BURHAN

Calcul matriciel : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul matriciel	Application	8

Exercice 1

Lire une matrice d'ordre 3

On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On note m_{ij} le coefficient de M placé à la ligne i et à la colonne j.

1.

Donner l'ordre de M, puis le nombre de lignes de Y.

INDICE

Outil : compte les lignes et les colonnes. Une matrice carrée a autant de lignes que de colonnes.

CORRIGÉ

Matrice M. Elle a 3 lignes et 3 colonnes : c'est une matrice carrée d'ordre 3.

Matrice Y. Elle a 4 lignes et une seule colonne : c'est une matrice colonne à 4 lignes.

Conclusion. M est une matrice carrée d'ordre 3, et Y est une matrice colonne à 4 lignes.

2.

Lire les coefficients m_{23}, m_{32} et m_{13}.

INDICE

Outil : le premier indice donne la ligne, le second la colonne.

CORRIGÉ

Le premier indice donne la ligne, le second la colonne.

- m_{23} : ligne 2, colonne 3, donc $m_{23} = 5$;
- m_{32} : ligne 3, colonne 2, donc $m_{32} = 6$;
- m_{13} : ligne 1, colonne 3, donc $m_{13} = 0$.

Conclusion. On lit $m_{23} = 5$, $m_{32} = 6$ et $m_{13} = 0$. Comme $m_{23} \neq m_{32}$, l'ordre des deux indices compte.

3.

Quel coefficient de M vaut -3 ? Donner les coefficients diagonaux de M.

INDICE

Outil : les coefficients diagonaux ont le même numéro de ligne et de colonne.

CORRIGÉ

Coefficient égal à -3. Le réel -3 se trouve à la ligne 3 et à la colonne 1 de M.

Diagonale. Un coefficient diagonal a le même numéro de ligne et de colonne : ce sont m_{11}, m_{22} et m_{33} .

Conclusion. Le coefficient égal à -3 est m_{31}. Les coefficients diagonaux de M sont $m_{11} = 4$, $m_{22} = 7$ et $m_{33} = 1$.

Exercice 2

Quand deux matrices sont-elles égales ?

1.

Déterminer les réels x et y tels que

$$\begin{pmatrix} x+1 & 4 \\ 3 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

INDICE

Outil : l'égalité de deux matrices. Écris une égalité de réels pour chaque place.

CORRIGÉ

Les deux matrices sont carrées d'ordre 2. D'après l'égalité de deux matrices, elles sont égales si et seulement si leurs coefficients placés au même endroit sont égaux.

Places sans inconnue. La ligne 1, colonne 2 donne $4 = 4$ et la ligne 2, colonne 1 donne $3 = 3$: ces deux égalités sont vraies.

Places avec une inconnue.

- ligne 1, colonne 1 : $x + 1 = 5$, donc $x = 4$;
- ligne 2, colonne 2 : $2y = -6$, donc $y = -3$.

Conclusion. Les deux matrices sont égales pour $x = 4$ et $y = -3$.

2.

Existe-t-il un réel a tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

INDICE

Outil : compare les deux places où se trouve a.

CORRIGÉ

Les deux matrices sont carrées d'ordre 2 et le réel a figure à deux places de la première.

- ligne 1, colonne 2 : il faudrait $a = 3$;
- ligne 2, colonne 1 : il faudrait $a = -3$.

Un même réel ne peut pas valoir à la fois 3 et -3.

Conclusion. Il n'existe aucun réel a qui rende ces deux matrices égales.

3.

Soit b un réel. On pose

$$D = \begin{pmatrix} b-2 & 0 \\ 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de b a-t-on $D = O$? Pour quelle valeur a-t-on $D = I_2$?

INDICE

Outil : O n'a que des 0 ; I_2 a des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

CORRIGÉ

Les coefficients de D situés hors de la diagonale sont déjà nuls, comme ceux de O et de I_2. Il reste à comparer les deux coefficients diagonaux, égaux à $b-2$.

- $D = O$ si et seulement si $b-2 = 0$, soit $b = 2$;
- $D = I_2$ si et seulement si $b-2 = 1$, soit $b = 3$.

Conclusion. On a $D = O$ pour $b = 2$, et $D = I_2$ pour $b = 3$.

Exercice 3

Combinaisons de deux matrices d'ordre 2

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer $3A$.

INDICE

Outil : le produit par un réel multiplie chaque coefficient.

CORRIGÉ

D'après la définition du produit par un réel, on multiplie chaque coefficient de A par 3 : $3 \times 2 = 6$, $3 \times (-1) = -3$, $3 \times 0 = 0$ et $3 \times 3 = 9$.

Conclusion. On obtient

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.

Calculer $3A + B$.

INDICE

Outil : $3A$ et B sont d'ordre 2 ; additionne les coefficients placés au même endroit.

CORRIGÉ

$3A$ et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 : leur somme existe. On additionne les coefficients placés au même endroit :

- ligne 1 : $6 + 1 = 7$ et $-3 + 4 = 1$;
- ligne 2 : $0 + (-2) = -2$ et $9 + 5 = 14$.

Conclusion. On obtient

$$3A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

3.

Calculer $A - 2B$.

INDICE

Début : calcule d'abord $2B$. **Ensuite :** soustrais coefficient par coefficient.

CORRIGÉ

Calcul de $2B$. On multiplie chaque coefficient de B par 2 :

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Différence. A et $2B$ sont d'ordre 2 ; on soustrait les coefficients placés au même endroit :

- ligne 1 : $2 - 2 = 0$ et $-1 - 8 = -9$;
- ligne 2 : $0 - (-4) = 4$ et $3 - 10 = -7$.

Conclusion. On obtient

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Les commandes de trois classes à la librairie

Une librairie vend des cahiers à 12 DH, des livres à 35 DH et des stylos à 4 DH (données fictives). Trois classes d'un collège passent commande. On range les quantités dans la matrice Q : la ligne i correspond à la classe i, et les colonnes aux cahiers, aux livres et aux stylos, dans cet ordre. On range les prix dans la colonne P :

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1.

Justifier que le produit QP existe, puis le calculer.

INDICE

Outil : la règle ligne par colonne. Multiplie chaque ligne de Q par la colonne P, terme à terme, puis additionne.

CORRIGÉ

Existence. Q est carrée d'ordre 3 et P a 3 lignes : le produit QP existe, et c'est une matrice colonne à 3 lignes.

Calcul. D'après la règle ligne par colonne, on multiplie chaque ligne de Q par la colonne P, terme à terme, puis on additionne :

- ligne 1 : $10 \times 12 + 2 \times 35 + 5 \times 4 = 210$;
- ligne 2 : $0 \times 12 + 4 \times 35 + 10 \times 4 = 180$;
- ligne 3 : $6 \times 12 + 1 \times 35 + 0 \times 4 = 107$.

Conclusion. Le produit QP existe et vaut

$$QP = \begin{pmatrix} 210 \\ 180 \\ 107 \end{pmatrix}.$$

2.

Que représentent les coefficients de QP ? Quelle classe dépense le plus ?

INDICE

Outil : une ligne de QP additionne quantité fois prix pour une même classe.

CORRIGÉ

Sens d'un coefficient. Le coefficient de la ligne i de QP additionne, pour la classe i, chaque quantité multipliée par le prix de l'article : c'est le montant de la commande de cette classe, en DH.

Comparaison. La classe 1 paie 210 DH, la classe 2 paie 180 DH et la classe 3 paie 107 DH. Le plus grand montant est 210 DH.

Conclusion. Les coefficients de QP sont les montants, en DH, des commandes des trois classes. La classe 1 dépense le plus.

Exercice 5

Un produit de deux matrices d'ordre 2

On donne les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : pour le coefficient de la ligne i et de la colonne j, multiplie la ligne i de A par la colonne j de B, puis additionne.

CORRIGÉ

A et B sont carrées d'ordre 2 : le produit AB existe et il est carré d'ordre 2. D'après la règle ligne par colonne, le coefficient de la ligne i et de la colonne j s'obtient avec la ligne i de A et la colonne j de B :

- ligne 1, colonne 1 : $3 \times 0 + 1 \times 5 = 5$;
- ligne 1, colonne 2 : $3 \times 2 + 1 \times (-1) = 5$;
- ligne 2, colonne 1 : $(-2) \times 0 + 4 \times 5 = 20$;
- ligne 2, colonne 2 : $(-2) \times 2 + 4 \times (-1) = -8$.

Conclusion. On obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.

Calculer AI_2. Quelle propriété du cours retrouves-tu ?

INDICE

Outil : la même règle ligne par colonne, avec I_2, qui a des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

CORRIGÉ

A et I_2 sont carrées d'ordre 2. Ligne par colonne :

- ligne 1, colonne 1 : $3 \times 1 + 1 \times 0 = 3$;
- ligne 1, colonne 2 : $3 \times 0 + 1 \times 1 = 1$;
- ligne 2, colonne 1 : $(-2) \times 1 + 4 \times 0 = -2$;
- ligne 2, colonne 2 : $(-2) \times 0 + 4 \times 1 = 4$.

Donc

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Conclusion. $AI_2 = A$: on retrouve le rôle de la matrice unité, multiplier une matrice carrée d'ordre 2 par I_2 ne la change pas.

Exercice 6

Passer d'un système à sa forme matricielle

On considère le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x - 3z = 0 \\ 4y + z = 9 \end{cases}$$

1.

Écrire ce système sous la forme $AX = B$.

INDICE

Outil : range les inconnues dans l'ordre x, y, z ; une inconnue absente a le coefficient 0.

CORRIGÉ

On range les inconnues dans l'ordre x, y, z. La deuxième équation ne contient pas y et la troisième ne contient pas x : leur coefficient est 0.

La ligne i de A contient les coefficients de l'équation i ; la colonne B contient les seconds membres.

Conclusion. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2.

Vérifier, en calculant AX, que $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ est solution du système.

INDICE

Outil : calcule le produit de A par la colonne formée de 3, 2 et 1, ligne par colonne, puis compare le résultat à B.

CORRIGÉ

On calcule AX pour $x = 3$, $y = 2$ et $z = 1$, ligne par colonne :

- ligne 1 : $2 \times 3 + 1 \times 2 + (-1) \times 1 = 7$;
- ligne 2 : $1 \times 3 + 0 \times 2 + (-3) \times 1 = 0$;
- ligne 3 : $0 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 1 = 9$.

On obtient

$$AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = B.$$

Conclusion. Le triplet $(3, 2, 1)$ est solution du système.

3.

Écrire le système dont la forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

INDICE

Outil : chaque ligne du produit donne le premier membre d'une équation.

CORRIGÉ

D'après la règle ligne par colonne, chaque ligne du produit donne le premier membre d'une équation :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2v \\ 3u + 5v \end{pmatrix}.$$

Deux matrices colonnes égales ont, à chaque place, le même coefficient.

Conclusion. Cette forme matricielle est celle du système

$$\begin{cases} u - 2v = 4 \\ 3u + 5v = 1 \end{cases}$$

Exercice 7

Deux opérations sur les lignes

On considère le système de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

1.

Effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et écrire la nouvelle ligne L_2.

INDICE

Outil : calcule $L_2 - 3L_1$ pour chacun des quatre nombres de la ligne, sans oublier le second membre.

CORRIGÉ

L'opération remplace chaque nombre de L_2, second membre compris, par ce nombre diminué de trois fois le nombre de L_1 placé dans la même colonne :

- colonne 1 : $3 - 3 \times 1 = 0$;
- colonne 2 : $1 - 3 \times 2 = -5$;
- colonne 3 : $2 - 3 \times (-1) = 5$;
- second membre : $7 - 3 \times 4 = -5$.

Conclusion. La nouvelle ligne L_2 est $(0, -5, 5, -5)$, de second membre -5.

2.

Effectuer ensuite $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et écrire la matrice augmentée obtenue.

INDICE

Outil : même travail avec $L_3 + 2L_1$; les lignes L_1 et L_2 ne changent pas.

CORRIGÉ

On calcule chaque nombre de $L_3 + 2L_1$:

- colonne 1 : $-2 + 2 \times 1 = 0$;
- colonne 2 : $0 + 2 \times 2 = 4$;
- colonne 3 : $5 + 2 \times (-1) = 3$;
- second membre : $3 + 2 \times 4 = 11$.

La ligne L_1 ne change pas, et L_2 reste celle obtenue à la question 1.

Conclusion. La matrice augmentée obtenue est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

3.

Écrire le système qui correspond à cette nouvelle matrice. A-t-il les mêmes solutions que le système de départ ?

INDICE

Outil : chaque ligne se lit comme une équation en x, y, z ; pense aux opérations élémentaires et aux systèmes équivalents.

CORRIGÉ

Système obtenu. Chaque ligne de la nouvelle matrice se lit comme une équation en x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -5y + 5z = -5 \\ 4y + 3z = 11 \end{cases}$$

Mêmes solutions. Les deux opérations effectuées sont des opérations élémentaires. D'après la propriété des opérations élémentaires, elles changent un système en un système équivalent.

Conclusion. Le système obtenu est équivalent au système de départ : il a exactement les mêmes solutions.

Exercice 8

Remonter un système triangulaire

On considère le système de matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

1.

Pourquoi ce système a-t-il une unique solution ?

INDICE

Outil : la propriété des systèmes triangulaires. Regarde les coefficients sous la diagonale, puis ceux de la diagonale.

CORRIGÉ

Forme triangulaire. Les coefficients placés sous la diagonale sont nuls : le système est triangulaire.

Diagonale. Ses coefficients diagonaux 2, 4 et 3 sont tous non nuls.

Conclusion. D'après la propriété des systèmes triangulaires, ce système a une unique solution.

2.

Résoudre ce système en remontant.

INDICE

Début : la troisième ligne donne $3z = 6$. **Ensuite :** reporte z dans la deuxième ligne, puis y et z dans la première.

CORRIGÉ

On résout de la dernière équation vers la première.

- Ligne 3 : $3z = 6$, donc $z = 2$.
- Ligne 2 : $4y - z = 2$ devient $4y - 2 = 2$, donc $4y = 4$ et $y = 1$.
- Ligne 1 : $2x - y + 3z = 13$ devient $2x - 1 + 6 = 13$, donc $2x = 8$ et $x = 4$.

Conclusion. La solution du système est $(x, y, z) = (4, 1, 2)$.

3.

Vérifier la solution trouvée.

INDICE

Outil : remplace x, y et z dans chaque équation.

CORRIGÉ

On remplace x par 4, y par 1 et z par 2 dans chaque équation :

- ligne 1 : $2 \times 4 - 1 + 3 \times 2 = 13$;
- ligne 2 : $4 \times 1 - 2 = 2$;
- ligne 3 : $3 \times 2 = 6$.

Conclusion. Les trois égalités sont vraies : $(4, 1, 2)$ est bien la solution du système.