BURHAN

Calcul matriciel : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le prix des ingrédients d'une cantine

Une cantine scolaire prépare trois menus pour 20 repas chacun (données fictives). Le menu 1 demande 2 kg de riz, 1 kg de poulet et 3 kg de légumes ; il coûte 78 DH. Le menu 2 demande 1 kg de riz, 2 kg de poulet et 2 kg de légumes ; il coûte 102 DH. Le menu 3 demande 3 kg de riz et 5 kg de légumes, sans poulet ; il coûte 60 DH. On note x, y et z les prix, en DH, d'un kilogramme de riz, de poulet et de légumes.

1. 0,5 pts

Écrire le système de trois équations vérifié par x, y et z.

INDICE

Outil : le coût d'un menu est la somme des masses multipliées par les prix au kilogramme.

2. 1 pts

Écrire ce système sous la forme $AX = B$, puis écrire sa matrice augmentée.

INDICE

Outil : le menu 3 ne contient pas de poulet : écris le coefficient 0.

3. 1 pts

Effectuer $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : l'échange place en haut une ligne dont le premier coefficient vaut 1. Applique ensuite chaque opération à toute la ligne, second membre compris.

4. 1,5 pts

Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. En déduire les prix x, y et z.

INDICE

Début : la troisième ligne ne garde que z. **Ensuite :** remonte jusqu'à la première ligne.

5. 1 pts

Vérifier la solution en calculant AX. En déduire le coût d'un menu de 20 repas avec 2 kg de riz, 1 kg de poulet et 1 kg de légumes.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne avec la colonne formée de 10, 40 et 6, puis un seul calcul pour le nouveau menu.

Exercice 2 — 5 pts

Le budget d'une sortie en quatre postes

Une association prépare une sortie avec un budget de 12 milliers de DH (données fictives). Elle le répartit entre quatre postes : transport, repas, activités et communication. On note x, y, z et t les montants de ces postes, en milliers de DH. Les règles de répartition sont les suivantes :

- tout le budget est dépensé ;
- le montant des repas est le double de celui du transport ;
- les activités coûtent 2 milliers de DH de plus que la communication ;
- le transport et les activités coûtent ensemble 6 milliers de DH.

1. — 1 pts

Écrire le système de quatre équations vérifié par x, y, z et t, en plaçant les inconnues à gauche du signe égal.

INDICE

Outil : une équation par règle. Pour la deuxième, écris $y = 2x$, puis passe $2x$ à gauche.

2. — 0,5 pts

Écrire la matrice augmentée de ce système.

INDICE

Outil : range les inconnues dans l'ordre x, y, z, t ; chaque inconnue absente d'une équation a le coefficient 0.

3. — 1 pts

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, puis $L_2 \leftrightarrow L_4$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : le pivot est le 1 de L_1. L'échange place ensuite en deuxième ligne un coefficient -1 devant y, plus commode comme pivot.

4. — 1 pts

Effectuer $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$. Justifier que le système obtenu a une unique solution.

INDICE

Outil : la première opération annule le coefficient de y en ligne 4, la seconde celui de z. Regarde ensuite la diagonale.

5. — 1,5 pts

En déduire les montants des quatre postes. Vérifier qu'ils respectent les quatre règles.

INDICE

Début : la dernière ligne donne t. **Ensuite :** remonte ligne par ligne jusqu'à x.

Exercice 3 4 pts

Du calcul matriciel à un système

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. 0,5 pts

Calculer $2A - B$.

INDICE

Outil : calcule $2A$, puis soustrais B coefficient par coefficient.

2. 1 pts

Calculer AB et BA. Ces matrices sont-elles égales ?

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne, deux fois, en respectant l'ordre des facteurs.

3. 1 pts

Calculer $A(B + I_2)$ de deux façons : directement, puis à l'aide de la distributivité et du rôle de la matrice unité.

INDICE

Outil : $A(B + I_2) = AB + AI_2$ et $AI_2 = A$.

4. 0,75 pts

On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $AX = Y$. En déduire, grâce à la première colonne du produit de la question 3, une solution de ce système.

INDICE

Outil : la colonne 1 de $A(B + I_2)$ est le produit de A par la colonne 1 de $B + I_2$.

5. 0,75 pts

Résoudre ce système avec sa matrice augmentée, selon la méthode de Gauss. Le couple trouvé à la question 4 est-il la seule solution ?

INDICE

Outil : une seule opération, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, rend le système triangulaire.

Exercice 4 4 pts

Un pivot nul en cours de route

On considère le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y + z = 12 \\ -2x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

1. 0,75 pts

Écrire ce système sous la forme $AX = B$ et donner sa matrice augmentée.

INDICE

Outil : une ligne par équation, une colonne par inconnue, dans l'ordre x, y, z.

2. 0,75 pts

On prend comme pivot le coefficient 2 de la ligne 1, colonne 1. Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : chaque opération annule le nombre placé sous le pivot : $4 - 2 \times 2 = 0$ et $-2 + 2 = 0$. Pense au second membre.

3. 1 pts

Le coefficient de la ligne 2, colonne 2 est maintenant nul. Quelle opération permet de poursuivre ? L'effectuer, puis écrire le système obtenu et justifier qu'il a les mêmes solutions que le système de départ.

INDICE

Outil : un pivot doit être non nul. Cherche, sous la ligne 2, une ligne dont le coefficient en colonne 2 n'est pas nul.

4. 1 pts

En déduire la solution du système de départ. Justifier qu'elle est unique.

INDICE

Début : regarde la diagonale du système triangulaire. **Ensuite :** la dernière équation donne z ; remonte.

5. 0,5 pts

Vérifier la solution dans les trois équations du système de départ.

INDICE

Outil : remplace x, y et z par les valeurs trouvées dans chaque équation.

Exercice 5 — 5 pts

Les coûts d'une imprimerie

Une imprimerie fabrique des livres et des affiches (données fictives). Une école et une mairie passent commande. La matrice Q donne les quantités commandées : ligne 1 pour l'école, ligne 2 pour la mairie ; colonne 1 pour les livres, colonne 2 pour les affiches. La matrice K donne les coûts unitaires, en DH : ligne 1 pour un livre, ligne 2 pour une affiche ; colonne 1 pour le papier, colonne 2 pour l'encre.

$$Q = \begin{pmatrix} 200 & 50 \\ 100 & 300 \end{pmatrix},$$
$$K = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. — 0,5 pts

Que représentent le coefficient de Q situé à la ligne 2, colonne 1, et le coefficient de K situé à la ligne 1, colonne 2 ?

INDICE

Outil : lis la ligne, puis la colonne, avec la légende de chaque matrice.

2. — 1 pts

Calculer le produit QK.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne : ligne i de Q par colonne j de K.

3. — 1 pts

Que représente le coefficient de QK situé à la ligne 1, colonne 2 ? En déduire le coût total, papier et encre, de la commande de l'école.

INDICE

Outil : ce coefficient est la ligne de l'école multipliée par la colonne de l'encre.

4. — 1 pts

Le mois suivant, l'école commande 10 livres de plus et la mairie 20 affiches de plus. Ces suppléments forment la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Calculer RK, puis en déduire $(Q+R)K$.

INDICE

Outil : la distributivité donne $(Q+R)K = QK + RK$.

5. 1,5 pts

Aux coûts unitaires de K, un troisième client commande x livres et y affiches. Son papier coûte 900 DH et son encre 350 DH. Écrire le système vérifié par x et y, puis le résoudre par la méthode de Gauss.

INDICE

Outil : le papier d'un livre coûte 8 DH et celui d'une affiche 2 DH ; lis de même les coûts d'encre dans K. Pour éliminer x en ligne 2, utilise $L_2 \leftarrow 8L_2 - 3L_1$.