BURHAN

Calcul matriciel : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Entraînement	7

Exercice 1

Un produit de deux matrices d'ordre 3

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne. Il y a neuf coefficients : avance ligne par ligne et note chaque somme.

2.

Contrôler la deuxième colonne de AB en calculant le produit de A par la deuxième colonne de B.

INDICE

Outil : la colonne j de AB est le produit de A par la colonne j de B.

3.

En déduire $(2A)B$ sans effectuer de nouveau produit de matrices.

INDICE

Outil : la règle $(kA)B = k(AB)$.

Exercice 2

L'ordre des facteurs compte

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB et BA. Ces deux matrices sont-elles égales ?

INDICE

Outil : pour BA, ce sont les lignes de B qui sont multipliées par les colonnes de A.

2.

Calculer AC et CA. Que constates-tu ?

INDICE

Outil : même règle ligne par colonne ; compare ensuite les quatre coefficients.

3.

Peut-on, pour deux matrices carrées quelconques, remplacer AB par BA dans un calcul ?

INDICE

Outil : une seule égalité fausse suffit à répondre non.

Exercice 3

Vérifier la distributivité sur un exemple

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer $B + C$, puis $A(B + C)$.

INDICE

Début : la somme se calcule coefficient par coefficient. **Ensuite :** multiplie A par cette somme, ligne par colonne.

2.

Calculer AB et AC, puis $AB + AC$. Comparer avec la question 1.

INDICE

Outil : deux produits ligne par colonne, puis une somme. Quelle règle de calcul annonce le résultat ?

3.

Calculer $(B + C)A$. Est-ce la même matrice que $A(B + C)$?

INDICE

Outil : cette fois, ce sont les lignes de $B + C$ qui sont multipliées par les colonnes de A.

Exercice 4

Le coût des fournées d'une boulangerie

Une boulangerie prépare trois sortes de fournées : pain, viennoiseries et gâteaux. La matrice A donne, pour une fournée de chaque sorte (une ligne par sorte, dans cet ordre), les masses en kg de farine, de beurre et de sucre (une colonne par ingrédient). La colonne P donne le prix d'un kilogramme de chaque ingrédient, en DH (données fictives) :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AP. Que représentent ses coefficients ?

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne ; une ligne de A fois P additionne masse fois prix pour une fournée.

2.

Le beurre augmente de 5 DH par kilogramme et le sucre de 2 DH. On note

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AD, puis en déduire le nouveau coût de chaque fournée.

INDICE

Outil : les nouveaux prix forment la colonne $P + D$, et $A(P + D) = AP + AD$.

3.

Après la hausse, la boulangerie prépare chaque jour deux fournées de pain, une de viennoiseries et une de gâteaux. Calculer le coût des ingrédients d'une journée.

INDICE

Outil : multiplie chaque nouveau coût par le nombre de fournées, puis additionne.

Exercice 5

La méthode de Gauss sur un système de trois équations

On considère le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

1.

Écrire la matrice augmentée de ce système.

INDICE

Outil : une ligne par équation ; les coefficients de x, y, z, puis le second membre après le trait.

2.

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

INDICE

Outil : le pivot est le 1 de la ligne L_1. Applique chaque opération à toute la ligne, second membre compris.

3.

Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis écrire le système triangulaire obtenu.

INDICE

Outil : cette opération annule le coefficient de y dans la troisième ligne.

4.

Résoudre le système et vérifier la solution dans le système de départ.

INDICE

Début : commence par la dernière équation. **Ensuite :** remonte, puis remplace dans les trois équations de départ.

Exercice 6

La production d'un atelier de couture

Un atelier de couture fabrique en une semaine des chemises, des pantalons et des vestes (données fictives). Une chemise demande 2 m de tissu et 1 h de travail ; un pantalon, 3 m et 2 h ; une veste, 4 m et 4 h. Cette semaine, l'atelier a produit 45 pièces, avec 125 m de tissu et 90 h de travail. On note x, y et z les nombres de chemises, de pantalons et de vestes.

1.

Écrire le système d'équations vérifié par x, y et z.

INDICE

Outil : une équation pour le nombre de pièces, une pour le tissu, une pour les heures.

2.

Écrire ce système sous la forme $AX = B$.

INDICE

Outil : une ligne de A par contrainte, une colonne par sorte de pièce.

3.

Résoudre le système par la méthode de Gauss sur la matrice augmentée.

INDICE

Début : annule les coefficients de x dans L_2 et L_3 avec L_1. **Ensuite :** annule le coefficient de y dans L_3 avec L_2.

4.

Interpréter la solution et la vérifier avec les données de l'énoncé.

INDICE

Outil : remplace les trois nombres trouvés dans chaque contrainte de l'énoncé.

Exercice 7

Tester une solution proposée

On considère le système $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.

Le triplet $(1, 3, -1)$ est-il solution de ce système ?

INDICE

Outil : calcule le produit de A par la colonne formée de $1, 3$ et -1, puis compare le résultat à B.

2.

Même question pour le triplet $(2, 1, 1)$.

INDICE

Outil : même calcul avec la colonne formée de 2, 1 et 1.

3.

Écrire la matrice augmentée du système, puis effectuer $L_1 \leftrightarrow L_2$, ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, enfin $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$. En déduire que $(2, 1, 1)$ est la seule solution.

INDICE

Outil : l'échange place un pivot égal à 1 en haut. À la fin, regarde la diagonale du système triangulaire obtenu.