BURHAN

Résumé : Calcul matriciel

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/resume

Chapitre	Semestre
Calcul matriciel	Semestre 2

Matrices carrées et matrices colonnes

Définition : Matrice carrée, matrice colonne

Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq 4$. Une **matrice carrée d'ordre** n est un tableau carré de n^2 nombres réels, rangés en n lignes et n colonnes et écrits entre parenthèses. Le réel placé à la ligne i et à la colonne j s'appelle le **coefficient** a_{ij} de la matrice. Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Une **matrice colonne** à n lignes est un tableau de n réels rangés en une seule colonne, par exemple $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Deux matrices de même format (deux matrices carrées de même ordre, ou deux matrices colonnes de même nombre de lignes) sont **égales** lorsque leurs coefficients placés au même endroit sont égaux.

La **matrice nulle**, notée O, a tous ses coefficients nuls. La **matrice unité** d'ordre n, notée I_n, a des 1 sur sa diagonale (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) et des 0 partout ailleurs.

À retenir : Ligne d'abord, colonne ensuite

Une matrice range des nombres dans un tableau. Pour lire un coefficient, donne d'abord sa ligne, puis sa colonne : a_{ij} est à la ligne i et à la colonne j. L'ordre des indices compte, car a_{12} et a_{21} ne sont pas à la même place.

Exemple

Énoncé. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donne son ordre et lis ses coefficients m_{13} et m_{31}, où m_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

Ordre. M a 3 lignes et 3 colonnes : elle est carrée d'ordre 3.

Coefficients. $m_{13} = -2$ (ligne 1, colonne 3) et $m_{31} = 7$ (ligne 3, colonne 1).

Exemple

Énoncé. Trouve les réels x et y tels que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Méthode. Les deux matrices sont d'ordre 2. On égale les coefficients placés au même endroit : $x = -3$ et $y + 1 = 4$.

Conclusion. $x = -3$ et $y = 3$.

Somme et produit par un réel

Définition : Somme de deux matrices, produit par un réel

Soit A et B deux matrices de même format, de coefficients a_{ij} et b_{ij}, et k un réel.

- La **somme** $A + B$ est la matrice de même format dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $a_{ij} + b_{ij}$.
- Le **produit** de A par le réel k est la matrice kA dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $k\,a_{ij}$.
- La **matrice opposée** de A est $-A = (-1)A$, et la **différence** $A - B$ est la matrice $A + (-B)$.

Propriété : Règles de calcul de la somme et du produit par un réel

Soit A, B, C trois matrices de même format et k, k' deux réels. Alors :

- $A + B = B + A$ et $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + O = A$ et $A + (-A) = O$;
- $k(A + B) = kA + kB$ et $(k + k')A = kA + k'A$;
- $k(k'A) = (kk')A$ et $1A = A$.

Méthode : calculer une combinaison

1. **Contrôle** les formats : seules deux matrices de même format s'additionnent.
2. **Multiplie** chaque matrice par son réel, place par place.
3. **Ajoute** ou retranche ensuite les nombres situés à la même place.
4. **Recalcule** une place au hasard pour contrôler ton résultat.

Exemple

Énoncé. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule $2A - B$.

Produit par un réel. $2A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Différence. $2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Contrôle. Ligne 1, colonne 2 : $2 \times 3 - (-1) = 7$.

Attention : Les formats d'abord

Une matrice d'ordre 2 et une matrice d'ordre 3 ne s'additionnent pas. De même, AX n'a de sens que si la colonne X a autant de lignes que l'ordre de A. Le résultat AX est une colonne, jamais une matrice carrée.

Produit par une matrice colonne

Définition : Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Soit A une matrice carrée d'ordre n, de coefficients a_{ij}, et X une matrice colonne à n lignes, de coefficients x_1, x_2, ..., x_n. Le **produit** AX est la matrice colonne à n lignes dont le coefficient de la ligne i est

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

On multiplie terme à terme la ligne i de A par la colonne X, puis on additionne : c'est la règle **ligne par colonne**. Pour $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Méthode : multiplier une matrice carrée par une colonne

1. **Contrôle** les formats : il faut une colonne de n lignes pour une matrice d'ordre n.
2. **Prends** la ligne i de la matrice et la colonne : multiplie les nombres de même rang.
3. **Fais** la somme de ces produits : c'est le nombre de la ligne i du résultat.
4. **Recommence** pour chaque ligne : tu obtiens une colonne.

Exemple

Énoncé. Calcule AX avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Formats. A est d'ordre 3 et X a 3 lignes : le produit existe.

Lignes.

- Ligne 1 : $2 \times 3 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 = 5$.
- Ligne 2 : $(-1) \times 3 + 3 \times (-1) + 2 \times 2 = -2$.
- Ligne 3 : $4 \times 3 + 0 \times (-1) + 1 \times 2 = 14$.

Résultat. $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

> **À retenir : Quantités fois prix**
>
> En économie, si chaque ligne de A donne des quantités et si X donne les prix unitaires, chaque ligne de AX est un montant. Le produit fait d'un seul coup tous les calculs « quantité fois prix, puis somme ».

Produit de deux matrices carrées

Définition : Produit de deux matrices carrées

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n, de coefficients a_{ij} et b_{ij}. Le **produit** AB est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

c'est-à-dire le produit de la ligne i de A par la colonne j de B, selon la règle ligne par colonne. Autrement dit, la colonne j de AB est le produit de A par la colonne j de B.

Méthode : multiplier deux matrices carrées

1. **Contrôle** l'ordre de chaque matrice : il doit être le même.
2. **Calcule** chaque coefficient : ligne i de la première fois colonne j de la seconde, nombre par nombre, puis somme.
3. **Avance** colonne par colonne : la colonne j de AB vaut A fois la colonne j de B.
4. **Garde** l'ordre des facteurs écrit dans l'énoncé.

Exemple

Énoncé. Calcule AB avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcul. Ligne par colonne, coefficient par coefficient :

- ligne 1 : $2 \times 1 + (-1) \times 5 = -3$ et $2 \times 0 + (-1) \times 2 = -2$;
- ligne 2 : $3 \times 1 + 4 \times 5 = 23$ et $3 \times 0 + 4 \times 2 = 8$.

Résultat.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}.$$

Attention : Pas de produit place par place

Dans l'exemple ci-dessus, multiplier place par place donnerait $2 \times 1 = 2$ en haut à gauche. Le bon coefficient est $2 \times 1 + (-1) \times 5 = -3$. Place par place, on ne fait que des sommes et des produits par un réel.

Attention : AB et BA sont en général différents

Avec les mêmes matrices, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$, alors que $AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$. En général, $AB \neq BA$: ne change jamais l'ordre des facteurs.

Règles de calcul du produit

Propriété : Rôle de la matrice unité

Soit A une matrice carrée d'ordre n et X une matrice colonne à n lignes. Alors

$$AI_n = I_n A = A$$

et

$$I_n X = X.$$

Propriété : Distributivité du produit et produit par un réel

Soit A, B, C trois matrices carrées de même ordre n et k un réel. Alors

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

et

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

Ces règles restent vraies avec des matrices colonnes X et Y à n lignes : $A(X+Y)=AX+AY$, $(B+C)X=BX+CX$ et $A(kX)=k(AX)$.

Exemple

Énoncé. Avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$, calcule $A(B+C)$ de deux façons.

Somme d'abord. $B+C=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}$ et $A(B+C)=\begin{pmatrix}3&4\\2&4\end{pmatrix}$.

Produits d'abord. $AB=\begin{pmatrix}4&1\\2&2\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\end{pmatrix}$, et leur somme est $\begin{pmatrix}3&4\\2&4\end{pmatrix}$.

Conclusion. On obtient la même matrice.

Propriété : Associativité du produit

Soit A, B, C trois matrices carrées de même ordre n et X une matrice colonne à n lignes. Alors

$$(AB)C=A(BC)$$

et

$$(AB)X=A(BX).$$

On peut donc écrire ABC et ABX sans parenthèses.

Remarque : Associativité admise

Ce résultat est admis. Il n'est pas démontré dans ce chapitre, mais tu peux l'utiliser.

Attention : Un produit nul sans facteur nul

Avec $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$, on trouve $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$. Pourtant, ni A ni B n'est la matrice nulle. Un produit nul ne permet donc pas de conclure qu'un facteur est nul.

Écriture matricielle d'un système

Propriété : Écriture matricielle d'un système

On considère un système de n équations linéaires à n inconnues x_1, ..., x_n ($2\leq n\leq 4$), dont l'équation numéro i s'écrit

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i.$$

On note A la matrice carrée de coefficients a_{ij}, appelée **matrice du système**, X la matrice colonne des inconnues x_1, ..., x_n et B la matrice colonne des seconds membres b_1, ..., b_n. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Méthode : passer d'un système à AX = B

1. **Ordonne** les inconnues de la même façon dans toutes les équations.
2. **Écris** 0 comme coefficient de toute inconnue absente.
3. **Forme** la matrice A (une ligne par équation), la colonne X des inconnues et la colonne B des seconds membres.
4. **Recalcule** une ligne de AX pour retrouver une équation.

Exemple

Énoncé. Écris sous forme matricielle le système

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + z = 4 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Coefficients nuls. y manque dans l'équation 2 et x manque dans l'équation 3.

Résultat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans l'autre sens

Le passage marche aussi de la forme matricielle vers le système. Ainsi, l'égalité

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

équivaut au système

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

La méthode de Gauss sur la matrice augmentée

Définition : Matrice augmentée, opérations élémentaires sur les lignes

On reprend le système $AX = B$ de n équations à n inconnues. Sa **matrice augmentée** est le tableau obtenu en plaçant la colonne B à droite de A, après un trait vertical. Pour $n = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

La ligne L_i de ce tableau porte les coefficients et le second membre de l'équation numéro i. Les **opérations élémentaires** sur les lignes sont :

- échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplier une ligne par un réel **non nul** k : $L_i \leftarrow kL_i$;
- ajouter à une ligne un multiple d'une **autre** ligne : $L_i \leftarrow L_i + kL_j$, avec $j \neq i$.

On écrit aussi $L_i \leftarrow aL_i + kL_j$, avec $a \neq 0$ et $j \neq i$: cette opération enchaîne deux opérations élémentaires, $L_i \leftarrow aL_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Propriété : Opérations élémentaires et systèmes équivalents

Une opération élémentaire sur les lignes de la matrice augmentée d'un système donne la matrice augmentée d'un système qui a **les mêmes solutions**. On dit que les deux systèmes sont **équivalents**.

Propriété : Système triangulaire

Un système $AX = B$ est dit **triangulaire** lorsque tous les coefficients de A situés au-dessous de la diagonale sont nuls ($a_{ij} = 0$ dès que $i > j$). Si, de plus, les coefficients diagonaux a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} sont tous **non nuls**, le système a une **unique** solution. On la calcule en partant de la dernière équation et en remontant jusqu'à la première.

Méthode : résoudre par Gauss sur la matrice

1. **Écris** la matrice augmentée.
2. **Place** en ligne L_1 un **pivot** en première colonne (le nombre non nul qui sert à annuler ceux de sa colonne), au besoin par un échange de lignes.
3. **Annule** les nombres sous ce pivot avec des opérations $L_i \leftarrow L_i + kL_1$, ou $L_i \leftarrow aL_i + kL_1$ avec $a \neq 0$ (on multiplie L_i par a, puis on ajoute kL_1).
4. **Passe** à la colonne suivante, jusqu'à obtenir un système triangulaire.
5. **Remonte** depuis la dernière ligne, puis **vérifie** dans le système de départ.

Exemple

Énoncé. Résous le système de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right).$$

Premier pivot. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Deuxième pivot. $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right).$$

Remontée.

- $10z = 30$, donc $z = 3$;
- $-y + 9 = 7$, donc $y = 2$;
- $x + 4 - 3 = 2$, donc $x = 1$.

Vérification. $1 + 4 - 3 = 2$; $2 + 6 + 3 = 11$; $-1 + 2 + 6 = 7$.

Attention : Toute la ligne, second membre compris

Dans l'exemple, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ change aussi le second membre : $11 - 2 \times 2 = 7$. Oublier ce nombre fausse toute la suite. Note chaque opération au-dessus de la flèche ou à côté de la matrice.

Méthode : mettre une situation en équations

1. **Nomme** les inconnues, avec leur unité.
2. **Traduis** chaque contrainte de l'énoncé par une équation.
3. **Écris** $AX = B$, puis résous par la méthode de Gauss.
4. **Réponds** à la question posée, en contrôlant que les valeurs ont un sens (nombres entiers, positifs).

Exemple

Énoncé. Des articles coûtent 30 DH ou 50 DH. Un client en achète 20 pour 760 DH (données fictives). Combien de chaque sorte ?

Système. Avec x et y les nombres d'articles à 30 DH et à 50 DH : $x + y = 20$ et $30x + 50y = 760$.

Gauss. $L_2 \leftarrow L_2 - 30L_1$ transforme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 30 & 50 & 760 \end{array}\right)$$

en

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 20 \\ 0 & 20 & 160 \end{array}\right),$$

soit $20y = 160$. Donc $y = 8$, puis $x = 20 - 8 = 12$.

Contrôle. $12 + 8 = 20$ et $360 + 400 = 760$.

Conclusion. Le client achète 12 articles à 30 DH et 8 articles à 50 DH.

Quel outil pour quel calcul ?

Méthode : Quel outil pour quel calcul ?

- **Lire** un coefficient : ligne, puis colonne.
- **Additionner** ou multiplier par un réel : place par place, mêmes formats.
- **Multiplier** par une colonne : ligne par colonne, résultat colonne.
- **Multiplier** deux matrices carrées : ligne par colonne, ordre des facteurs gardé.
- **Développer** : distributivité, sans changer de côté.
- **Écrire** un système : $AX = B$, avec les coefficients nuls.
- **Résoudre** : Gauss sur la matrice augmentée, puis vérification.

Somme, coefficient de la ligne i et de la colonne j

$$a_{ij} + b_{ij}$$

Produit par un réel k

$$k\,a_{ij}$$

Matrice carrée d'ordre 2 fois colonne

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Matrice unité

$$AI_n = I_nA = A$$

Distributivité

$$A(B + C) = AB + AC$$

Système de n équations à n inconnues

$$AX = B$$

À retenir : Rédiger en devoir

> Avant chaque produit, écris les formats. Note chaque opération sur les lignes, par exemple $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$.
>
> Termine toujours une résolution par la vérification dans le système de départ. Dans une situation concrète, conclus par une phrase avec les unités.