BURHAN

Calcul matriciel : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Entraînement	7

Exercice 1

Un produit de deux matrices d'ordre 3

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne. Il y a neuf coefficients : avance ligne par ligne et note chaque somme.

CORRIGÉ

A et B sont carrées d'ordre 3 : le produit AB existe et il est carré d'ordre 3. D'après la règle ligne par colonne, on multiplie chaque ligne de A par les colonnes 1, 2 et 3 de B.

Ligne 1 de AB.

- colonne 1 : $1 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 1 = 4$;
- colonne 2 : $1 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$;
- colonne 3 : $1 \times 0 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 2$.

Ligne 2 de AB.

- colonne 1 : $(-1) \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -1$;
- colonne 2 : $(-1) \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 0 = -4$;
- colonne 3 : $(-1) \times 0 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 10$.

Ligne 3 de AB.

- colonne 1 : $2 \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 4$;
- colonne 2 : $2 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 1$;
- colonne 3 : $2 \times 0 + 1 \times 3 + 0 \times 1 = 3$.

Conclusion. On obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.

Contrôler la deuxième colonne de AB en calculant le produit de A par la deuxième colonne de B.

INDICE

Outil : la colonne j de AB est le produit de A par la colonne j de B.

CORRIGÉ

D'après la règle ligne par colonne, la colonne 2 de AB est le produit de A par la colonne 2 de B, formée de 1, -1 et 0. Ce produit vaut

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}.$$

Conclusion. On retrouve la deuxième colonne de AB obtenue à la question 1 : le calcul est confirmé.

3.

En déduire $(2A)B$ sans effectuer de nouveau produit de matrices.

INDICE

Outil : la règle $(kA)B=k(AB)$.

CORRIGÉ

D'après la règle du produit par un réel, $(2A)B=2(AB)$. Il suffit donc de multiplier chaque coefficient de AB par 2, sans nouveau produit de matrices.

Conclusion. On obtient

$$(2A)B=\begin{pmatrix}8&2&4\\-2&-8&20\\8&2&6\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

L'ordre des facteurs compte

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB et BA. Ces deux matrices sont-elles égales ?

INDICE

Outil : pour BA, ce sont les lignes de B qui sont multipliées par les colonnes de A.

CORRIGÉ

Calcul de AB. Ligne par colonne, avec les lignes de A et les colonnes de B :

- ligne 1, colonne 1 : $2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$;
- ligne 1, colonne 2 : $2 \times 3 + 1 \times 0 = 6$;
- ligne 2, colonne 1 : $0 \times 1 + (-1) \times 2 = -2$;
- ligne 2, colonne 2 : $0 \times 3 + (-1) \times 0 = 0$.

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de BA. Cette fois, ce sont les lignes de B qui sont multipliées par les colonnes de A :

- ligne 1, colonne 1 : $1 \times 2 + 3 \times 0 = 2$;
- ligne 1, colonne 2 : $1 \times 1 + 3 \times (-1) = -2$;
- ligne 2, colonne 1 : $2 \times 2 + 0 \times 0 = 4$;
- ligne 2, colonne 2 : $2 \times 1 + 0 \times (-1) = 2$.

Donc

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparaison. À la ligne 1, colonne 1, on lit 4 dans AB et 2 dans BA.

Conclusion. $AB \neq BA$: ces deux matrices ne sont pas égales.

2.

Calculer AC et CA. Que constates-tu ?

INDICE

Outil : même règle ligne par colonne ; compare ensuite les quatre coefficients.

CORRIGÉ

Calcul de AC. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $2 \times 3 + 1 \times 0 = 6$;
- ligne 1, colonne 2 : $2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$;
- ligne 2, colonne 1 : $0 \times 3 + (-1) \times 0 = 0$;
- ligne 2, colonne 2 : $0 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$.

Donc

$$AC = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de CA. Les lignes de C sont multipliées par les colonnes de A :

- ligne 1, colonne 1 : $3 \times 2 + 1 \times 0 = 6$;
- ligne 1, colonne 2 : $3 \times 1 + 1 \times (-1) = 2$;
- ligne 2, colonne 1 : $0 \times 2 + 0 \times 0 = 0$;
- ligne 2, colonne 2 : $0 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$.

Donc

$$CA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. Ici, $AC = CA$: pour ces deux matrices, l'ordre des facteurs ne change pas le produit.

3.

Peut-on, pour deux matrices carrées quelconques, remplacer AB par BA dans un calcul ?

INDICE

Outil : une seule égalité fausse suffit à répondre non.

CORRIGÉ

La question 2 montre que deux produits peuvent être égaux pour certaines matrices. Mais la question 1 fournit deux matrices carrées A et B pour lesquelles $AB \neq BA$: ce seul contre-exemple suffit.

Conclusion. Non. Le produit de deux matrices carrées n'est pas commutatif en général : dans un calcul, on garde toujours l'ordre des facteurs.

Exercice 3

Vérifier la distributivité sur un exemple

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer $B + C$, puis $A(B + C)$.

INDICE

Début : la somme se calcule coefficient par coefficient. **Ensuite :** multiplie A par cette somme, ligne par colonne.

CORRIGÉ

Somme. On additionne les coefficients placés au même endroit : $2 + 0 = 2$, $1 + 3 = 4$, $1 + (-1) = 0$ et $4 + (-2) = 2$. Donc

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Produit. Ligne par colonne, avec les lignes de A et les colonnes de $B + C$:

- ligne 1, colonne 1 : $1 \times 2 + (-2) \times 0 = 2$;
- ligne 1, colonne 2 : $1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$;
- ligne 2, colonne 1 : $3 \times 2 + 0 \times 0 = 6$;
- ligne 2, colonne 2 : $3 \times 4 + 0 \times 2 = 12$.

Conclusion. On obtient

$$\begin{aligned} &A(B + C) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.

Calculer AB et AC, puis $AB + AC$. Comparer avec la question 1.

INDICE

Outil : deux produits ligne par colonne, puis une somme. Quelle règle de calcul annonce le résultat ?

CORRIGÉ

Calcul de AB. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$;
- ligne 1, colonne 2 : $1 \times 1 + (-2) \times 4 = -7$;
- ligne 2, colonne 1 : $3 \times 2 + 0 \times 1 = 6$;
- ligne 2, colonne 2 : $3 \times 1 + 0 \times 4 = 3$.

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de AC. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $1 \times 0 + (-2) \times (-1) = 2$;
- ligne 1, colonne 2 : $1 \times 3 + (-2) \times (-2) = 7$;
- ligne 2, colonne 1 : $3 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$;
- ligne 2, colonne 2 : $3 \times 3 + 0 \times (-2) = 9$.

Donc

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Somme. Coefficient par coefficient : $0 + 2 = 2$, $-7 + 7 = 0$, $6 + 0 = 6$ et $3 + 9 = 12$. Donc

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. $AB + AC = A(B + C)$: on retrouve la matrice de la question 1, comme l'annonce la distributivité.

3.

Calculer $(B+C)A$. Est-ce la même matrice que $A(B+C)$?

INDICE

Outil : cette fois, ce sont les lignes de $B+C$ qui sont multipliées par les colonnes de A.

CORRIGÉ

Cette fois, ce sont les lignes de $B+C$ qui sont multipliées par les colonnes de A :

- ligne 1, colonne 1 : $2\times 1+4\times 3=14$;
- ligne 1, colonne 2 : $2\times(-2)+4\times 0=-4$;
- ligne 2, colonne 1 : $0\times 1+2\times 3=6$;
- ligne 2, colonne 2 : $0\times(-2)+2\times 0=0$.

Donc

$$\begin{aligned}&(B+C)A\\&=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}14&-4\\6&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

À la ligne 1, colonne 1, on lit 14 dans $(B+C)A$ et 2 dans $A(B+C)$.

Conclusion. Non : $(B+C)A$ n'est pas la même matrice que $A(B+C)$. Pour développer un produit, on garde la matrice A du même côté.

Exercice 4

Le coût des fournées d'une boulangerie

Une boulangerie prépare trois sortes de fournées : pain, viennoiseries et gâteaux. La matrice A donne, pour une fournée de chaque sorte (une ligne par sorte, dans cet ordre), les masses en kg de farine, de beurre et de sucre (une colonne par ingrédient). La colonne P donne le prix d'un kilogramme de chaque ingrédient, en DH (données fictives) :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 6 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AP. Que représentent ses coefficients ?

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne ; une ligne de A fois P additionne masse fois prix pour une fournée.

CORRIGÉ

Existence. A est carrée d'ordre 3 et P a 3 lignes : le produit AP existe, et c'est une colonne à 3 lignes.

Calcul. Ligne par colonne :

- ligne 1 : $10 \times 6 + 0 \times 80 + 1 \times 10 = 70$;
- ligne 2 : $4 \times 6 + 2 \times 80 + 1 \times 10 = 194$;
- ligne 3 : $3 \times 6 + 1 \times 80 + 2 \times 10 = 118$.

Donc

$$AP = \begin{pmatrix} 70 \\ 194 \\ 118 \end{pmatrix}.$$

Sens des coefficients. Une ligne de A multipliée par P additionne, pour une fournée, chaque masse multipliée par le prix du kilogramme.

Conclusion. Les coefficients de AP sont les coûts en ingrédients, en DH, d'une fournée de pain (70 DH), de viennoiseries (194 DH) et de gâteaux (118 DH).

2.

Le beurre augmente de 5 DH par kilogramme et le sucre de 2 DH. On note

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AD, puis en déduire le nouveau coût de chaque fournée.

INDICE

Outil : les nouveaux prix forment la colonne $P + D$, et $A(P + D) = AP + AD$.

CORRIGÉ

Calcul de AD. Ligne par colonne :

- ligne 1 : $10 \times 0 + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 2$;
- ligne 2 : $4 \times 0 + 2 \times 5 + 1 \times 2 = 12$;
- ligne 3 : $3 \times 0 + 1 \times 5 + 2 \times 2 = 9$.

Donc

$$AD = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Nouveaux coûts. Les nouveaux prix forment la colonne $P + D$. D'après la distributivité, $A(P + D) = AP + AD$:

$$\begin{aligned} & A(P + D) \\ &= AP + AD \\ &= \begin{pmatrix} 70 \\ 194 \\ 118 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 72 \\ 206 \\ 127 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Contrôle direct pour le pain. La colonne des nouveaux prix est

$$P + D = \begin{pmatrix} 6 \\ 85 \\ 12 \end{pmatrix},$$

et la ligne 1 donne $10 \times 6 + 0 \times 85 + 1 \times 12 = 72$.

Conclusion. Après la hausse, une fournée coûte 72 DH pour le pain, 206 DH pour les viennoiseries et 127 DH pour les gâteaux.

3.

Après la hausse, la boulangerie prépare chaque jour deux fournées de pain, une de viennoiseries et une de gâteaux. Calculer le coût des ingrédients d'une journée.

INDICE

Outil : multiplie chaque nouveau coût par le nombre de fournées, puis additionne.

CORRIGÉ

Une journée compte deux fournées de pain, une de viennoiseries et une de gâteaux. On multiplie chaque nouveau coût de la question 2 par le nombre de fournées, puis on additionne : $2 \times 72 + 1 \times 206 + 1 \times 127 = 477$.

Conclusion. Les ingrédients d'une journée coûtent 477 DH.

Exercice 5

La méthode de Gauss sur un système de trois équations

On considère le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

1.

Écrire la matrice augmentée de ce système.

INDICE

Outil : une ligne par équation ; les coefficients de x, y, z, puis le second membre après le trait.

CORRIGÉ

On écrit une ligne par équation : les coefficients de x, y et z, puis le second membre après le trait.

Conclusion. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

2.

Effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

INDICE

Outil : le pivot est le 1 de la ligne L_1. Applique chaque opération à toute la ligne, second membre compris.

CORRIGÉ

Le pivot est le coefficient 1 de la ligne 1, colonne 1. Chaque opération s'applique à toute la ligne, y compris au second membre :

- $L_2 - 2L_1$: $2 - 2 \times 1 = 0$, $-1 - 2 \times 1 = -3$, $1 - 2 \times 1 = -1$ et $8 - 2 \times 4 = 0$;
- $L_3 + L_1$: $-1 + 1 = 0$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ et $5 + 4 = 9$.

Conclusion. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right).$$

3.

Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis écrire le système triangulaire obtenu.

INDICE

Outil : cette opération annule le coefficient de y dans la troisième ligne.

CORRIGÉ

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ annule le coefficient de y dans la ligne 3 : $3 + (-3) = 0$, puis $4 + (-1) = 3$ et $9 + 0 = 9$.

Conclusion. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right),$$

c'est-à-dire, ligne par ligne, le système triangulaire

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - z = 0 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

4.

Résoudre le système et vérifier la solution dans le système de départ.

INDICE

Début : commence par la dernière équation. **Ensuite :** remonte, puis remplace dans les trois équations de départ.

CORRIGÉ

Lien avec le système de départ. Les opérations des questions 2 et 3 sont élémentaires : d'après la propriété des opérations élémentaires, le système triangulaire et le système de départ ont les mêmes solutions.

Remontée.

- $3z = 9$, donc $z = 3$;
- $-3y - z = 0$ devient $-3y - 3 = 0$, donc $y = -1$;
- $x + y + z = 4$ devient $x - 1 + 3 = 4$, donc $x = 2$.

Vérification dans le système de départ.

- $2 + (-1) + 3 = 4$;
- $2 \times 2 - (-1) + 3 = 8$;
- $-2 + 2 \times (-1) + 3 \times 3 = 5$.

Conclusion. La solution du système est $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

Exercice 6

La production d'un atelier de couture

Un atelier de couture fabrique en une semaine des chemises, des pantalons et des vestes (données fictives). Une chemise demande 2 m de tissu et 1 h de travail ; un pantalon, 3 m et 2 h ; une veste, 4 m et 4 h. Cette semaine, l'atelier a produit 45 pièces, avec 125 m de tissu et 90 h de travail. On note x, y et z les nombres de chemises, de pantalons et de vestes.

1.

Écrire le système d'équations vérifié par x, y et z.

INDICE

Outil : une équation pour le nombre de pièces, une pour le tissu, une pour les heures.

CORRIGÉ

On écrit une équation par donnée de l'énoncé :

- nombre de pièces : $x + y + z = 45$;
- tissu, en m : $2x + 3y + 4z = 125$;
- travail, en h : $x + 2y + 4z = 90$.

Conclusion. Les nombres x, y et z vérifient le système

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + 3y + 4z = 125 \\ x + 2y + 4z = 90 \end{cases}$$

2.

Écrire ce système sous la forme $AX = B$.

INDICE

Outil : une ligne de A par contrainte, une colonne par sorte de pièce.

CORRIGÉ

On garde l'ordre x, y, z des inconnues : la ligne i de A contient les coefficients de l'équation i.

Conclusion. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 45 \\ 125 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

3.

Résoudre le système par la méthode de Gauss sur la matrice augmentée.

INDICE

Début : annule les coefficients de x dans L_2 et L_3 avec L_1. **Ensuite :** annule le coefficient de y dans L_3 avec L_2.

CORRIGÉ

Matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 3 & 4 & 125 \\ 1 & 2 & 4 & 90 \end{array}\right)$$

Premier pivot. Le pivot est le 1 de la ligne 1. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \\ 0 & 1 & 3 & 45 \end{array}\right).$$

Deuxième pivot. Le pivot est le 1 de la ligne 2, colonne 2. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right).$$

Unicité. Ces opérations sont élémentaires : d'après la propriété des opérations élémentaires, ce dernier système a les mêmes solutions que le système de départ. Il est triangulaire, de coefficients diagonaux 1, 1 et 1 non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, sa solution est unique.

Remontée.

- $z = 10$;
- $y + 2 \times 10 = 35$, donc $y = 15$;
- $x + 15 + 10 = 45$, donc $x = 20$.

Conclusion. La solution du système est $(x, y, z) = (20, 15, 10)$.

4.

Interpréter la solution et la vérifier avec les données de l'énoncé.

INDICE

Outil : remplace les trois nombres trouvés dans chaque contrainte de l'énoncé.

CORRIGÉ

Interprétation. L'atelier a fabriqué 20 chemises, 15 pantalons et 10 vestes. Ce sont des entiers positifs : la solution convient à la situation.

Vérification.

- pièces : $20 + 15 + 10 = 45$;
- tissu, en m : $2 \times 20 + 3 \times 15 + 4 \times 10 = 125$;
- travail, en h : $20 + 2 \times 15 + 4 \times 10 = 90$.

Conclusion. Cette semaine, l'atelier a produit 20 chemises, 15 pantalons et 10 vestes, ce qui respecte les trois données de l'énoncé.

Exercice 7

Tester une solution proposée

On considère le système $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.

Le triplet $(1, 3, -1)$ est-il solution de ce système ?

INDICE

Outil : calcule le produit de A par la colonne formée de $1, 3$ et -1, puis compare le résultat à B.

CORRIGÉ

Le triplet est solution si et seulement si le produit de A par la colonne formée de $1, 3$ et -1 est égal à B. Ligne par colonne :

- ligne 1 : $2 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times (-1) = 5$;
- ligne 2 : $1 \times 1 + (-1) \times 3 + 3 \times (-1) = -5$;
- ligne 3 : $0 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times (-1) = 5$.

Donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième coefficient vaut -5, alors que celui de B vaut 4.

Conclusion. Le triplet $(1, 3, -1)$ n'est pas solution du système.

2.

Même question pour le triplet $(2, 1, 1)$.

INDICE

Outil : même calcul avec la colonne formée de 2, 1 et 1.

CORRIGÉ

Ligne par colonne :

- ligne 1 : $2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 5$;
- ligne 2 : $1 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times 1 = 4$;
- ligne 3 : $0 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$.

Donc

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = B.$$

Conclusion. Le triplet $(2, 1, 1)$ est solution du système.

3.

Écrire la matrice augmentée du système, puis effectuer $L_1 \leftrightarrow L_2$, ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, enfin $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$. En déduire que $(2, 1, 1)$ est la seule solution.

INDICE

Outil : l'échange place un pivot égal à 1 en haut. À la fin, regarde la diagonale du système triangulaire obtenu.

CORRIGÉ

Matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Échange. Après $L_1 \leftrightarrow L_2$, le pivot de la ligne 1 vaut 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Élimination de x. Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Élimination de y. Après $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{array}\right).$$

Système équivalent. L'échange et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ sont des opérations élémentaires ; $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$ en enchaîne deux : $L_3 \leftarrow 3L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. D'après la propriété des opérations élémentaires, le système obtenu est équivalent au système de départ.

Unicité. Il est triangulaire et ses coefficients diagonaux $1, 3$ et 15 sont non nuls : d'après la propriété des systèmes triangulaires, il a une unique solution.

Remontée.

- $15z = 15$, donc $z = 1$;
- $3y - 6z = -3$ devient $3y - 6 = -3$, donc $3y = 3$ et $y = 1$;
- $x - y + 3z = 4$ devient $x - 1 + 3 = 4$, donc $x = 2$.

Conclusion. Le système a une seule solution : le triplet $(2, 1, 1)$ trouvé à la question 2.