d'échantillons gratuits, sans ordre. D'après le nombre de combinaisons, le nombre de lots possibles est

$$\begin{aligned} C_{9}^{3} &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} \\ &= \frac{504}{6} \\ &= 84. \end{aligned}$$

À toi

Attention : L'ordre compte-t-il ?

Reprends le concours de création d'entreprise et ses 8 équipes.

✗ « Le jury distingue 3 équipes lauréates ex aequo : $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités. »

✓ Des lauréats ex aequo forment un groupe sans ordre : $C_{8}^{3} = \dfrac{336}{3!} = 56$.

On divise par $p!$ seulement quand l'ordre ne compte pas. Pour un podium à trois places différentes, 336 est la bonne réponse.

À toi : Un groupe de travail

Un service d'une entreprise fictive compte 6 femmes et 4 hommes. On forme un groupe de travail de 3 personnes. Combien de groupes différents peut-on former ? Combien comptent exactement 2 femmes ?

Indice 1
Un groupe de travail n'a pas d'ordre : quel objet du cours le compte ?
Indice 2
Pour « exactement 2 femmes », le groupe compte aussi 1 homme : de combien de façons choisir chacune des deux parties du groupe ?
Indice 3
Point délicat : le choix des femmes et le choix de l'homme se suivent. Que fais-tu de leurs deux nombres ?

Réponse

Tous les groupes. Un groupe de travail n'a pas d'ordre : c'est une combinaison de 3 personnes parmi 10. D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_{10}^{3} &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} \\ &= \frac{720}{6} \\ &= 120. \end{aligned}$$

Exactement 2 femmes. On choisit 2 femmes parmi 6, puis 1 homme parmi 4. D'après le principe général du dénombrement :

$$C_{6}^{2} \times C_{4}^{1} = 15 \times 4 = 60.$$

Conclusion. On peut former 120 groupes, dont 60 comptent exactement 2 femmes.

Tu sais maintenant reconnaître un groupe sans ordre. Le test est simple : échange deux personnes du groupe. Si rien ne change, l'ordre ne compte pas, et tu comptes des combinaisons.

Choisir le bon modèle

Trois façons de tirer

Devine : Avec remise

Un sac contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. On tire un jeton, on note son numéro, puis on le **remet** dans le sac. On tire alors un deuxième jeton et on note son numéro. Combien de résultats possibles, notés dans l'ordre ?

A. 36 résultats

Juste.
Le premier jeton est remis : le second tirage a encore 6 issues.

B. 30 résultats

Faux.
$6 \times 5 = 30$ suppose que le premier jeton reste hors du sac. Ici, il est remis.

C. 15 résultats

Faux.
15 compte les paires de jetons distincts sans ordre ; ici, l'ordre est noté et un numéro peut revenir.

D. 12 résultats

Faux.
$6 + 6 = 12$ additionne les issues des deux tirages. Or ils se suivent : leurs nombres d'issues se multiplient.

Correction

> Chaque résultat est une 2-liste de numéros, répétitions permises. D'après le cardinal d'un produit cartésien, il y a $6^2 = 36$ résultats.

Change maintenant une règle. **Sans remise**, le premier jeton reste hors du sac : un numéro ne peut pas revenir. Dans un tirage **simultané**, on prend une poignée de jetons d'un coup : il n'y a plus d'ordre.

Deux questions décident du modèle : l'ordre compte-t-il ? un élément peut-il revenir ?

Le tableau des trois modèles

Exemple : Trois tirages, trois nombres

On tire 3 jetons d'un sac de 7 jetons numérotés.

Tirage	Ordre	Répétition	Modèle	Nombre de tirages
successifs avec remise	oui	oui	3-listes	$7^3 = 343$
successifs sans remise	oui	non	arrangements	$A_7^3 = 210$
simultané	non	non	combinaisons	$C_7^3 = 35$

Calculs :

$$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

et

$$C_7^3 = \frac{210}{3!} = 35.$$

Méthode : Choisir le modèle

1. **Échanger deux éléments** : si le résultat change (code, classement, postes différents), l'ordre compte.
2. **Chercher une répétition** : si un même élément peut servir deux fois (remise, chiffre réutilisable), la répétition est permise.
3. **Lire le modèle** : ordre et répétition donnent des p-listes, n^p ; ordre sans répétition, des arrangements, A_n^p ; ni l'un ni l'autre, des combinaisons, C_n^p.

Exemple : Trois nombres liés

Les trois nombres du tableau sont liés. Chaque poignée de 3 jetons se range de $3! = 6$ façons : $35 \times 6 = 210$ tirages sans remise.

Les tirages avec remise comptent en plus ceux où un numéro revient : $343 - 210 = 133$ tirages ont au moins une répétition.

Quel modèle ?

Vérifie : Un code client

Une enseigne fictive donne à chaque client un code secret de 4 chiffres ; un chiffre peut revenir. Quel modèle compte ces codes ?

A. Des arrangements : A_{10}^{4}

Faux.

Un arrangement interdit les répétitions ; ici, 0707 est un code permis.

B. Des combinaisons : C_{10}^{4}

Faux.

Dans un code, l'ordre compte : 1234 et 4321 sont deux codes différents.

C. Des 4-listes : 10^{4}

Juste.

L'ordre compte et un chiffre peut revenir.

Correction

L'ordre compte et un chiffre peut revenir : un code est une 4-liste de l'ensemble des dix chiffres. Il y a $10^{4} = 10\,000$ codes.

Vérifie : Une équipe projet

Une direction fictive désigne 3 commerciaux parmi 12 pour former une équipe projet. Quel modèle compte ses choix ?

A. Des combinaisons : C_{12}^{3}

Juste.

Échanger deux membres ne change pas l'équipe, et personne n'y figure deux fois.

B. Des arrangements : A_{12}^{3}

Faux.

Les trois membres ont le même statut : échanger deux d'entre eux donne la même équipe.

C. Des 3-listes : 12^{3}

Faux.

Un commercial ne peut pas figurer deux fois dans l'équipe, et l'ordre ne compte pas.

Correction

Échange deux commerciaux de l'équipe : elle reste la même, donc l'ordre ne compte pas, et personne n'est désigné deux fois. Ni ordre ni répétition : c'est une combinaison.

D'après le nombre de combinaisons, le nombre d'équipes est

$$C_{12}^{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220.$$

Vérifie : Trois primes

Une direction fictive attribue 3 primes différentes, or, argent et bronze, à 3 vendeurs distincts parmi 15. Quel modèle compte les attributions ?

A. Des combinaisons : C_{15}^{3}

Faux.

Les primes sont différentes : recevoir l'or ou le bronze change l'attribution.

B. Des arrangements : A_{15}^{3}

Juste.

L'ordre compte, car les primes sont différentes, et un vendeur ne reçoit qu'une prime.

C. Des 3-listes : 15^{3}

Faux.

Un vendeur ne peut pas recevoir deux primes.

Correction

Ordre sans répétition : c'est un arrangement. D'après le nombre d'arrangements, le nombre d'attributions est

$$A_{15}^{3} = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730.$$

Trouve l'erreur : Une poignée de jetons

Pour compter les poignées de 2 jetons pris **ensemble** dans le sac de 6 jetons, Hamid écrit $6 \times 6 = 36$. Quel est le bon compte ?

A. $6 + 6 = 12$: il fallait additionner.

Faux.

Les deux jetons sont pris ensemble, pas dans deux cas séparés : on n'additionne pas.

B. $6 \times 5 = 30$: il fallait interdire la répétition.

Faux.

30 interdit bien la répétition, mais compte encore chaque poignée sous deux ordres.

C. 15 : il fallait aussi effacer l'ordre.

Juste.

Une poignée n'a ni ordre ni répétition : c'est une combinaison.

Correction

Une poignée de 2 jetons est une partie à 2 éléments du sac. D'après le nombre de combinaisons, le nombre de poignées est

$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2!} = 15.$$

Le calcul 6×6 compte des couples ordonnés où un jeton peut revenir.

À toi

À toi : Des tee-shirts

Une boutique fictive vend 9 modèles de tee-shirts. Compte, en nommant chaque fois le modèle de dénombrement :

(a) les lots de 2 modèles différents, sans ordre ;

(b) le choix du modèle de la semaine puis de celui du mois, qui doivent être différents ;

(c) le choix du modèle de lundi puis de celui de mardi, un même modèle pouvant revenir.

Indice 1
Pour chaque cas, pose les deux questions : l'ordre compte-t-il ? un modèle peut-il revenir ?
Indice 2
Le cas (a) n'a pas d'ordre ; le cas (b) a un ordre, sans répétition ; le cas (c) a un ordre, avec répétition.
Indice 3
Point délicat : en (b), le mot « différents » interdit la répétition ; en (c), l'énoncé l'autorise.

Réponse
(a) Ni ordre ni répétition : des combinaisons, d'où $C_9^2 = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ lots.

(b) Ordre sans répétition : des arrangements, d'où $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$ choix.

(c) Ordre avec répétition : des 2-listes, d'où $9^2 = 81$ choix.

Retiens l'ordre des deux questions : d'abord l'ordre, puis la répétition.

Pour les mêmes n et p, avec $2 \leq p \leq n$, les p-listes sont les plus nombreuses et les combinaisons les moins nombreuses. Un résultat qui contredit ce classement signale une erreur de modèle.

Propriétés des coefficients

Observer un tableau

Voici les valeurs de C_8^p pour p de 0 à 8, calculées avec le nombre de combinaisons.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_8^p	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Devine : Une régularité

Quelle régularité lis-tu dans ce tableau ?

A. Les valeurs se répètent en miroir autour de la case du milieu.

Juste.
$C_8^1 = C_8^7$, $C_8^2 = C_8^6$ et $C_8^3 = C_8^5$.

B. Les valeurs augmentent avec p, de la première à la dernière.

Faux.
Elles augmentent jusqu'à $p = 4$, puis elles redescendent.

C. Les valeurs sont les puissances successives de 2.

Faux.
$C_8^1 = 8$ et non $2^1 = 2$, puis $C_8^2 = 28$ et non $2^2 = 4$: ce ne sont pas des puissances de 2.

Correction
Les valeurs se lisent de la même façon dans les deux sens : $C_8^p = C_8^{8-p}$ pour chaque p du tableau. Par exemple, $C_8^3 = C_8^5 = 56$.

Le résultat suivant dit que c'est vrai pour tout n.

La symétrie

Choisir les 3 produits qu'on garde parmi 8, c'est aussi choisir les 5 qu'on écarte. Il y a donc autant de façons de faire l'un que l'autre.

Pourquoi est-ce vrai par le calcul ? La preuve remplace p par $n - p$ dans le nombre de combinaisons.

Propriété : Premières propriétés des coefficients

Soit n un entier naturel non nul.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = n$.
- Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$C_n^{n-p} = C_n^p.$$

Démonstration

Étape 1. D'après le nombre de combinaisons, $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$, $C_n^n = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$ et $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$, car $n! = n \times (n-1)!$.

Étape 2. Soit $0 \leq p \leq n$. Alors $0 \leq n-p \leq n$ et, d'après le nombre de combinaisons, $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Dans $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, les nombres p et $n-p$ jouent le même rôle. Les échanger ne change pas la fraction : c'est toute la symétrie.

Exemple : Gagner du temps

D'après la symétrie :

$$\begin{aligned} C_{20}^{18} &= C_{20}^{2} \\ &= \frac{20 \times 19}{2} \\ &= 190. \end{aligned}$$

Calculer avec 18 facteurs au numérateur serait long ; la symétrie ramène le calcul à 2 facteurs. De même, $C_{15}^{1} = 15$ et $C_{15}^{15} = 1$.

La relation de Pascal

Dans le tableau, $28 + 56 = 84$. Or $84 = C_9^3$: deux cases voisines de la ligne 8 donnent une case de la ligne 9.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve réduit deux fractions au même dénominateur.

Propriété : Relation de Pascal

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n-1$. Alors

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}.$$

Démonstration

Étape 1. D'après le nombre de combinaisons, $C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$ et $C_{n-1}^{p} = \dfrac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$.

Étape 2. Comme $p \geq 1$ et $n-p \geq 1$, on a $p! = p \times (p-1)!$ et $(n-p)! = (n-p) \times (n-1-p)!$. On réduit au dénominateur commun $p!\,(n-p)!$:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)! \times p}{p!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n-1)! \times n}{p!\,(n-p)!}.$$

Étape 3. Or $(n-1)! \times n = n!$, donc la somme vaut $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On met les deux fractions au même dénominateur $p!\,(n-p)!$. Les numérateurs font apparaître p et $n-p$, dont la somme vaut n. Il reste $(n-1)! \times n = n!$.

Vérifie : La bonne égalité

Quelle égalité est la relation de Pascal pour $n = 9$ et $p = 4$?

A. $C_9^4 = C_8^4 + C_8^4$

Faux.

Les deux termes n'ont pas le même exposant : $p - 1 = 3$ et $p = 4$. Ici, $70 + 70 = 140$, alors que $C_9^4 = 126$.

B. $C_9^4 = C_8^3 + C_8^4$

Juste.

Ligne 8, cases $p - 1 = 3$ et $p = 4$: $56 + 70 = 126$.

C. $C_9^4 = C_9^3 + C_8^4$

Faux.

Les deux termes viennent de la ligne $n - 1 = 8$. Ici, $84 + 70 = 154$.

D. $C_9^4 = C_8^3 \times C_8^4$

Faux.

La relation additionne ; le produit 56×70 dépasse de loin 126.

Correction

D'après la relation de Pascal avec $n = 9$ et $p = 4$:

$$\begin{aligned} C_9^4 &= C_8^3 + C_8^4 \\ &= 56 + 70 \\ &= 126. \end{aligned}$$

On vérifie avec le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_9^4 &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} \\ &= \frac{3\,024}{24} \\ &= 126. \end{aligned}$$

Le triangle de Pascal

Exemple : Construire le triangle

On range les C_n^p ligne par ligne. Chaque ligne commence et finit par 1. D'après la relation de Pascal, chaque case intérieure est la somme de deux cases de la ligne précédente : celle de la même colonne, et celle de la colonne juste à gauche.

n	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le tableau des C_n^p jusqu'à la ligne 6 ; les cases teintées montrent comment 20 naît des deux 10 placés juste au-dessus de lui et à sa gauche.

Exemple : Lire une case

Prends la case de la ligne 6 et de la colonne $p=3$. Dans la ligne 5, on lit 10 en colonne $p=2$ et 10 en colonne $p=3$. D'après la relation de Pascal :

$$\begin{aligned} C_6^3 &= C_5^2 + C_5^3 \\ &= 10 + 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Méthode : Calculer un coefficient

1. **Écrire seulement p facteurs en haut** : $C_n^p = \dfrac{N}{p!}$, où $N = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$, puis simplifier avant de multiplier.
2. **Prendre le plus petit** des deux nombres p et $n-p$, grâce à la symétrie.

3. **Lire le triangle** pour les petites valeurs de n, en le prolongeant au besoin par la relation de Pascal.

À toi : Une ligne de plus

Calcule C_{12}^{10}. Écris ensuite la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal à partir de la ligne $n = 6$.

Indice 1
Pour C_{12}^{10}, cherche d'abord un coefficient égal et plus simple à calculer.
Indice 2
Pour la ligne 7, additionne deux cases voisines de la ligne 6 : $1 + 6$, puis $6 + 15$, et ainsi de suite.
Indice 3
Point délicat : les deux bords de la ligne valent 1, car $C_7^0 = C_7^7 = 1$; la relation de Pascal ne sert qu'à l'intérieur.

Réponse
Calcul de C_{12}^{10}. D'après la symétrie :

$$\begin{aligned} C_{12}^{10} &= C_{12}^{2} \\ &= \frac{12 \times 11}{2} \\ &= 66. \end{aligned}$$

Ligne 7. Les deux bords valent 1. D'après la relation de Pascal, chaque case intérieure est la somme de deux cases voisines de la ligne 6 : $1 + 6 = 7$, $6 + 15 = 21$, $15 + 20 = 35$, $20 + 15 = 35$, $15 + 6 = 21$, $6 + 1 = 7$.

Conclusion. $C_{12}^{10} = 66$, et la ligne 7 est $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$.

La formule du binôme

Développer une puissance

Devine : Le cube d'une somme

Tu connais $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. En développant $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$, quel coefficient trouves-tu devant a^2b ?

A. 2

Faux.
$a \times 2ab$ donne bien $2a^2b$, mais $b \times a^2$ donne encore un terme a^2b.

B. 3

Juste.
$a \times 2ab$ et $b \times a^2$ donnent $2a^2b + a^2b = 3a^2b$.

C. 1

Faux.
Le terme a^2b apparaît dans plusieurs produits : il faut regrouper les termes semblables.

Correction
On développe :

$$\begin{aligned}&(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2\\&\quad+a^2b+2ab^2+b^3.\end{aligned}$$

En regroupant les termes semblables :

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Le coefficient de a^2b est 3.

Range les coefficients du carré : $1, 2, 1$. C'est la ligne $n=2$ du triangle de Pascal.

Ce n'est pas un hasard : le résultat suivant relie chaque puissance de $a+b$ à une ligne du triangle.

La formule

Théorème : Formule du binôme

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}\, b^p = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n\, b^n,$$

avec la convention $x^0=1$ pour tout réel x.

Démonstration
Idée de la preuve. On écrit $(a+b)^n$ comme le produit de n facteurs égaux à $a+b$. En développant, on choisit dans chaque facteur soit a, soit b, et on multiplie les termes choisis. On obtient $a^{n-p}\,b^p$ chaque fois que b est choisi dans exactement p facteurs. Choisir ces p facteurs parmi les n, c'est choisir une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments : il y a C_n^p façons de le faire, d'après la définition d'une combinaison. Le terme $a^{n-p}\,b^p$ apparaît donc C_n^p fois. Étape omise : la justification détaillée du développement d'un produit de n facteurs par distributivité répétée, admise ici.

Remarque : Une preuve esquissée

Sous l'énoncé, tu trouves l'idée de la preuve, pas une preuve complète. On choisit dans quels facteurs on prend b : ce choix est une combinaison. Le développement détaillé d'un produit de n facteurs est admis.

Exemple : Une puissance quatrième

Pour $(x+2)^4$, on prend $a=x$, $b=2$ et $n=4$. La ligne 4 du triangle donne $1, 4, 6, 4, 1$. D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= x^4 + 4\times 2\,x^3 \\ &\quad + 6\times 2^2\,x^2 \\ &\quad + 4\times 2^3\,x + 2^4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 \\ &\quad + 32x + 16.\end{aligned}$$

Avec un signe moins

Méthode : Développer avec la formule du binôme

1. **Repérer a, b et n** en gardant le signe : pour $(x-5)^3$, on prend $b=-5$.
2. **Écrire la ligne n du triangle** : ce sont les coefficients C_n^0, …, C_n^n.
3. **Écrire chaque terme** $C_n^p\,a^{n-p}\,b^p$: l'exposant de a descend de n à 0, celui de b monte de 0 à n.
4. **Contrôler** avec une valeur simple, par exemple $x=1$ dans les deux membres.

Attention : Les signes d'une puissance de différence

✗ $(x-3)^3 = x^3 - 9x^2 - 27x - 27$.

✓ On applique la formule avec $b=-3$: $(-3)^p$ vaut 3^p quand p est pair et -3^p quand p est impair, par exemple $(-3)^2 = 9$. Les signes $+$ et $-$ alternent donc devant les termes :

$$(x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27.$$

Dans chaque terme, les exposants de x et de -3 ont pour somme 3.

Vérifie : Un développement à choisir

Quel est le développement de $(3x-1)^3$?

A. $27x^3 - 27x^2 - 9x - 1$

Faux.
Le terme en x contient $(-1)^2 = 1$: il est positif.

B. $3x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Faux.
$(3x)^3 = 27x^3$, et non $3x^3$: la puissance porte aussi sur le facteur 3.

C. $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

Juste.
Avec $a = 3x$ et $b = -1$, les signes alternent.

D. $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
Faux.
C'est le développement de $(3x + 1)^3$: le signe de b a disparu.

Correction
On prend $a = 3x$, $b = -1$ et $n = 3$; la ligne 3 du triangle donne 1, 3, 3, 1. D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(3x - 1)^3 &= (3x)^3 \\ &\quad + 3 \times (3x)^2 \times (-1) \\ &\quad + 3 \times 3x \times (-1)^2 \\ &\quad + (-1)^3 \\ &= 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1.\end{aligned}$$

Un terme précis

Exemple : Le coefficient d'un terme

On cherche le coefficient de x^3 dans $(x + 2)^7$. Chaque terme s'écrit $C_7^p \, x^{7-p} \, 2^p$. On veut $7 - p = 3$, donc $p = 4$.

Le coefficient est $C_7^4 \times 2^4 = 35 \times 16 = 560$.

Vérifie : Un autre terme

Quel est le coefficient de x^4 dans $(x + 3)^6$?

A. 135
Juste.
Le terme cherché correspond à $p = 2$: $C_6^2 \times 3^2 = 15 \times 9$.

B. 15
Faux.
$15 = C_6^2$ oublie le facteur 3^2 apporté par b.

C. 45
Faux.
15×3 prend 3 au lieu de 3^2 : pour $p = 2$, b est élevé au carré.

Correction
Chaque terme s'écrit $C_6^p \, x^{6-p} \, 3^p$. On veut $6 - p = 4$, donc $p = 2$.

Le coefficient est $C_6^2 \times 3^2 = 15 \times 9 = 135$.

À toi : À toi de développer

Développe $(x-1)^5$, puis donne le coefficient de x^2.

Indice 1
Repère $a = x$, $b = -1$ et $n = 5$, puis lis la ligne 5 du triangle.
Indice 2
Chaque terme vaut $C_5^p\, x^{5-p}\,(-1)^p$.
Indice 3
Point délicat : le signe de chaque terme est celui de $(-1)^p$. Quel p donne x^2, et que vaut $(-1)^p$ pour ce p ?

Réponse
Développement. On prend $a = x$, $b = -1$ et $n = 5$; la ligne 5 du triangle donne $1, 5, 10, 10, 5, 1$. Comme $(-1)^p$ vaut 1 pour p pair et -1 pour p impair, la formule du binôme donne :

$$\begin{aligned}(x-1)^5 &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 \\ &\quad - 10x^2 + 5x - 1.\end{aligned}$$

Coefficient de x^2. Il correspond à $p = 3$: il vaut $C_5^3 \times (-1)^3 = -10$.

Tu sais maintenant développer une puissance d'une somme ou d'une différence, et isoler un terme sans tout développer.

Avec $a = b = 1$, la formule du binôme donne aussi la somme d'une ligne du triangle : la section suivante s'en sert.

Le nombre de parties d'un ensemble

Lister les parties

Une voiture fictive se vend avec trois options : toit ouvrant t, GPS g et radar de recul r. Un client peut n'en prendre aucune, une, deux ou les trois. Chaque façon d'équiper la voiture est une partie de l'ensemble $E = \{t, g, r\}$.

Devine : Les équipements

Combien d'équipements différents le client peut-il choisir ?

A. 7 équipements
Faux.
Tu as oublié la voiture sans aucune option : c'est aussi un équipement possible.

B. 6 équipements
Faux.
$3! = 6$ compte les façons de ranger les trois options dans un ordre, pas les choix d'options.

C. 8 équipements

Juste.
On compte aussi la voiture sans option et celle qui a les trois.

D. 3 équipements

Faux.
3 compte seulement les voitures à une seule option. Un client peut aussi en prendre deux, trois, ou aucune.

Correction
On liste les parties de $E = \{t, g, r\}$ selon leur nombre d'éléments : $\varnothing$; $\{t\}$, $\{g\}$, $\{r\}$; $\{t, g\}$, $\{t, r\}$, $\{g, r\}$; $\{t, g, r\}$.

D'après le principe additif, il y a $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ équipements.

Le nombre de parties

Pour chaque option, le client répond par oui ou par non. Trois options, deux réponses possibles pour chacune.

Pourquoi est-ce vrai pour tout ensemble fini ? La preuve transforme chaque partie en une suite de réponses oui ou non.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 0$). L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, a 2^n éléments :

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul n, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Démonstration
Étape 1. Si $n = 0$, E est vide et sa seule partie est $\varnothing$: $\mathcal{P}(E)$ a $1 = 2^0$ élément.

Étape 2. Si $n \geq 1$, on note e_1, ..., e_n les éléments de E. Une partie X de E est déterminée par les réponses, oui ou non, à « e_k est-il dans X ? » pour k de 1 à n ; deux suites de réponses différentes donnent deux parties différentes. Chaque question a 2 réponses, quelles que soient les précédentes : d'après le principe général du dénombrement (pour $n = 1$, directement), il y a 2^n parties.

Étape 3. Pour p de 0 à n, les parties à p éléments sont au nombre de C_n^p ; ces $n + 1$ familles sont deux à deux disjointes et leur réunion est $\mathcal{P}(E)$. D'après le principe additif, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

> Une partie se décrit élément par élément : dedans ou dehors. Chaque élément offre 2 possibilités, et le principe général les multiplie. La formule du binôme ne sert pas dans cette preuve.

Exemple : Les suppléments d'un burger

Un restaurant fictif propose 6 suppléments pour un burger. Un client peut en prendre autant qu'il veut, de zéro à six.

Une commande est une partie de l'ensemble des 6 suppléments : d'après le nombre de parties, il y a $2^6 = 64$ commandes différentes.

Vérifier avec le binôme

Exemple : Une vérification

Avec $a = b = 1$ et $n = 6$, la formule du binôme donne $(1+1)^6 = C_6^0 + C_6^1 + \cdots + C_6^6$. La ligne 6 du triangle donne

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64,$$

et $2^6 = 64$. Les deux méthodes s'accordent.

> **À toi : Des filtres de recherche**
>
> Un site de livraison fictif propose 5 filtres de recherche : prix, distance, note, promotion, livraison gratuite. Un réglage consiste à activer certains filtres, éventuellement aucun. Combien de réglages différents existe-t-il ? Combien activent au moins deux filtres ?
>
> **Indice 1**
> Pour chaque filtre, activé ou non : combien de possibilités ?
> **Indice 2**
> Pour « au moins deux », compte le contraire : aucun filtre, ou un seul.
> **Indice 3**
> Point délicat : le réglage sans aucun filtre est une partie, la partie vide ; il faut l'enlever aussi.
>
> **Réponse**
> **Tous les réglages.** Un réglage est une partie de l'ensemble des 5 filtres. D'après le nombre de parties, il y a $2^5 = 32$ réglages.
>
> **Au moins deux filtres.** Le contraire est « aucun filtre ou un seul », soit $C_5^0 + C_5^1 = 1 + 5 = 6$ réglages. D'après le cardinal du complémentaire, $32 - 6 = 26$ réglages activent au moins deux filtres.
>
> **Conclusion.** Il existe 32 réglages, dont 26 activent au moins deux filtres.

Tu sais maintenant compter toutes les parties d'un ensemble d'un seul coup : 2^n.

Pour une contrainte de taille, comme « au moins deux » ou « au plus trois », combine ce total avec les coefficients C_n^p et le complémentaire.

Synthèse : compter sans se tromper

> **À retenir : Les trois modèles de tirage**
>
> On choisit p éléments parmi n.
>
Tirage	Ordre	Répétition	Modèle	Nombre
successifs avec remise	compte	permise	p-listes	n^p
successifs sans remise	compte	interdite	arrangements	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
simultanés	ne compte pas	interdite	combinaisons	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$
>
> Cas particulier : ranger les n éléments, c'est une permutation ; il y en a $n!$.

Les réflexes du chapitre tiennent en quelques questions.

Question	Réflexe
Des cas séparés, sans élément commun ?	additionner (principe additif)
Deux ensembles qui se recouvrent ?	retirer l'intersection une fois
« Au moins un » ?	le total moins « aucun »
Des choix successifs ?	multiplier, ou compter les chemins de l'arbre
Un coefficient C_n^p ?	simplifier, symétrie, triangle de Pascal
Une puissance de $a+b$?	formule du binôme, signe de b compris
Toutes les parties d'un ensemble ?	2^n

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dénombrement » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)