BURHAN

Calcul matriciel : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le prix des ingrédients d'une cantine

Une cantine scolaire prépare trois menus pour 20 repas chacun (données fictives). Le menu 1 demande 2 kg de riz, 1 kg de poulet et 3 kg de légumes ; il coûte 78 DH. Le menu 2 demande 1 kg de riz, 2 kg de poulet et 2 kg de légumes ; il coûte 102 DH. Le menu 3 demande 3 kg de riz et 5 kg de légumes, sans poulet ; il coûte 60 DH. On note x, y et z les prix, en DH, d'un kilogramme de riz, de poulet et de légumes.

1. 0,5 pts

Écrire le système de trois équations vérifié par x, y et z.

INDICE

Outil : le coût d'un menu est la somme des masses multipliées par les prix au kilogramme.

CORRIGÉ

Le coût d'un menu est la somme des masses multipliées par les prix au kilogramme. Chaque menu donne une équation ; le menu 3 ne contient pas de poulet.

Conclusion. Les prix x, y et z vérifient le système

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 78 \\ x + 2y + 2z = 102 \\ 3x + 5z = 60 \end{cases}$$

2. 1 pts

Écrire ce système sous la forme $AX = B$, puis écrire sa matrice augmentée.

INDICE

Outil : le menu 3 ne contient pas de poulet : écris le coefficient 0.

CORRIGÉ

On range les inconnues dans l'ordre x, y, z ; le coefficient de y dans la troisième équation est 0.

Conclusion. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 78 \\ 102 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Sa matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 78 \\ 1 & 2 & 2 & 102 \\ 3 & 0 & 5 & 60 \end{array}\right).$$

3. 1 pts

Effectuer $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : l'échange place en haut une ligne dont le premier coefficient vaut 1. Applique ensuite chaque opération à toute la ligne, second membre compris.

CORRIGÉ

Échange. Après $L_1 \leftrightarrow L_2$, la première ligne a pour premier coefficient 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 102 \\ 2 & 1 & 3 & 78 \\ 3 & 0 & 5 & 60 \end{array}\right).$$

Élimination de x. Chaque opération s'applique à toute la ligne, y compris au second membre :

- $L_2 - 2L_1$: $2 - 2 \times 1 = 0$, $1 - 2 \times 2 = -3$, $3 - 2 \times 2 = -1$ et $78 - 2 \times 102 = -126$;
- $L_3 - 3L_1$: $3 - 3 \times 1 = 0$, $0 - 3 \times 2 = -6$, $5 - 3 \times 2 = -1$ et $60 - 3 \times 102 = -246$.

Conclusion. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, la matrice obtenue est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 102 \\ 0 & -3 & -1 & -126 \\ 0 & -6 & -1 & -246 \end{array}\right).$$

4. 1,5 pts

Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. En déduire les prix x, y et z.

INDICE

Début : la troisième ligne ne garde que z. **Ensuite :** remonte jusqu'à la première ligne.

CORRIGÉ

Élimination de y. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $-6 - 2 \times (-3) = 0$, $-1 - 2 \times (-1) = 1$ et $-246 - 2 \times (-126) = 6$. On obtient le système triangulaire de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 102 \\ 0 & -3 & -1 & -126 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Mêmes solutions, solution unique. D'après la propriété des opérations élémentaires, ce système a les mêmes solutions que le système de départ. Il est triangulaire et ses coefficients diagonaux 1, -3 et 1 sont non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, la solution est unique.

Remontée.

- ligne 3 : $z = 6$;
- ligne 2 : $-3y - 6 = -126$, donc $-3y = -120$ et $y = 40$;
- ligne 1 : $x + 2 \times 40 + 2 \times 6 = 102$, donc $x = 10$.

Conclusion. Le kilogramme de riz coûte 10 DH, celui de poulet 40 DH et celui de légumes 6 DH.

5. 1 pts

Vérifier la solution en calculant AX. En déduire le coût d'un menu de 20 repas avec 2 kg de riz, 1 kg de poulet et 1 kg de légumes.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne avec la colonne formée de 10, 40 et 6, puis un seul calcul pour le nouveau menu.

CORRIGÉ

Vérification. Ligne par colonne :

- ligne 1 : $2 \times 10 + 1 \times 40 + 3 \times 6 = 78$;
- ligne 2 : $1 \times 10 + 2 \times 40 + 2 \times 6 = 102$;
- ligne 3 : $3 \times 10 + 0 \times 40 + 5 \times 6 = 60$.

Donc

$$A \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 102 \\ 60 \end{pmatrix} = B.$$

Les prix trouvés vérifient donc les trois équations.

Nouveau menu. Il demande 2 kg de riz, 1 kg de poulet et 1 kg de légumes : $2 \times 10 + 1 \times 40 + 1 \times 6 = 66$.

Conclusion. La solution est vérifiée, et le nouveau menu de 20 repas coûte 66 DH.

Exercice 2 5 pts

Le budget d'une sortie en quatre postes

Une association prépare une sortie avec un budget de 12 milliers de DH (données fictives). Elle le répartit entre quatre postes : transport, repas, activités et communication. On note x, y, z et t les montants de ces postes, en milliers de DH. Les règles de répartition sont les suivantes :

- tout le budget est dépensé ;
- le montant des repas est le double de celui du transport ;
- les activités coûtent 2 milliers de DH de plus que la communication ;
- le transport et les activités coûtent ensemble 6 milliers de DH.

1. 1 pts

Écrire le système de quatre équations vérifié par x, y, z et t, en plaçant les inconnues à gauche du signe égal.

INDICE

Outil : une équation par règle. Pour la deuxième, écris $y = 2x$, puis passe $2x$ à gauche.

CORRIGÉ

Chaque règle donne une équation :

- tout le budget : $x + y + z + t = 12$;
- repas : $y = 2x$, soit $-2x + y = 0$;
- activités : $z = t + 2$, soit $z - t = 2$;
- transport et activités : $x + z = 6$.

Conclusion. Les montants x, y, z et t vérifient le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ -2x + y = 0 \\ z - t = 2 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

2. 0,5 pts

Écrire la matrice augmentée de ce système.

INDICE

Outil : range les inconnues dans l'ordre x, y, z, t ; chaque inconnue absente d'une équation a le coefficient 0.

CORRIGÉ

On range les inconnues dans l'ordre x, y, z, t ; une inconnue absente d'une équation a le coefficient 0.

Conclusion. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

3. 1 pts

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, puis $L_2 \leftrightarrow L_4$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : le pivot est le 1 de L_1. L'échange place ensuite en deuxième ligne un coefficient -1 devant y, plus commode comme pivot.

CORRIGÉ

Élimination de x. Le pivot est le 1 de L_1. Chaque opération porte sur toute la ligne :

- $L_2 + 2L_1$: $-2 + 2 \times 1 = 0$, $1 + 2 \times 1 = 3$, $0 + 2 \times 1 = 2$, $0 + 2 \times 1 = 2$ et $0 + 2 \times 12 = 24$;
- $L_4 - L_1$: $1 - 1 = 0$, $0 - 1 = -1$, $1 - 1 = 0$, $0 - 1 = -1$ et $6 - 12 = -6$.

Après $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Conclusion. L'échange $L_2 \leftrightarrow L_4$ place en deuxième ligne le coefficient -1 devant y. La matrice obtenue est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 24 \end{array}\right).$$

4. 1 pts

Effectuer $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$. Justifier que le système obtenu a une unique solution.

INDICE

Outil : la première opération annule le coefficient de y en ligne 4, la seconde celui de z. Regarde ensuite la diagonale.

CORRIGÉ

Élimination de y. Après $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

Élimination de z. Après $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Unicité. D'après la propriété des opérations élémentaires, le système obtenu est équivalent au système de départ. Il est triangulaire, de coefficients diagonaux 1, -1, 1 et 1, tous non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, il a une unique solution.

Conclusion. Le système obtenu, et donc le système de départ, a une unique solution.

5. 1,5 pts

En déduire les montants des quatre postes. Vérifier qu'ils respectent les quatre règles.

INDICE

Début : la dernière ligne donne t. **Ensuite :** remonte ligne par ligne jusqu'à x.

CORRIGÉ

Remontée.

- ligne 4 : $t = 2$;
- ligne 3 : $z - t = 2$, donc $z = 4$;
- ligne 2 : $-y - t = -6$, donc $-y = -4$ et $y = 4$;
- ligne 1 : $x + 4 + 4 + 2 = 12$, donc $x = 2$.

Vérification des quatre règles.

- budget : $2 + 4 + 4 + 2 = 12$;
- repas : $4 = 2 \times 2$;
- activités : $4 - 2 = 2$;
- transport et activités : $2 + 4 = 6$.

Conclusion. Le transport reçoit 2 milliers de DH, les repas 4, les activités 4 et la communication 2 ; ces montants respectent les quatre règles.

Exercice 3 — 4 pts

Du calcul matriciel à un système

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. — 0,5 pts

Calculer $2A - B$.

INDICE

Outil : calcule $2A$, puis soustrais B coefficient par coefficient.

CORRIGÉ

Calcul de $2A$. On multiplie chaque coefficient de A par 2 :

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Différence. Coefficient par coefficient : $2 - 2 = 0, 4 - 0 = 4, -2 - 1 = -3$ et $6 - (-1) = 7$.

Conclusion. On obtient

$$2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. 1 pts

Calculer AB et BA. Ces matrices sont-elles égales ?

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne, deux fois, en respectant l'ordre des facteurs.

CORRIGÉ

Calcul de AB. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$;
- ligne 1, colonne 2 : $1 \times 0 + 2 \times (-1) = -2$;
- ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 2 + 3 \times 1 = 1$;
- ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 0 + 3 \times (-1) = -3$.

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de BA. Les lignes de B sont multipliées par les colonnes de A :

- ligne 1, colonne 1 : $2 \times 1 + 0 \times (-1) = 2$;
- ligne 1, colonne 2 : $2 \times 2 + 0 \times 3 = 4$;
- ligne 2, colonne 1 : $1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 2$;
- ligne 2, colonne 2 : $1 \times 2 + (-1) \times 3 = -1$.

Donc

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. À la ligne 1, colonne 1, on lit 4 dans AB et 2 dans BA : $AB \neq BA$, ces matrices ne sont pas égales.

3. 1 pts

Calculer $A(B+I_2)$ de deux façons : directement, puis à l'aide de la distributivité et du rôle de la matrice unité.

INDICE

Outil : $A(B+I_2)=AB+AI_2$ et $AI_2=A$.

CORRIGÉ

Directement. Coefficient par coefficient,

$$B+I_2=\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Puis, ligne par colonne : $1\times3+2\times1=5$, $1\times0+2\times0=0$, $(-1)\times3+3\times1=0$ et $(-1)\times0+3\times0=0$. Donc

$$\begin{aligned}&A(B+I_2)\\&=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par les règles. D'après la distributivité, $A(B+I_2)=AB+AI_2$, et $AI_2=A$ d'après le rôle de la matrice unité. Avec AB obtenu à la question 2 :

$$\begin{aligned}&A(B+I_2)\\&=AB+A\\&=\begin{pmatrix}4&-2\\1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux façons de calculer $A(B+I_2)$ donnent la même matrice, dont le seul coefficient non nul est le 5 de la ligne 1, colonne 1.

4. 0,75 pts

On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $AX = Y$. En déduire, grâce à la première colonne du produit de la question 3, une solution de ce système.

INDICE

Outil : la colonne 1 de $A(B + I_2)$ est le produit de A par la colonne 1 de $B + I_2$.

CORRIGÉ

Forme matricielle. La matrice des coefficients du système est A. Le système s'écrit $AX = Y$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une solution. D'après la règle ligne par colonne, la première colonne de $A(B + I_2)$ est le produit de A par la première colonne de $B + I_2$, formée de 3 et 1 :

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 \\ (-1) \times 3 + 3 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = Y. \end{aligned}$$

Conclusion. Le système s'écrit $AX = Y$, et le couple $(x, y) = (3, 1)$ en est une solution.

5. 0,75 pts

Résoudre ce système avec sa matrice augmentée, selon la méthode de Gauss. Le couple trouvé à la question 4 est-il la seule solution ?

INDICE

Outil : une seule opération, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, rend le système triangulaire.

CORRIGÉ

Matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Élimination de x. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donne $-1+1=0$, $3+2=5$ et $0+5=5$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

Unicité. Cette opération est élémentaire : d'après la propriété des opérations élémentaires, le nouveau système a les mêmes solutions que le système de départ. Il est triangulaire, de coefficients diagonaux 1 et 5 non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, il a une unique solution.

Remontée.

- ligne 2 : $5y = 5$, donc $y = 1$;
- ligne 1 : $x + 2y = 5$ devient $x + 2 = 5$, donc $x = 3$.

Conclusion. Oui : le couple $(3, 1)$ trouvé à la question 4 est la seule solution du système.

Exercice 4 4 pts

Un pivot nul en cours de route

On considère le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y + z = 12 \\ -2x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

1. 0,75 pts

Écrire ce système sous la forme $AX = B$ et donner sa matrice augmentée.

INDICE

Outil : une ligne par équation, une colonne par inconnue, dans l'ordre x, y, z.

CORRIGÉ

Avec les inconnues dans l'ordre x, y, z, la ligne i de A contient les coefficients de l'équation i.

Conclusion. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Sa matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

2. 0,75 pts

On prend comme pivot le coefficient 2 de la ligne 1, colonne 1. Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Écrire la matrice obtenue.

INDICE

Outil : chaque opération annule le nombre placé sous le pivot : $4 - 2 \times 2 = 0$ et $-2 + 2 = 0$. Pense au second membre.

CORRIGÉ

Chaque opération annule le nombre placé sous le pivot 2 et s'applique aussi au second membre :

- $L_2 - 2L_1$: $4 - 2 \times 2 = 0$, $2 - 2 \times 1 = 0$, $1 - 2 \times (-1) = 3$ et $12 - 2 \times 3 = 6$;
- $L_3 + L_1$: $-2 + 2 = 0$, $1 + 1 = 2$, $3 + (-1) = 2$ et $7 + 3 = 10$.

Conclusion. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, la matrice obtenue est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right).$$

3. 1 pts

Le coefficient de la ligne 2, colonne 2 est maintenant nul. Quelle opération permet de poursuivre ? L'effectuer, puis écrire le système obtenu et justifier qu'il a les mêmes solutions que le système de départ.

INDICE

Outil : un pivot doit être non nul. Cherche, sous la ligne 2, une ligne dont le coefficient en colonne 2 n'est pas nul.

CORRIGÉ

Choix de l'opération. Un pivot doit être non nul : on ne peut pas garder le 0 de la ligne 2, colonne 2. Sous cette ligne, le coefficient de la ligne 3 dans la colonne 2 vaut 2, non nul : on effectue $L_2 \leftrightarrow L_3$.

Matrice et système obtenus.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2y + 2z = 10 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Mêmes solutions. Les trois opérations effectuées sont élémentaires : d'après la propriété des opérations élémentaires, ce système a les mêmes solutions que le système de départ.

Conclusion. L'échange $L_2 \leftrightarrow L_3$ permet de poursuivre, et le système triangulaire obtenu a les mêmes solutions que le système de départ.

4. 1 pts

En déduire la solution du système de départ. Justifier qu'elle est unique.

INDICE

Début : regarde la diagonale du système triangulaire. **Ensuite :** la dernière équation donne z ; remonte.

CORRIGÉ

Unicité. Le système obtenu est triangulaire et ses coefficients diagonaux 2, 2 et 3 sont non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, sa solution est unique. D'après la question 3, il a les mêmes solutions que le système de départ : celui-ci a donc une unique solution.

Remontée.

- $3z = 6$, donc $z = 2$;
- $2y + 2z = 10$ devient $2y + 2 \times 2 = 10$, donc $2y = 6$ et $y = 3$;
- $2x + y - z = 3$ devient $2x + 3 - 2 = 3$, donc $2x = 2$ et $x = 1$.

Conclusion. La solution du système de départ est $(x, y, z) = (1, 3, 2)$, et c'est la seule.

5. 0,5 pts

Vérifier la solution dans les trois équations du système de départ.

INDICE

Outil : remplace x, y et z par les valeurs trouvées dans chaque équation.

CORRIGÉ

On remplace x par 1, y par 3 et z par 2 :

- équation 1 : $2 \times 1 + 3 - 2 = 3$;
- équation 2 : $4 \times 1 + 2 \times 3 + 2 = 12$;
- équation 3 : $-2 \times 1 + 3 + 3 \times 2 = 7$.

Conclusion. Les trois équations sont vérifiées : $(1, 3, 2)$ est bien la solution du système de départ.

Exercice 5 5 pts

Les coûts d'une imprimerie

Une imprimerie fabrique des livres et des affiches (données fictives). Une école et une mairie passent commande. La matrice Q donne les quantités commandées : ligne 1 pour l'école, ligne 2 pour la mairie ; colonne 1 pour les livres, colonne 2 pour les affiches. La matrice K donne les coûts unitaires, en DH : ligne 1 pour un livre, ligne 2 pour une affiche ; colonne 1 pour le papier, colonne 2 pour l'encre.

$$Q = \begin{pmatrix} 200 & 50 \\ 100 & 300 \end{pmatrix},$$
$$K = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. 0,5 pts

Que représentent le coefficient de Q situé à la ligne 2, colonne 1, et le coefficient de K situé à la ligne 1, colonne 2 ?

INDICE

Outil : lis la ligne, puis la colonne, avec la légende de chaque matrice.

CORRIGÉ

Coefficient de Q. À la ligne 2 (la mairie) et à la colonne 1 (les livres), on lit 100.

Coefficient de K. À la ligne 1 (un livre) et à la colonne 2 (l'encre), on lit 3.

Conclusion. Le premier coefficient signifie que la mairie commande 100 livres ; le second, que l'encre d'un livre coûte 3 DH.

2. 1 pts

Calculer le produit QK.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne : ligne i de Q par colonne j de K.

CORRIGÉ

Q et K sont carrées d'ordre 2 : le produit QK existe. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $200 \times 8 + 50 \times 2 = 1700$;
- ligne 1, colonne 2 : $200 \times 3 + 50 \times 1 = 650$;
- ligne 2, colonne 1 : $100 \times 8 + 300 \times 2 = 1400$;
- ligne 2, colonne 2 : $100 \times 3 + 300 \times 1 = 600$.

Conclusion. On obtient

$$QK = \begin{pmatrix} 1700 & 650 \\ 1400 & 600 \end{pmatrix}.$$

3. 1 pts

Que représente le coefficient de QK situé à la ligne 1, colonne 2 ? En déduire le coût total, papier et encre, de la commande de l'école.

INDICE

Outil : ce coefficient est la ligne de l'école multipliée par la colonne de l'encre.

CORRIGÉ

Sens du coefficient. Il s'obtient avec la ligne 1 de Q (l'école) et la colonne 2 de K (l'encre) : $200 \times 3 + 50 \times 1 = 650$. C'est le coût de l'encre, en DH, de la commande de l'école.

Coût total. De même, le coefficient de la ligne 1, colonne 1 de QK est le coût du papier de cette commande, soit 1700 DH.

Conclusion. Le coefficient étudié est le coût de l'encre de l'école, et sa commande coûte au total $1700 + 650 = 2350$ DH.

4. 1 pts

Le mois suivant, l'école commande 10 livres de plus et la mairie 20 affiches de plus. Ces suppléments forment la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Calculer RK, puis en déduire $(Q+R)K$.

INDICE

Outil : la distributivité donne $(Q+R)K = QK + RK$.

CORRIGÉ

Calcul de RK. R et K sont carrées d'ordre 2. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $10 \times 8 + 0 \times 2 = 80$;
- ligne 1, colonne 2 : $10 \times 3 + 0 \times 1 = 30$;
- ligne 2, colonne 1 : $0 \times 8 + 20 \times 2 = 40$;
- ligne 2, colonne 2 : $0 \times 3 + 20 \times 1 = 20$.

Donc

$$RK = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $(Q+R)K$. D'après la distributivité :

$$\begin{aligned} &(Q+R)K \\ &= QK + RK \\ &= \begin{pmatrix} 1700 & 650 \\ 1400 & 600 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1780 & 680 \\ 1440 & 620 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. $(Q+R)K$ est la matrice ci-dessus. Seuls les suppléments coûtent en plus : 80 DH de papier et 30 DH d'encre pour l'école, 40 DH et 20 DH pour la mairie.

5. 1,5 pts

Aux coûts unitaires de K, un troisième client commande x livres et y affiches. Son papier coûte 900 DH et son encre 350 DH. Écrire le système vérifié par x et y, puis le résoudre par la méthode de Gauss.

INDICE

Outil : le papier d'un livre coûte 8 DH et celui d'une affiche 2 DH ; lis de même les coûts d'encre dans K. Pour éliminer x en ligne 2, utilise $L_2 \leftarrow 8L_2 - 3L_1$.

CORRIGÉ

Système. Le papier du client coûte $8x + 2y$ DH et son encre $3x + y$ DH. Le système est

$$\begin{cases} 8x + 2y = 900 \\ 3x + y = 350 \end{cases}$$

de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 900 \\ 3 & 1 & 350 \end{array}\right).$$

Élimination de x. L'opération $L_2 \leftarrow 8L_2 - 3L_1$ donne $8 \times 3 - 3 \times 8 = 0$, $8 \times 1 - 3 \times 2 = 2$ et $8 \times 350 - 3 \times 900 = 100$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 900 \\ 0 & 2 & 100 \end{array}\right).$$

Unicité. Cette opération enchaîne $L_2 \leftarrow 8L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, deux opérations élémentaires : d'après la propriété des opérations élémentaires, le système obtenu a les mêmes solutions que le système de départ. Il est triangulaire et ses coefficients diagonaux 8 et 2 sont non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, la solution est unique.

Remontée.

- ligne 2 : $2y = 100$, donc $y = 50$;
- ligne 1 : $8x + 2 \times 50 = 900$, soit $8x + 100 = 900$, donc $8x = 800$ et $x = 100$.

Vérification. Ligne par colonne :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 100 + 2 \times 50 \\ 3 \times 100 + 1 \times 50 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 900 \\ 350 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le troisième client commande 100 livres et 50 affiches.