BURHAN

Calcul matriciel : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Application	8

Exercice 1

Lire une matrice d'ordre 3

On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On note m_{ij} le coefficient de M placé à la ligne i et à la colonne j.

1.

Donner l'ordre de M, puis le nombre de lignes de Y.

INDICE

Outil : compte les lignes et les colonnes. Une matrice carrée a autant de lignes que de colonnes.

2.

Lire les coefficients m_{23}, m_{32} et m_{13}.

INDICE

Outil : le premier indice donne la ligne, le second la colonne.

3.

Quel coefficient de M vaut -3 ? Donner les coefficients diagonaux de M.

INDICE

Outil : les coefficients diagonaux ont le même numéro de ligne et de colonne.

Exercice 2

Quand deux matrices sont-elles égales ?

1.

Déterminer les réels x et y tels que

$$\begin{pmatrix} x+1 & 4 \\ 3 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

INDICE

Outil : l'égalité de deux matrices. Écris une égalité de réels pour chaque place.

2.

Existe-t-il un réel a tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

INDICE

Outil : compare les deux places où se trouve a.

3.

Soit b un réel. On pose

$$D = \begin{pmatrix} b-2 & 0 \\ 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de b a-t-on $D = O$? Pour quelle valeur a-t-on $D = I_2$?

INDICE

Outil : O n'a que des 0 ; I_2 a des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Exercice 3

Combinaisons de deux matrices d'ordre 2

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer $3A$.

INDICE

Outil : le produit par un réel multiplie chaque coefficient.

2.

Calculer $3A + B$.

INDICE

Outil : $3A$ et B sont d'ordre 2 ; additionne les coefficients placés au même endroit.

3.

Calculer $A - 2B$.

INDICE

Début : calcule d'abord $2B$. **Ensuite :** soustrais coefficient par coefficient.

Exercice 4

Les commandes de trois classes à la librairie

Une librairie vend des cahiers à 12 DH, des livres à 35 DH et des stylos à 4 DH (données fictives). Trois classes d'un collège passent commande. On range les quantités dans la matrice Q : la ligne i correspond à la classe i, et les colonnes aux cahiers, aux livres et aux stylos, dans cet ordre. On range les prix dans la colonne P :

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.

Justifier que le produit QP existe, puis le calculer.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne. Multiplie chaque ligne de Q par la colonne P, terme à terme, puis additionne.

2.

Que représentent les coefficients de QP ? Quelle classe dépense le plus ?

INDICE

Outil : une ligne de QP additionne quantité fois prix pour une même classe.

Exercice 5

Un produit de deux matrices d'ordre 2

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : pour le coefficient de la ligne i et de la colonne j, multiplie la ligne i de A par la colonne j de B, puis additionne.

2.

Calculer AI_2. Quelle propriété du cours retrouves-tu ?

INDICE

Outil : la même règle ligne par colonne, avec I_2, qui a des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Exercice 6

Passer d'un système à sa forme matricielle

On considère le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - 3z = 0 \\ 4y + z = 9 \end{cases}$$

1.

Écrire ce système sous la forme $AX = B$.

INDICE

Outil : range les inconnues dans l'ordre x, y, z ; une inconnue absente a le coefficient 0.

2.

Vérifier, en calculant AX, que $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ est solution du système.

INDICE

Outil : calcule le produit de A par la colonne formée de 3, 2 et 1, ligne par colonne, puis compare le résultat à B.

3.

Écrire le système dont la forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

INDICE

Outil : chaque ligne du produit donne le premier membre d'une équation.

Exercice 7

Deux opérations sur les lignes

On considère le système de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

1.

Effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et écrire la nouvelle ligne L_2.

INDICE

Outil : calcule $L_2 - 3L_1$ pour chacun des quatre nombres de la ligne, sans oublier le second membre.

2.

Effectuer ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et écrire la matrice augmentée obtenue.

INDICE

Outil : même travail avec $L_3 + 2L_1$; les lignes L_1 et L_2 ne changent pas.

3.

Écrire le système qui correspond à cette nouvelle matrice. A-t-il les mêmes solutions que le système de départ ?

INDICE

Outil : chaque ligne se lit comme une équation en x, y, z ; pense aux opérations élémentaires et aux systèmes équivalents.

Exercice 8

Remonter un système triangulaire

On considère le système de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

1.

Pourquoi ce système a-t-il une unique solution ?

INDICE

Outil : la propriété des systèmes triangulaires. Regarde les coefficients sous la diagonale, puis ceux de la diagonale.

2.

Résoudre ce système en remontant.

INDICE

Début : la troisième ligne donne $3z = 6$. **Ensuite :** reporte z dans la deuxième ligne, puis y et z dans la première.

3.

Vérifier la solution trouvée.

INDICE

Outil : remplace x, y et z dans chaque équation.