BURHAN

Calcul matriciel

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/calcul-matriciel/cours

Chapitre	Semestre
Calcul matriciel	Semestre 2

Des tableaux de nombres pour décider

Une petite coopérative d'artisanes vend des savons, des bougies et des paniers dans trois boutiques : à Rabat, à Fès et à Agadir (données fictives). Voici les ventes de la semaine.

Boutique	Savons	Bougies	Paniers
Rabat	20	10	5
Fès	15	12	8
Agadir	30	6	4

Un savon coûte 12 DH, une bougie 25 DH et un panier 40 DH. La gérante veut savoir quelle boutique a rapporté le plus.

Devine : Une prédiction

Sans tout calculer, quelle boutique a rapporté le plus cette semaine ?

A. Agadir, qui a vendu le plus d'articles.
Faux.
Agadir a vendu 40 articles, surtout des savons, les moins chers : elle a rapporté 670 DH.

B. Rabat, qui a vendu autant d'articles que Fès.
Faux.
Rabat a rapporté 690 DH : elle a vendu moins de paniers, l'article le plus cher.

C. Fès, qui a vendu le plus de paniers.
Juste.
Juste : 800 DH. Les paniers, à 40 DH, font la différence.

Correction
On multiplie chaque quantité par son prix, puis on additionne, boutique par boutique.

- Rabat : $20 \times 12 + 10 \times 25 + 5 \times 40 = 240 + 250 + 200 = 690$ DH.
- Fès : $15 \times 12 + 12 \times 25 + 8 \times 40 = 180 + 300 + 320 = 800$ DH.
- Agadir : $30 \times 12 + 6 \times 25 + 4 \times 40 = 360 + 150 + 160 = 670$ DH.

Fès a rapporté le plus. Le nombre d'articles ne suffit pas : il faut tenir compte des prix.

Ce calcul « quantités fois prix, puis somme » revient sans cesse en gestion. Dans ce chapitre, tu ranges ces tableaux dans des **matrices**.

Tu apprends à les additionner et à les multiplier. Tu écris ensuite un système d'équations sous la forme d'un seul produit de matrices.

Enfin, tu le résous par la méthode de Gauss, appliquée directement au tableau des nombres.

Matrices carrées et matrices colonnes

Du tableau à la matrice

En clair. Garde seulement les nombres du tableau des ventes, chacun à sa place, et entoure-les de parenthèses. Tu obtiens une **matrice** :

$$Q = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 \\ 15 & 12 & 8 \\ 30 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne correspond à une boutique : Rabat, Fès, Agadir. Chaque colonne correspond à un produit : savons, bougies, paniers.

Un nombre se repère par sa ligne, puis par sa colonne.

Devine : Lire un nombre

Dans la matrice Q, quel nombre est placé à la ligne 2 et à la colonne 3 ? Que représente-t-il ?

A. 12 : les bougies vendues à Fès.
Faux.
C'est la ligne 2 et la colonne 2 : regarde une colonne plus à droite.

B. 6 : les bougies vendues à Agadir.
Faux.
Tu as lu la ligne 3 et la colonne 2 : la ligne vient en premier.

C. 5 : les paniers vendus à Rabat.
Faux.
C'est bien la colonne 3, mais à la ligne 1, celle de Rabat.

D. 8 : les paniers vendus à Fès.
Juste.
Juste : ligne 2, Fès ; colonne 3, paniers.

Correction
La ligne 2 est celle de Fès : 15, 12, 8. Son troisième nombre est 8.

La colonne 3 est celle des paniers : Fès a vendu 8 paniers. On lit toujours la ligne d'abord, la colonne ensuite.

Matrice carrée, matrice colonne

Définition : Matrice carrée, matrice colonne

Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq 4$. Une **matrice carrée d'ordre** n est un tableau carré de n^2 nombres réels, rangés en n lignes et n colonnes et écrits entre parenthèses. Le réel placé à la ligne i et à la colonne j s'appelle le **coefficient** a_{ij} de la matrice. Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Une **matrice colonne** à n lignes est un tableau de n réels rangés en une seule colonne, par exemple $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Deux matrices de même format (deux matrices carrées de même ordre, ou deux matrices colonnes de même nombre de lignes) sont **égales** lorsque leurs coefficients placés au même endroit sont égaux.

La **matrice nulle**, notée O, a tous ses coefficients nuls. La **matrice unité** d'ordre n, notée I_n, a des 1 sur sa diagonale (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) et des 0 partout ailleurs.

Exemple : des matrices d'ordre 2, 3 et 4

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2. Son coefficient a_{12} vaut -1 (ligne 1, colonne 2), et a_{21} vaut 0.
- La matrice Q des ventes est carrée d'ordre 3 : 3 lignes, 3 colonnes, 9 coefficients.

La matrice D ci-dessous est carrée d'ordre 4 :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle a 16 coefficients, dont beaucoup sont nuls. À la ligne 4 et à la colonne 1, on lit 4 ; à la ligne 1 et à la colonne 4, on lit 1.

Exemple : la colonne des prix

Les trois prix forment une **matrice colonne** à 3 lignes :

$$P = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Ses lignes suivent l'ordre des produits : savon, bougie, panier.

La première colonne de Q, $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$, est aussi une matrice colonne. Elle donne les savons vendus dans chaque boutique.

Égalité, matrice nulle, matrice unité

Deux matrices de même format sont égales lorsque leurs coefficients placés au même endroit sont égaux. Une égalité de matrices d'ordre 2 donne donc quatre égalités de réels.

Ainsi, l'égalité

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

équivaut à $a = 5$ et $b = -1$.

Vérifie : Un réel inconnu

Pour quelle valeur du réel x a-t-on $\begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$?

A. $x = 3$

Juste.

Juste : $2 \times 3 - 1 = 5$.

B. $x = 2$

Faux.

Tu as égalé $2x - 1$ au coefficient 3, qui n'est pas au même endroit.

C. $x = \dfrac{5}{2}$

Faux.

Tu as oublié le -1 : $2 \times \dfrac{5}{2} - 1 = 4$, et non 5.

D. Aucune valeur : les deux écritures diffèrent.

Faux.

Deux écritures différentes peuvent désigner la même matrice : on compare les coefficients.

Correction

Les coefficients placés au même endroit doivent être égaux. En haut à gauche, on obtient l'équation $2x - 1 = 5$.

Donc $2x = 6$, puis $x = 3$.

Les trois autres coefficients sont déjà égaux : $3 = 3$, $0 = 0$ et $7 = 7$.

Exemple : matrice nulle et matrices unités

- La matrice nulle d'ordre 2 est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matrice unité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice unité d'ordre 3 est

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans I_3, les coefficients a_{11}, a_{22} et a_{33} valent 1 : ils forment la **diagonale**. Tous les autres valent 0.

À toi : Lire et comparer

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donne son ordre, puis le coefficient de la ligne 3 et de la colonne 2, et celui de la ligne 1 et de la colonne 3.

Trouve ensuite les réels a et b tels que

$$\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 4 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compte les lignes et les colonnes de M.
Indice 2
Pour l'égalité, écris une équation par coefficient placé au même endroit.
Indice 3
Point délicat : la ligne se lit avant la colonne ; ne les échange pas.

Réponse
Ordre. M a 3 lignes et 3 colonnes : elle est carrée d'ordre 3.

Coefficients. Ligne 3, colonne 2 : -5. Ligne 1, colonne 3 : -2.

Égalité. Les deux matrices sont égales si $a+1=3$ et $2b=-6$, les autres coefficients étant déjà égaux.

Conclusion. M est d'ordre 3, ses coefficients cherchés valent -5 et -2, et l'égalité a lieu pour $a=2$ et $b=-3$.

Somme et produit par un réel

Deux semaines de ventes

En clair. La semaine suivante, la coopérative note ses ventes dans une nouvelle matrice, rangée de la même façon (données fictives) :

$$R = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 6 \\ 20 & 10 & 7 \\ 25 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour connaître les ventes des deux semaines, boutique par boutique et produit par produit, il suffit d'additionner les nombres placés au même endroit dans Q et dans R.

Devine : Un total sur deux semaines

Combien de bougies la boutique de Fès a-t-elle vendues en deux semaines ? Où ce total se place-t-il dans la matrice des totaux ?

A. 120, à la ligne 2 et à la colonne 2.
Faux.
Tu as multiplié 12 par 10 : un total s'obtient par une addition.

B. 22, à la ligne 2 et à la colonne 2.
Juste.
Juste : $12 + 10 = 22$, à la place des bougies de Fès.

C. 24, à la ligne 1 et à la colonne 2.
Faux.
C'est le total des bougies de Rabat, $10 + 14$. Fès est à la ligne 2.

D. 35, à la ligne 2 et à la colonne 1.
Faux.
C'est le total des savons de Fès : $15 + 20$.

Correction
Les bougies de Fès sont à la ligne 2 et à la colonne 2 dans les deux matrices : 12 dans Q, 10 dans R.

Le total, $12 + 10 = 22$, se place au même endroit dans la matrice des totaux.

Somme et produit par un réel

Définition : Somme de deux matrices, produit par un réel

Soit A et B deux matrices de même format, de coefficients a_{ij} et b_{ij}, et k un réel.

- La **somme** $A + B$ est la matrice de même format dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $a_{ij} + b_{ij}$.

- Le **produit** de A par le réel k est la matrice kA dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $k\,a_{ij}$.
- La **matrice opposée** de A est $-A = (-1)A$, et la **différence** $A - B$ est la matrice $A + (-B)$.

Exemple : les ventes des deux semaines

Les matrices Q et R sont carrées d'ordre 3 : leur somme existe. D'après la définition de la somme :

$$\begin{aligned} &Q + R \\ &= \begin{pmatrix} 20+18 & 10+14 & 5+6 \\ 15+20 & 12+10 & 8+7 \\ 30+25 & 6+8 & 4+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 38 & 24 & 11 \\ 35 & 22 & 15 \\ 55 & 14 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En deux semaines, Agadir a vendu 55 savons, et Fès 15 paniers.

Exemple : une hausse des prix, une différence

Une hausse des prix. La coopérative augmente tous ses prix d'un dixième : chaque prix est multiplié par $1{,}1$. D'après la définition du produit par un réel :

$$1{,}1\,P = \begin{pmatrix} 13{,}2 \\ 27{,}5 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Une différence. La différence $R - Q$ compare les deux semaines :

$$R - Q = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un coefficient négatif signale une baisse : la deuxième semaine, Agadir a vendu 5 savons de moins.

Les règles de calcul

En clair. Que tu calcules $Q + R$ ou $R + Q$, le total des ventes est le même. Plus généralement, la somme et le produit par un réel suivent les règles de calcul des réels.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque coefficient d'une somme est une somme de deux réels. Les règles des réels s'appliquent donc à chaque place, une par une.

Propriété : Règles de calcul de la somme et du produit par un réel

Soit A, B, C trois matrices de même format et k, k' deux réels. Alors :

- $A + B = B + A$ et $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + O = A$ et $A + (-A) = O$;
- $k(A + B) = kA + kB$ et $(k + k')A = kA + k'A$;
- $k(k'A) = (kk')A$ et $1A = A$.

Démonstration

Étape 1. On note a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} les coefficients de A, B, C. Les deux membres de chaque égalité ont le format de A : d'après la définition de l'égalité, on compare leurs coefficients au même endroit.

Étape 2. D'après la définition de la somme, le coefficient de $A + B$ est $a_{ij} + b_{ij}$ et celui de $B + A$ est $b_{ij} + a_{ij}$. Ces deux réels sont égaux, car l'addition des réels est commutative.

Étape 3. D'après les définitions de la somme et du produit par un réel, le coefficient de $k(A + B)$ est $k(a_{ij} + b_{ij})$ et celui de $kA + kB$ est $k\,a_{ij} + k\,b_{ij}$. Ils sont égaux par distributivité dans $\mathbb{R}$.

Étape 4. Les autres égalités se ramènent de même à une règle sur les réels : associativité de l'addition, $a_{ij} + 0 = a_{ij}$, $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, $(k + k')a_{ij} = k\,a_{ij} + k'\,a_{ij}$, $k(k'a_{ij}) = (kk')a_{ij}$ et $1 \times a_{ij} = a_{ij}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer une égalité de matrices, on **compare les coefficients placés au même endroit**. Chaque coefficient est un réel : l'égalité se ramène à une règle de calcul sur les réels. Ici, ce sont la commutativité, l'associativité et la distributivité.

Retiens ce réflexe : une règle sur les matrices se vérifie coefficient par coefficient.

Vérifie : Une règle sur les réels

Dans la preuve, à quelle règle sur les réels se ramène l'égalité $A + B = B + A$?

A. À la distributivité : $k(a + b) = ka + kb$.
Faux.
La distributivité sert pour $k(A + B) = kA + kB$, pas ici.

B. À l'associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Faux.
Il n'y a ici que deux matrices, et leur ordre change : c'est une autre règle.

C. À aucune : c'est la définition de la somme.
Faux.
La définition donne $a_{ij} + b_{ij}$ d'un côté et $b_{ij} + a_{ij}$ de l'autre : il reste à les comparer.

D. À la commutativité : $a + b = b + a$.
Juste.

Juste : $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ à chaque place.

Correction
Le coefficient de $A + B$ est $a_{ij} + b_{ij}$, celui de $B + A$ est $b_{ij} + a_{ij}$. Ces deux réels sont égaux, car l'addition des réels est commutative.

Comme c'est vrai à chaque place, $A + B = B + A$.

Exemple : une règle vérifiée sur des nombres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc $3(A + B) = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.
- D'autre part, $3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ et $3B = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, donc $3A + 3B = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

On retrouve $3(A + B) = 3A + 3B$, comme l'annoncent les règles de calcul. Un exemple illustre une règle ; seule la preuve la démontre pour toutes les matrices.

Combinaisons, piège, à toi

Méthode : calculer une combinaison de matrices

Une **combinaison** de matrices est une expression comme $2A - 3B$: des produits par un réel, puis une somme ou une différence.

1. **Vérifie** que toutes les matrices ont le même format.
2. **Calcule** chaque produit par un réel, coefficient par coefficient.
3. **Additionne** ou soustrais les coefficients placés au même endroit.
4. **Contrôle** un ou deux coefficients en refaisant leur calcul d'un trait.

Exemple : une combinaison d'ordre 3

On considère les deux matrices carrées d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Produits par un réel. On calcule d'abord

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Différence. On soustrait ensuite, place par place :

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Contrôle. À la ligne 2 et à la colonne 3 : $2 \times 2 - 3 \times (-1) = 4 + 3 = 7$.

Attention : des formats différents

✗ « Le total des ventes et des prix est $Q + P$. »

✓ Cette somme n'existe pas : Q est carrée d'ordre 3, et P est une colonne à 3 lignes. On n'additionne que des matrices de même format. Ici, l'addition n'aurait d'ailleurs aucun sens : on n'ajoute pas des quantités à des prix.

Vérifie : Laquelle existe ?

Laquelle de ces sommes existe ?

A. $I_2 + I_3$

Faux.

I_2 est d'ordre 2 et I_3 d'ordre 3 : leurs formats diffèrent.

B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Juste.

Juste : deux matrices carrées d'ordre 2.

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Faux.

Une colonne à 2 lignes et une matrice carrée d'ordre 2 n'ont pas le même format.

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Faux.

Ces deux colonnes n'ont pas le même nombre de lignes.

Correction

Seule la somme de deux matrices carrées d'ordre 2 existe :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}.$$

Les trois autres mélangent des formats différents : deux ordres différents, une colonne et une matrice carrée, deux colonnes de longueurs différentes.

À toi : Deux combinaisons

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{pmatrix}$. Calcule $2A-B$, puis $-A+3B$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les deux matrices sont carrées d'ordre 2 : les combinaisons existent. Commence par les produits par un réel.

Indice 2

Calcule $2A$ et $3B$, puis additionne ou soustrais place par place.

Indice 3

Point délicat : $-A$ change le signe de **tous** les coefficients de A, et $-(-1)=1$.

Réponse

Formats. A et B sont carrées d'ordre 2 : les deux combinaisons existent.

Calcul de $2A-B$. On a $2A=\begin{pmatrix}2 & 8\\-4 & 0\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}2A-B&=\begin{pmatrix}2-3 & 8+1\\-4-5 & 0-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1 & 9\\-9 & -2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calcul de $-A+3B$. De même, $-A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}$ et $3B=\begin{pmatrix}9 & -3\\15 & 6\end{pmatrix}$, donc

$$-A+3B=\begin{pmatrix}8 & -7\\17 & 6\end{pmatrix}.$$

Conclusion. $2A-B=\begin{pmatrix}-1 & 9\\-9 & -2\end{pmatrix}$ et $-A+3B=\begin{pmatrix}8 & -7\\17 & 6\end{pmatrix}$.

Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Quantités fois prix

En clair. Reprends la recette de Rabat, en DH :

$$\begin{aligned}&20\times 12+10\times 25\\&\quad+5\times 40=690.\end{aligned}$$

Tu as pris la ligne de Rabat dans Q, et la colonne P des prix. Tu as multiplié terme à terme, le premier par le premier, et ainsi de suite. Puis tu as tout additionné.

Ce geste s'appelle la règle **ligne par colonne**.

Devine : La forme du résultat

On fait le même calcul pour chacune des trois boutiques. Quelle forme a le tableau des trois recettes obtenues ?

A. Une matrice carrée d'ordre 3.
Faux.
Chaque boutique donne un seul nombre : il n'y a pas neuf recettes.

B. Un seul nombre, la recette totale.
Faux.
On garde une recette par boutique, sans les additionner entre elles.

C. Une matrice colonne à 3 lignes.
Juste.
Juste : une recette par boutique, rangée dans l'ordre des lignes de Q.

D. Une matrice colonne à 9 lignes.
Faux.
Chaque ligne de Q donne un seul nombre : trois lignes, trois recettes.

Correction
Chaque ligne de Q, multipliée par la colonne P, donne un seul nombre : la recette d'une boutique.

Avec trois lignes, on obtient trois recettes, rangées en colonne dans l'ordre Rabat, Fès, Agadir. Le résultat est une matrice colonne à 3 lignes.

La règle ligne par colonne

Définition : Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Soit A une matrice carrée d'ordre n, de coefficients a_{ij}, et X une matrice colonne à n lignes, de coefficients x_1, x_2, ..., x_n. Le **produit** AX est la matrice colonne à n lignes dont le coefficient de la ligne i est

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

On multiplie terme à terme la ligne i de A par la colonne X, puis on additionne : c'est la règle **ligne par colonne**. Pour $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Exemple : les recettes des trois boutiques

Q est carrée d'ordre 3 et P a 3 lignes : le produit QP existe. D'après la règle ligne par colonne :

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 20\times 12+10\times 25+5\times 40 \\ 15\times 12+12\times 25+8\times 40 \\ 30\times 12+6\times 25+4\times 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 690 \\ 800 \\ 670 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un seul produit donne les trois recettes de la semaine, en DH : Fès arrive en tête.

Méthode : multiplier une matrice carrée par une colonne

1. **Vérifie** que la colonne a autant de lignes que l'ordre de la matrice carrée.
2. **Multiplie** terme à terme la ligne i de la matrice par la colonne.
3. **Additionne** ces produits : tu obtiens la ligne i du résultat.
4. **Range** les résultats dans une colonne, qui a autant de lignes que la colonne de départ.

Attention : le résultat est une colonne

✗ « QP est une matrice carrée d'ordre 3. »

✓ Une matrice carrée d'ordre 3 fois une colonne à 3 lignes donne une **colonne** à 3 lignes. De plus, une matrice d'ordre 3 ne se multiplie pas par une colonne à 2 lignes : ce produit n'existe pas. Vérifie toujours les formats avant de calculer.

D'autres ordres

Exemple : un produit d'ordre 2

La matrice est carrée d'ordre 2 et la colonne a 2 lignes : le produit existe. Ligne par colonne :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\times 5+(-1)\times 2 \\ 2\times 5+4\times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifie : Un produit d'ordre 3

Que vaut le produit suivant ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A. $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Juste.

Juste : $8 - 2 + 0 = 6$, $0 + 2 + 3 = 5$ et $4 + 0 + 2 = 6$.

B. $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Faux.

Tu as seulement multiplié la diagonale par la colonne : chaque ligne demande trois produits.

C. $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Faux.

Erreur de signe à la ligne 2 : $(-1) \times (-2) = 2$.

D. $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Faux.

Tu as multiplié les colonnes de la matrice, et non ses lignes, par la colonne.

Correction

Formats. La matrice est carrée d'ordre 3 et la colonne a 3 lignes : le produit existe.

Ligne par colonne.

- Ligne 1 : $2 \times 4 + 1 \times (-2) + 0 \times 1 = 6$.
- Ligne 2 : $0 \times 4 + (-1) \times (-2) + 3 \times 1 = 5$.
- Ligne 3 : $1 \times 4 + 0 \times (-2) + 2 \times 1 = 6$.

Conclusion. Le produit vaut $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exemple : un produit d'ordre 4

Avec beaucoup de zéros, un produit d'ordre 4 reste court. La matrice est d'ordre 4 et la colonne a 4 lignes : le produit existe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 2 \\ 3 + (-1) \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne ne garde que les produits dont le coefficient n'est pas nul.

À toi : Les recettes de la deuxième semaine

Avec la matrice R des ventes de la deuxième semaine et la colonne P des prix, calcule RP. Quelle boutique a le plus rapporté cette semaine-là ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
R est carrée d'ordre 3 et P a 3 lignes : applique la règle ligne par colonne.
Indice 2
Pour Rabat : $18 \times 12 + 14 \times 25 + 6 \times 40$.
Indice 3
Point délicat : multiplie le premier nombre de la ligne par le premier prix, le deuxième par le deuxième, et ainsi de suite.

Réponse
Formats. R est carrée d'ordre 3 et P a 3 lignes : le produit existe.

Ligne par colonne.

- ligne 1 : $18 \times 12 + 14 \times 25 + 6 \times 40 = 806$;
- ligne 2 : $20 \times 12 + 10 \times 25 + 7 \times 40 = 770$;
- ligne 3 : $25 \times 12 + 8 \times 25 + 5 \times 40 = 700$.

Donc

$$RP = \begin{pmatrix} 806 \\ 770 \\ 700 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. La deuxième semaine, Rabat a le plus rapporté : 806 DH.

Produit de deux matrices carrées

Plusieurs colonnes de prix à la fois

En clair. La gérante suit trois tarifs par produit : le prix au détail, le prix de gros et le coût de fabrication (données fictives). Elle les range côte à côte, une colonne par tarif :

$$T = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 7 \\ 25 & 20 & 15 \\ 40 & 32 & 22 \end{pmatrix}.$$

Multiplier Q par chaque colonne de T donnerait trois colonnes de montants. Le produit de deux matrices carrées fait ces trois calculs d'un coup.

Devine : Le bon calcul

Quel calcul donne le coût de fabrication total des articles vendus à Fès la première semaine ?

A. La ligne 3 de Q par la colonne 2 de T.

Faux.

La ligne 3 est celle d'Agadir, et la colonne 2 donne le prix de gros.

B. La ligne 2 de Q par la colonne 3 de T.

Juste.

Juste : Fès est la ligne 2 de Q, le coût est la colonne 3 de T.

C. La colonne 2 de Q par la ligne 3 de T.

Faux.

Une colonne de Q regroupe un produit, et non une boutique.

D. Le seul produit 8×22.

Faux.

Il faut les trois produits vendus à Fès, et pas seulement les paniers.

Correction

Fès est la ligne 2 de Q : $15, 12, 8$. Le coût de fabrication est la colonne 3 de T : $7, 15, 22$. Ligne par colonne :

$$\begin{aligned} &15 \times 7 + 12 \times 15 + 8 \times 22 \\ &= 105 + 180 + 176 \\ &= 461. \end{aligned}$$

Les articles vendus à Fès ont coûté 461 DH à fabriquer.

Produit de deux matrices carrées

Définition : Produit de deux matrices carrées

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n, de coefficients a_{ij} et b_{ij}. Le **produit** AB est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

c'est-à-dire le produit de la ligne i de A par la colonne j de B, selon la règle ligne par colonne. Autrement dit, la colonne j de AB est le produit de A par la colonne j de B.

Méthode : multiplier deux matrices carrées

1. **Vérifie** que les deux matrices ont le même ordre.
2. **Calcule** le coefficient de la ligne i et de la colonne j : la ligne i de la première matrice fois la colonne j de la seconde, terme à terme, puis la somme.
3. **Avance** colonne par colonne : chaque colonne du produit est la première matrice fois une colonne de la seconde.
4. **Garde** l'ordre des facteurs : AB et BA diffèrent en général.

Exemple : un produit d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, carrées d'ordre 2 : le produit AB existe. Ligne par colonne, coefficient par coefficient :

- ligne 1, colonne 1 : $2 \times 0 + 1 \times 5 = 5$;
- ligne 1, colonne 2 : $2 \times 4 + 1 \times (-2) = 6$;
- ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 0 + 3 \times 5 = 15$;
- ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 4 + 3 \times (-2) = -10$.

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}.$$

Exemple : les montants pour les trois tarifs

Q et T sont carrées d'ordre 3. D'après la définition du produit de deux matrices carrées :

$$QT = \begin{pmatrix} 690 & 560 & 400 \\ 800 & 646 & 461 \\ 670 & 548 & 388 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, à la ligne 1 et à la colonne 2 :

$$\begin{aligned} &20 \times 10 + 10 \times 20 \\ &\quad + 5 \times 32 = 560. \end{aligned}$$

La première colonne est QP, déjà calculée. À Fès, la semaine a rapporté 800 DH au détail, et sa fabrication a coûté 461 DH.

Deux pièges

Attention : ligne par colonne, jamais place par place

✗ « Avec les matrices de l'exemple d'ordre 2, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$: on multiplie les coefficients placés au même endroit. »

✓ Le coefficient de AB à la ligne i et à la colonne j combine **toute** la ligne i de A et **toute** la colonne j de B. On trouve $AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$. Seuls la somme et le produit par un réel se calculent place par place.

Vérifie : Un coefficient du produit

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Quel est le coefficient de AB à la ligne 2 et à la colonne 1 ?

A. 3

Faux.

Tu as multiplié les coefficients placés au même endroit : 3×1.

B. 7

Faux.

C'est le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 2 : $1 \times (-1) + 2 \times 4$.

C. -3

Faux.

C'est le coefficient de la ligne 2 et de la colonne 2 : $3 \times (-1) + 0 \times 4$.

D. 6

Juste.

Juste : $3 \times 2 + 0 \times 1 = 6$.

Correction

On multiplie la ligne 2 de A, formée de 3 et 0, par la colonne 1 de B, formée de 2 et 1 :
$3 \times 2 + 0 \times 1 = 6$.

Attention : l'ordre des facteurs compte

✗ « $AB = BA$, comme pour les réels. »

✓ Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont différentes : le produit n'est pas commutatif. Garde toujours l'ordre des facteurs.

La matrice unité

En clair. Pour les réels, $1 \times a = a \times 1 = a$. Parmi les matrices, I_n joue ce rôle : multiplier par I_n ne change rien.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque ligne et chaque colonne de I_n n'a qu'un coefficient égal à 1, les autres valent 0. Dans chaque somme ligne par colonne, tous les produits contiennent un 0 de I_n, sauf un.

Propriété : Rôle de la matrice unité

Soit A une matrice carrée d'ordre n et X une matrice colonne à n lignes. Alors

$$AI_n = I_nA = A \quad \text{et} \quad I_nX = X.$$

Démonstration

Étape 1. Par définition de la matrice unité, la colonne j de I_n n'a qu'un coefficient non nul, le 1 de la ligne j ; la ligne i de I_n, le 1 de la colonne i.

Étape 2. D'après la définition du produit de deux matrices carrées, le coefficient de AI_n à la ligne i et à la colonne j combine la ligne i de A et la colonne j de I_n. Tous les produits sont nuls, sauf peut-être $a_{ij} \times 1$: ce coefficient vaut a_{ij}.

Étape 3. De même, le coefficient de I_nA à cet endroit vaut $1 \times a_{ij} = a_{ij}$, et la ligne i de I_nX vaut $1 \times x_i = x_i$ (définition du produit par une matrice colonne).

Étape 4. Les coefficients sont égaux au même endroit : les matrices sont égales (définition de l'égalité).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste de la preuve : **repérer les zéros** avant de calculer. Dans la somme qui donne un coefficient de AI_n, tous les produits contiennent un 0 de I_n, sauf $a_{ij} \times 1$.

Il reste a_{ij}, le coefficient de A au même endroit. On conclut avec la définition de l'égalité de deux matrices.

Vérifie : L'argument clé

Dans la preuve, pourquoi le coefficient de AI_n à la ligne i et à la colonne j vaut-il a_{ij} ?

A. Parce que tous les produits de la somme contiennent un 0 de I_n, sauf $a_{ij} \times 1$.

Juste.

Juste : les autres produits sont nuls, et il reste $a_{ij} \times 1 = a_{ij}$.

B. Parce que tous les coefficients de I_n valent 1.

Faux.

Seuls les coefficients de la diagonale de I_n valent 1 ; les autres valent 0.

C. Parce que $AI_n = I_nA$, quelle que soit A.

Faux.

C'est une partie de la conclusion : on ne peut pas s'en servir pour la démontrer.

D. Parce qu'on multiplie les coefficients place par place.

Faux.

Le produit se calcule ligne par colonne, jamais place par place.

Correction

La colonne j de I_n a un 1 à la ligne j et des 0 ailleurs. Le coefficient cherché est donc la somme

$$a_{i1} \times 0 + \cdots + a_{ij} \times 1 + \cdots + a_{in} \times 0.$$

Tous les produits sont nuls, sauf peut-être $a_{ij} \times 1$. La somme vaut donc a_{ij}.

Exemple : **Exemple et contre-exemple**

Exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, chaque coefficient de AI_2 se calcule ligne par colonne :

- ligne 1 : $2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$ et $2 \times 0 + 1 \times 1 = 1$;
- ligne 2 : $(-1) \times 1 + 3 \times 0 = -1$ et $(-1) \times 0 + 3 \times 1 = 3$.

On retrouve $AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$.

Contre-exemple : un 1 par ligne ne suffit pas, il doit être sur la diagonale. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a aussi un seul 1 par ligne, mais hors de la diagonale. Avec elle :

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A sont échangées, et le résultat n'est pas A.

Un produit nul, puis à toi

Attention : **un produit nul sans facteur nul**

✗ « $AB = O$, donc $A = O$ ou $B = O$. »

✓ Cette règle des réels est fausse pour les matrices. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Chaque coefficient de AB vaut $1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$, ou $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$. Donc $AB = O$, alors que $A \neq O$ et $B \neq O$.

À toi : Comparer deux produits

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule AB et BA. Ces deux produits sont-ils égaux ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux matrices sont carrées d'ordre 2 : les deux produits existent. Applique la règle ligne par colonne.

Indice 2
Pour le coefficient de AB à la ligne 1 et à la colonne 2 : $3 \times 4 + 0 \times (-1)$.

Indice 3
Point délicat : dans BA, ce sont les lignes de B qui se multiplient par les colonnes de A.

Réponse
Formats. A et B sont carrées d'ordre 2 : les deux produits existent.

Calcul de AB. Ligne par colonne :

- ligne 1 : $3 \times 1 + 0 \times 2 = 3$ et $3 \times 4 + 0 \times (-1) = 12$;
- ligne 2 : $(-1) \times 1 + 2 \times 2 = 3$ et $(-1) \times 4 + 2 \times (-1) = -6$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Calcul de BA. De la même façon :

- ligne 1 : $1 \times 3 + 4 \times (-1) = -1$ et $1 \times 0 + 4 \times 2 = 8$;
- ligne 2 : $2 \times 3 + (-1) \times (-1) = 7$ et $2 \times 0 + (-1) \times 2 = -2$.

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion. À la ligne 1, colonne 1, on lit 3 dans AB et -1 dans BA : $AB \neq BA$, l'ordre des facteurs compte.

Règles de calcul du produit

Développer sans changer l'ordre

En clair. Sur deux semaines, les recettes s'obtiennent de deux façons :

- on additionne les ventes, puis on multiplie par les prix : $(Q + R)P$;

- ou bien on additionne les recettes des deux semaines : $QP + RP$.

Les deux calculs donnent la même colonne :

$$(Q+R)P = QP + RP = \begin{pmatrix} 1496 \\ 1570 \\ 1370 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque coefficient d'un produit est une somme de produits de réels. La distributivité des réels s'applique alors à chaque place.

Devine : Une hausse des prix

Tous les prix augmentent d'un dixième : la colonne des prix devient $1{,}1\,P$. Comment obtenir les nouvelles recettes de la première semaine, sans tout recalculer ?

A. En ajoutant $1{,}1$ à chaque recette de QP.
Faux.
Une hausse d'un dixième multiplie chaque prix ; elle n'ajoute pas $1{,}1$ DH.

B. En multipliant Q et P chacun par $1{,}1$.
Faux.
La hausse serait comptée deux fois : $1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$.

C. C'est impossible : il faut refaire tous les calculs.
Faux.
Une règle de calcul permet de sortir le réel $1{,}1$ du produit.

D. En multipliant chaque recette de QP par $1{,}1$.
Juste.
Juste : $Q(1{,}1\,P) = 1{,}1\,(QP)$.

Correction
D'après les règles de calcul du produit, le réel $1{,}1$ sort du produit : $Q(1{,}1\,P) = 1{,}1\,(QP)$.

Avec $QP = \begin{pmatrix} 690 \\ 800 \\ 670 \end{pmatrix}$, les nouvelles recettes valent, en DH :

$$1{,}1\,(QP) = \begin{pmatrix} 759 \\ 880 \\ 737 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $1{,}1 \times 690 = 759$.

Distributivité et produit par un réel

Propriété : Distributivité du produit et produit par un réel

Soit A, B, C trois matrices carrées de même ordre n et k un réel. Alors

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (B+C)A=BA+CA \quad \text{et} \quad (kA)B=A(kB)=k(AB).$$

Ces règles restent vraies avec des matrices colonnes X et Y à n lignes : $A(X+Y)=AX+AY$, $(B+C)X=BX+CX$ et $A(kX)=k(AX)$.

Démonstration

Étape 1. On compare les coefficients placés au même endroit (définition de l'égalité). D'après la définition du produit de deux matrices carrées, le coefficient de $A(B+C)$ à la ligne i et à la colonne j est

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})+\cdots+a_{in}(b_{nj}+c_{nj}).$$

Étape 2. On développe chaque terme par distributivité dans $\mathbb{R}$, puis on regroupe : on obtient $(a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj})+(a_{i1}c_{1j}+\cdots+a_{in}c_{nj})$. D'après la définition de la somme, c'est le coefficient de $AB+AC$ au même endroit, donc $A(B+C)=AB+AC$.

Étape 3. Le même calcul, à partir de $(b_{i1}+c_{i1})a_{1j}+\cdots+(b_{in}+c_{in})a_{nj}$, donne $(B+C)A=BA+CA$.

Étape 4. Le coefficient de $(kA)B$ est $k\,a_{i1}b_{1j}+\cdots+k\,a_{in}b_{nj}$: en mettant k en facteur, on obtient k fois celui de AB ; de même pour $A(kB)$. Avec des matrices colonnes, d'après la définition du produit par une matrice colonne, le calcul est identique, sur une seule colonne.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On **développe** chaque produit de réels, puis on **regroupe** les termes : on retrouve les coefficients de AB et de AC. Le facteur A reste à gauche du début à la fin.

Comme le produit n'est pas commutatif, l'égalité $(B+C)A=BA+CA$ demande son propre calcul.

Un réel k, lui, sort du produit : il se met en facteur dans chaque somme.

Vérifie : Deux égalités, deux calculs

Pourquoi la preuve établit-elle $(B+C)A=BA+CA$ par un calcul à part, au lieu de la déduire de $A(B+C)=AB+AC$?

A. Parce que $B+C$ n'existe pas toujours.

Faux.

B et C sont carrées de même ordre : leur somme existe.

B. Par prudence : les deux égalités se déduisent l'une de l'autre.

Faux.

Pour passer de l'une à l'autre, il faudrait échanger des facteurs, ce qui est interdit.

C. Parce que le produit n'est pas commutatif.

Juste.

Juste : $A(B+C)$ et $(B+C)A$ diffèrent en général.

D. Parce que la distributivité des réels est fausse.

Faux.

Elle est vraie ; c'est même l'argument de chaque calcul.

Correction

Pour déduire la seconde égalité de la première, il faudrait écrire $(B+C)A = A(B+C)$. C'est faux en général : le produit de matrices n'est pas commutatif.

La preuve refait donc le calcul, avec A à droite.

Exemple : un même calcul de deux façons

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, carrées d'ordre 2.

- D'abord la somme : $B + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, puis $A(B+C) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
- Ensuite les produits : $AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $AB + AC = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Les deux calculs donnent la même matrice, comme l'annonce la distributivité.

L'associativité, admise

En clair. Pour calculer ABX, tu peux d'abord calculer la colonne BX, puis $A(BX)$. Tu peux aussi calculer d'abord la matrice AB, puis $(AB)X$. L'énoncé suivant affirme que ces deux chemins mènent au même résultat.

Propriété : Associativité du produit

Soit A, B, C trois matrices carrées de même ordre n et X une matrice colonne à n lignes. Alors

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{et} \quad (AB)X = A(BX).$$

On peut donc écrire ABC et ABX sans parenthèses.

Remarque

Ce résultat est admis. Nous ne le démontrons pas dans ce cours, mais tu peux l'utiliser.

Vérifier sur un exemple, le coin devoir

Exemple : une vérification d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, puis $(AB)C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.
- $BC = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A(BC) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Les deux résultats sont égaux. Ce calcul illustre l'associativité sur un exemple ; il ne la démontre pas.

Vérifie : Le bon regroupement

Soit A, B, C trois matrices carrées de même ordre. Lequel de ces produits est toujours égal à $A(BC)$?

A. $(AB)C$

Juste.

Juste : seules les parenthèses bougent ; l'ordre A, B, C reste.

B. $(AC)B$

Faux.

B et C ont été échangées : l'ordre des facteurs a changé.

C. $(BA)C$

Faux.

A et B ont été échangées : l'ordre des facteurs a changé.

D. $A(CB)$

Faux.

Dans CB, B et C ont été échangées.

Correction

L'associativité permet de déplacer les parenthèses, jamais d'échanger les facteurs. Donc $A(BC) = (AB)C$. Les trois autres produits changent l'ordre de A, B, C : ils sont différents en général.

Remarque : Coin devoir : vérifier une règle sur un exemple

En devoir, une question peut demander de vérifier une égalité comme $A(B + C) = AB + AC$ sur des matrices données. Rédige ainsi :

« Les matrices A, B et C sont carrées d'ordre 2 : les sommes et les produits existent. D'une part, $B + C = \ldots$, donc $A(B + C) = \ldots$. D'autre part, $AB = \ldots$ et $AC = \ldots$, donc $AB + AC = \ldots$. Les deux matrices sont égales. »

Écris chaque produit ligne par colonne, et garde l'ordre des facteurs.

Écrire un système sous forme matricielle

Du problème au système

En clair. Au premier semestre, tu as résolu des systèmes de 2 à 4 équations par la méthode de Gauss, écrite sur les équations.

En voici un. L'atelier de la coopérative fabrique x savons, y bougies et z paniers. Il utilise tout son stock d'huile, de cire et de fibre (données fictives, en unités de stock) :

$$\begin{cases} 2x + y = 110 & (\text{huile}) \\ 3y + z = 100 & (\text{cire}) \\ x + y + 4z = 110 & (\text{fibre}) \end{cases}$$

Par exemple, un savon utilise 2 unités d'huile et 1 de fibre ; une bougie, 1 d'huile, 3 de cire et 1 de fibre ; un panier, 1 de cire et 4 de fibre.

Devine : La première ligne

On range les coefficients de ce système dans une matrice carrée : une ligne par équation, une colonne par inconnue. Quels nombres forment la première ligne ?

A. 2 et 1

Faux.
Il manque le coefficient de z : la matrice doit être carrée d'ordre 3.

B. 2, 1 et 110

Faux.
110 est le second membre : il ne fait pas partie des coefficients.

C. 2, 0 et 1

Faux.
L'ordre des inconnues est x, y, z : le 1 est le coefficient de y.

D. 2, 1 et 0

Juste.
Juste : 2 pour x, 1 pour y, 0 pour z, absent.

Correction
On range les inconnues dans l'ordre x, y, z. La première équation, $2x + y = 110$, ne contient pas z : son coefficient est 0.

La première ligne est donc formée de 2, 1 et 0. Le second membre 110 ira dans une colonne à part.

En clair. Calcule ligne par colonne le produit de la matrice des coefficients par la colonne des inconnues :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y + z \\ x + y + 4z \end{pmatrix}.$$

Tu retrouves les premiers membres du système.

Pourquoi est-ce vrai ? Le produit se calcule ligne par ligne, et deux colonnes sont égales quand leurs lignes le sont. Chaque ligne de l'égalité est donc une équation.

L'écriture AX = B

Propriété : Écriture matricielle d'un système

On considère un système de n équations linéaires à n inconnues x_1, ..., x_n ($2 \leq n \leq 4$), dont l'équation numéro i s'écrit

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

On note A la matrice carrée de coefficients a_{ij}, appelée **matrice du système**, X la matrice colonne des inconnues x_1, ..., x_n et B la matrice colonne des seconds membres b_1, ..., b_n. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la définition du produit d'une matrice carrée par une matrice colonne, AX est la matrice colonne à n lignes dont le coefficient de la ligne i est $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

Étape 2. AX et B sont deux colonnes à n lignes. D'après la définition de l'égalité de deux matrices, $AX = B$ équivaut à l'égalité des coefficients ligne par ligne : pour chaque i, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$.

Étape 3. Ces n égalités sont exactement les n équations du système. Donc $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution du système si et seulement si $AX = B$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve enchaîne deux définitions. Le **produit** AX donne, à chaque ligne, le premier membre d'une équation. L'**égalité** de deux colonnes se lit ligne par ligne.

Les n égalités obtenues sont exactement les n équations : le système et l'égalité $AX = B$ disent la même chose.

Vérifie : La définition qui découpe

Dans la preuve, quelle définition transforme l'égalité $AX = B$ en n équations ?

A. La définition de la somme de deux matrices.

Faux.

Aucune somme de matrices n'intervient dans cette preuve.

B. La définition de l'égalité de deux matrices.

Juste.

Juste : deux colonnes sont égales quand leurs lignes le sont, une par une.

C. La définition de la matrice unité.

Faux.

La matrice unité n'apparaît pas dans cette preuve.

D. La définition du produit de deux matrices carrées.

Faux.

X et B sont des colonnes : ce produit-là n'intervient pas.

Correction

Le produit par une colonne donne la ligne i de AX : $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$.

Ensuite, la définition de l'égalité de deux matrices dit que $AX = B$ équivaut à l'égalité de chaque ligne avec b_i. Ce sont les n équations.

Exemple : tester une proposition

Le système de l'atelier s'écrit $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Un employé propose $x = 45$, $y = 20$ et $z = 10$. Ligne par colonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 70 \\ 105 \end{pmatrix} \neq B.$$

La première contrainte est respectée, mais pas les deux autres : la proposition n'est pas solution. La section suivante trouve la bonne.

La méthode

Méthode : écrire un système sous la forme AX = B

1. **Range** les inconnues dans le même ordre dans chaque équation ; écris 0 pour une inconnue absente.
2. **Écris** la matrice A des coefficients, une ligne par équation, puis les colonnes X et B.
3. **Conclus** : le système s'écrit $AX = B$.
4. **Contrôle** en recalculant une ligne de AX.

Exemple : des inconnues dans le désordre

Le système

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 3y - x = 1 \\ z + y = 4 \end{cases}$$

s'écrit d'abord, dans l'ordre x, y, z : $x + 0y + 2z = 5$, $-x + 3y + 0z = 1$ et $0x + y + z = 4$. Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Contrôle de la ligne 2 : $-x + 3y + 0z = 3y - x$.

Exemple : de l'égalité au système

Dans l'autre sens, l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

donne, ligne par colonne, le système

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Un système d'ordre 4, puis à toi

Exemple : un système d'ordre 4

Le système

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 3 \\ 2x_2 = 4 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

a quatre inconnues. Avec des 0 pour les inconnues absentes, il s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

À toi : Écrire, puis vérifier

Écris sous la forme $AX = B$ le système suivant, d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ z - x = 2 \\ 3z + y = 15 \end{cases}$$

Vérifie ensuite, par un produit, que $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ est solution. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Range les inconnues dans l'ordre x, y, z, en écrivant 0 pour une inconnue absente.
Indice 2
La première ligne de A est formée de 2, 1 et 0.
Indice 3
Point délicat : dans $z - x = 2$, le coefficient de x est -1, et il se place en première colonne.

Réponse
Ordre des inconnues. Dans l'ordre x, y, z : $2x + y + 0z = 7$, $-x + 0y + z = 2$ et $0x + y + 3z = 15$.

Écriture matricielle. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Vérification. Ligne par colonne :

$$
\begin{aligned}
&A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4+3+0 \\ -2+0+4 \\ 0+3+12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}
$$

Conclusion. D'après l'écriture matricielle d'un système, $(2, 3, 4)$ est solution du système.

La méthode de Gauss sur la matrice augmentée

La matrice augmentée

En clair. Dans la méthode de Gauss, tu recopies sans cesse les lettres x, y, z et les signes $=$. Pourtant, seuls les nombres changent.

On les range donc dans un tableau : la matrice A, puis un trait vertical, puis la colonne B des seconds membres.

Devine : Lire une ligne

Ce tableau range un système d'inconnues x, y, z :

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)
$$

Quelle équation porte la troisième ligne ?

A. $4x - 3y = 1$

Faux.

Le 0 est en deuxième colonne : c'est y qui manque, et non z.

B. $4x - 3z = 1$

Juste.

Juste : 4 pour x, 0 pour y, -3 pour z.

C. $2x + y - 3z = 1$

Faux.

Tu as lu la troisième colonne, et non la troisième ligne.

D. $x - y + 2z = 3$

Faux.

C'est l'équation de la première ligne.

Correction

> La troisième ligne porte 4, 0 et -3, puis 1 après le trait. Les trois premiers nombres sont les coefficients de x, y, z, dans cet ordre ; le dernier est le second membre.
>
> On lit $4x + 0y - 3z = 1$, soit $4x - 3z = 1$.

Définition : Matrice augmentée, opérations élémentaires sur les lignes

On reprend le système $AX = B$ de n équations à n inconnues. Sa **matrice augmentée** est le tableau obtenu en plaçant la colonne B à droite de A, après un trait vertical. Pour $n = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

La ligne L_i de ce tableau porte les coefficients et le second membre de l'équation numéro i. Les **opérations élémentaires** sur les lignes sont :

- échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplier une ligne par un réel **non nul** k : $L_i \leftarrow kL_i$;
- ajouter à une ligne un multiple d'une **autre** ligne : $L_i \leftarrow L_i + kL_j$, avec $j \neq i$.

On écrit aussi $L_i \leftarrow aL_i + kL_j$, avec $a \neq 0$ et $j \neq i$: cette opération enchaîne deux opérations élémentaires, $L_i \leftarrow aL_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Exemple : le tableau de l'atelier

Le système de l'atelier a pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 110 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 4 & 110 \end{array}\right).$$

L'échange $L_1 \leftrightarrow L_3$ place en premier l'équation où x a le coefficient 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 110 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 2 & 1 & 0 & 110 \end{array}\right).$$

Rien n'est perdu : les trois équations sont toujours là, dans un autre ordre.

Le 1 placé en haut à gauche sera notre **pivot** : c'est le coefficient non nul qui sert à annuler les nombres situés sous lui, dans sa colonne.

Des systèmes équivalents

En clair. Au premier semestre, tu remplaçais déjà une équation par une combinaison d'équations. Les opérations élémentaires font la même chose sur les lignes du tableau.

Pourquoi est-ce vrai ? Une solution du système de départ vérifie encore chaque nouvelle équation : on ne perd aucune solution. Et chaque opération élémentaire peut être défaite par une autre : on n'en ajoute aucune.

Propriété : Opérations élémentaires et systèmes équivalents

Une opération élémentaire sur les lignes de la matrice augmentée d'un système donne la matrice augmentée d'un système qui a **les mêmes solutions**. On dit que les deux systèmes sont **équivalents**.

Démonstration

Étape 1. On note E_i l'équation numéro i. D'après la définition de la matrice augmentée, une opération sur les lignes est la même opération sur les équations. Les équations qu'elle ne modifie pas restent dans le nouveau système.

Étape 2. Échanger deux équations ne change pas la liste des égalités à vérifier.

Étape 3. Soit $k \neq 0$. Un n-uplet qui vérifie E_i vérifie kE_i, obtenue en multipliant les deux membres par k. Réciproquement, on revient de kE_i à E_i en multipliant par $\frac{1}{k}$.

Étape 4. Soit $j \neq i$: l'équation E_j est inchangée. Un n-uplet qui vérifie E_i et E_j vérifie $E_i + kE_j$. Réciproquement, s'il vérifie $E_i + kE_j$ et E_j, il vérifie E_i, retrouvée en retranchant kE_j. Dans les trois cas, les deux systèmes ont les mêmes solutions.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée de la preuve : **deux sens**. Une solution du système de départ vérifie les nouvelles équations ; réciproquement, **chaque opération peut être défaite**.

- Un échange se défait par le même échange.
- Une multiplication par k se défait par une multiplication par $\frac{1}{k}$, d'où l'exigence $k \neq 0$.
- L'ajout de kL_j se défait en retranchant kL_j, d'où l'exigence $j \neq i$: la ligne L_j doit rester intacte.

Vérifie : Une opération interdite

Pourquoi l'opération $L_2 \leftarrow 0L_2$ n'est-elle pas une opération élémentaire ?

A. Parce qu'elle change le second membre.
Faux.
Toute opération sur une ligne change son second membre : ce n'est pas le problème.

B. Parce que 0 n'est pas un réel.
Faux.

0 est un réel ; c'est le seul que l'on exclut ici.

C. Parce qu'on ne peut plus revenir en arrière.

Juste.

Juste : la ligne devient $0 = 0$; en multipliant cette égalité par un réel, on ne retrouve jamais l'équation 2.

D. Elle est permise, car elle simplifie la ligne.

Faux.

Elle efface l'équation 2 : une information du problème est perdue.

Correction

L'opération $L_2 \leftarrow 0L_2$ remplace l'équation 2 par $0 = 0$. Aucune opération ne permet ensuite de retrouver l'équation de départ, car on ne divise pas par 0.

Une contrainte du problème serait perdue. C'est pourquoi on exige $k \neq 0$.

Exemple : une opération, puis son retour

On part du système

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ transforme sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right).$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ ramène au tableau de départ.

Le nouveau système donne $-5y = -5$, donc $y = 1$, puis, avec la première ligne, $x = 4 - 2 = 2$. Contrôle dans le système de départ : $2 + 2 \times 1 = 4$ et $3 \times 2 + 1 = 7$.

Système triangulaire et remontée

En clair. Le but des opérations est d'obtenir des zéros sous la diagonale. La dernière équation n'a alors plus qu'une inconnue.

Pourquoi est-ce vrai ? En remontant, chaque équation n'apporte qu'une inconnue nouvelle, multipliée par un coefficient non nul. On la calcule par une division.

Propriété : Système triangulaire

Un système $AX = B$ est dit **triangulaire** lorsque tous les coefficients de A situés au-dessous de la diagonale sont nuls ($a_{ij} = 0$ dès que $i > j$). Si, de plus, les coefficients diagonaux a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} sont tous **non nuls**, le système a une **unique** solution. On la calcule en partant de la dernière équation et en remontant jusqu'à la première.

Démonstration

Étape 1. Le système est triangulaire : dans l'équation numéro i, les coefficients a_{ij} avec $j < i$ sont nuls. La dernière équation s'écrit donc $a_{nn}x_n = b_n$. Comme $a_{nn} \neq 0$, elle a une unique solution : $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$.

Étape 2. L'équation précédente s'écrit $a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$. La valeur de x_n est connue et $a_{n-1,n-1} \neq 0$: cette équation donne une unique valeur de x_{n-1}.

Étape 3. On continue en remontant : chaque équation ne contient qu'une inconnue nouvelle, de coefficient diagonal non nul, les suivantes étant déjà connues. Elle en donne une unique valeur.

Étape 4. On obtient un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ possible, et il vérifie toutes les équations par construction : c'est l'unique solution du système.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée de la preuve : **remonter** de la dernière équation à la première. À chaque étape, les inconnues déjà trouvées sont connues, et il reste une seule inconnue nouvelle. Son coefficient est un coefficient diagonal, non nul : on peut diviser. Chaque inconnue a donc une seule valeur possible.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « coefficients diagonaux non nuls » ?

A. À rendre le système triangulaire.

Faux.

Le système est triangulaire grâce aux zéros sous la diagonale, et non grâce à la diagonale.

B. À pouvoir échanger deux lignes.

Faux.

La preuve n'échange aucune ligne.

C. À rendre les seconds membres non nuls.

Faux.

Les seconds membres peuvent être nuls ; l'hypothèse porte sur A.

D. À pouvoir diviser pour isoler chaque inconnue.

Juste.

Juste : de $a_{nn}x_n = b_n$, on tire $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$.

Correction

À chaque étape de la remontée, l'inconnue nouvelle est multipliée par un coefficient diagonal. Pour l'isoler, on divise par ce coefficient : il ne doit pas être nul.

Par exemple, $a_{nn}x_n = b_n$ donne $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$, car $a_{nn} \neq 0$.

Sans cette hypothèse, la remontée échoue : l'équation $0 \times x_n = 1$ n'a aucune solution, et $0 \times x_n = 0$ en a une infinité.

Exemple : le système de l'atelier, résolu

On part du tableau de l'atelier après $L_1 \leftrightarrow L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 110 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 2 & 1 & 0 & 110 \end{array}\right).$$

Première colonne. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ annule le 2 placé sous le pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 110 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -8 & -110 \end{array}\right).$$

Deuxième colonne. L'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$ annule le -1 avec le 3 de la ligne 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 110 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -23 & -230 \end{array}\right).$$

L'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$ enchaîne deux opérations élémentaires : $L_3 \leftarrow 3L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. D'après la propriété des opérations élémentaires, ce système triangulaire a donc les mêmes solutions que celui de l'atelier.

Remontée. Les coefficients diagonaux, 1, 3 et -23, ne sont pas nuls. La dernière ligne donne $-23z = -230$, donc $z = 10$. Puis $3y + 10 = 100$, donc $y = 30$. Enfin $x + 30 + 40 = 110$, donc $x = 40$.

Contrôle. Dans le système de départ : $2 \times 40 + 30 = 110$, $3 \times 30 + 10 = 100$ et $40 + 30 + 4 \times 10 = 110$.

Conclusion. L'atelier fabrique 40 savons, 30 bougies et 10 paniers.

La méthode, puis à toi

Méthode : résoudre un système par Gauss sur la matrice

1. **Écris** la matrice augmentée du système.
2. **Choisis** un pivot non nul en haut de la première colonne ; échange deux lignes si besoin.

3. **Annule** les coefficients sous le pivot, par $L_i \leftarrow L_i + kL_1$. Si le coefficient à annuler n'est pas un multiple simple du pivot, utilise $L_i \leftarrow aL_i + kL_1$ avec $a \neq 0$: tu multiplies d'abord L_i par a, puis tu ajoutes kL_1.
4. **Recommence** avec la colonne suivante, sur les lignes du dessous, jusqu'à un tableau triangulaire.
5. **Remonte**, puis **vérifie** la solution dans le système de départ.

Attention : toute la ligne, second membre compris

Dans le tableau de l'atelier, après $L_1 \leftrightarrow L_3$:

✗ « Avec $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, la ligne 3 devient $0, -1, -8$, avec 110 après le trait. »

✓ L'opération porte sur **toute** la ligne : le second membre devient $110 - 2 \times 110 = -110$. On ne multiplie une ligne que par un réel non nul, et l'on ajoute le multiple d'une **autre** ligne. Note chaque opération à côté de la matrice, pour pouvoir la vérifier.

À toi : Un système d'ordre 4

Résous par la méthode de Gauss sur la matrice le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris la matrice augmentée, avec des 0 pour les inconnues absentes. Le pivot de la première colonne vaut 1.
Indice 2
Commence par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, puis annule le -2 de la deuxième colonne à l'aide de L_2.
Indice 3
Point délicat : chaque opération porte sur toute la ligne, second membre compris ; note-la à chaque fois.

Réponse
Matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Première colonne. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Deuxième colonne. $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Troisième colonne. Enfin, $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Remontée. Les coefficients diagonaux $1, 1, 1$ et -1 ne sont pas nuls. La dernière ligne donne $-x_4 = -3$, donc $x_4 = 3$. Puis $x_3 = 2 - 3 = -1$, $x_2 = 1 - (-1) = 2$ et $x_1 = 3 - 2 = 1$.

Contrôle. $1 + 2 = 3$; $1 + 4 - 1 = 4$; $-1 + 3 = 2$; $2 + 3 = 5$.

Conclusion. La solution du système est $(1, 2, -1, 3)$.

Résoudre un problème économique

Traduire une commande

En clair. Un client commande des savons, des bougies et des paniers à la coopérative (données fictives). Elle dispose de 80 boîtes, une par article, et veut toutes les employer.

Elle veut aussi dépenser exactement 870 DH de fabrication et 1500 minutes de travail. Voici le coût et la durée de fabrication d'un article.

Article	Coût (DH)	Durée (minutes)
Savon	7	10
Bougie	15	20
Panier	22	60

Combien d'articles de chaque sorte faut-il fabriquer ?

Devine : La contrainte du stock

On note x, y, z les nombres de savons, de bougies et de paniers. Quelle équation traduit la contrainte des boîtes ?

A. $x + y + z = 80$

Juste.

Juste : une boîte par article, et toutes les boîtes sont employées.

B. $7x + 15y + 22z = 80$

Faux.

Ces coefficients sont des coûts : ils servent à la contrainte du budget.

C. $xyz = 80$

Faux.

On compte des articles : on les additionne, on ne les multiplie pas.

D. $10x + 20y + 60z = 80$

Faux.

Ces coefficients sont des durées, et non des boîtes.

Correction

Chaque article utilise une boîte, et les 80 boîtes sont toutes employées : $x + y + z = 80$.

Les deux autres contraintes s'écrivent $7x + 15y + 22z = 870$ pour le coût, et $10x + 20y + 60z = 1500$ pour le temps.

Méthode : traduire une situation économique par des matrices

1. **Nomme** les inconnues et range-les dans une matrice colonne X.
2. **Range** les données dans un tableau : une ligne par contrainte (coût, temps, stock), une colonne par inconnue.
3. **Écris** le système $AX = B$, puis résous-le par la méthode de Gauss, en notant chaque opération.
4. **Interprète** la solution : unités, nombres entiers et positifs pour des quantités.

Résoudre et interpréter

Exemple : la commande sous forme matricielle

Dans l'ordre stock, coût, temps, les trois contraintes forment le système $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 15 & 22 \\ 10 & 20 & 60 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 80 \\ 870 \\ 1500 \end{pmatrix}.$$

Pour alléger les calculs, on applique $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{10} L_3$ à la matrice augmentée. La troisième équation devient $x + 2y + 6z = 150$.

Exemple : la résolution

On part de la matrice augmentée obtenue après $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{10} L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 7 & 15 & 22 & 870 \\ 1 & 2 & 6 & 150 \end{array}\right).$$

Première colonne. $L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 8 & 15 & 310 \\ 0 & 1 & 5 & 70 \end{array}\right).$$

Deuxième colonne. L'échange $L_2 \leftrightarrow L_3$ amène le pivot 1 en deuxième ligne, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 5 & 70 \\ 0 & 0 & -25 & -250 \end{array}\right).$$

Remontée. $-25z = -250$, donc $z = 10$; puis $y = 70 - 50 = 20$ et $x = 80 - 30 = 50$.

Contrôle. $50 + 20 + 10 = 80$, $7 \times 50 + 15 \times 20 + 22 \times 10 = 870$ et $10 \times 50 + 20 \times 20 + 60 \times 10 = 1500$.

Conclusion. La coopérative fabrique 50 savons, 20 bougies et 10 paniers.

Vérifie : Lire la solution

Avec la solution trouvée, combien de minutes de travail les paniers de la commande demandent-ils ?

A. 60 minutes

Faux.

C'est la durée d'un seul panier ; la commande en compte 10.

B. 1500 minutes

Faux.

C'est le temps de toute la commande, et pas seulement des paniers.

C. 600 minutes

Juste.

Juste : $10 \times 60 = 600$ minutes, soit 10 heures.

D. 220 minutes

Faux.
220 est le coût des paniers, en DH : 22×10.

Correction
La commande compte $z = 10$ paniers, et chacun demande 60 minutes : $10 \times 60 = 600$ minutes, soit 10 heures.

Les savons demandent 500 minutes et les bougies 400. Au total, $500 + 400 + 600 = 1500$ minutes, comme prévu.

Le coin devoir, puis à toi

Remarque : Coin devoir : rédiger un problème économique

En devoir, la rédaction compte autant que les calculs. Écris :

« Soit x, y et z les nombres de savons, de bougies et de paniers. Les contraintes donnent le système $AX = B$, avec $A = \ldots$ et $B = \ldots$. Par la méthode de Gauss, on trouve $x = 50$, $y = 20$ et $z = 10$. On vérifie ces valeurs dans les trois équations. »

Termine par une phrase en français, avec les unités.

À toi : Une autre commande

Pour une seconde commande, la coopérative emploie 60 boîtes, 650 DH de fabrication et 1200 minutes de travail, avec les mêmes coûts et les mêmes durées. Combien de savons, de bougies et de paniers fabrique-t-elle ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le système s'écrit $AX = B$ avec la même matrice A et $B = \begin{pmatrix} 60 \\ 650 \\ 1200 \end{pmatrix}$.

Indice 2
Applique $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{10} L_3$, puis les mêmes opérations que dans l'exemple.

Indice 3
Point délicat : chaque opération change aussi le second membre ; vérifie la solution dans les trois contraintes.

Réponse
Système. Le système s'écrit $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 60 \\ 650 \\ 1200 \end{pmatrix}$. Après $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{10} L_3$, la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 7 & 15 & 22 & 650 \\ 1 & 2 & 6 & 120 \end{array}\right).$$

Première colonne. $L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 8 & 15 & 230 \\ 0 & 1 & 5 & 60 \end{array}\right).$$

Deuxième colonne. $L_2 \leftrightarrow L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 5 & 60 \\ 0 & 0 & -25 & -250 \end{array}\right).$$

Remontée. $z = 10$, $y = 60 - 50 = 10$, $x = 60 - 20 = 40$.

Contrôle. $40 + 10 + 10 = 60$, $280 + 150 + 220 = 650$ et $400 + 200 + 600 = 1200$.

Conclusion. Elle fabrique 40 savons, 10 bougies et 10 paniers.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle règle pour quel calcul

- **Lire** une matrice : la ligne d'abord, la colonne ensuite. Deux matrices égales ont les mêmes coefficients aux mêmes places.
- **Additionner**, **multiplier par un réel** : place par place, entre matrices de même format.
- **Multiplier** une matrice carrée par une colonne, ou deux matrices carrées : ligne par colonne, après avoir vérifié les formats.
- **Développer** : distributivité, sans changer l'ordre des facteurs. AB et BA diffèrent en général.
- **Écrire** un système : $AX = B$, avec des 0 pour les inconnues absentes.
- **Résoudre** : matrice augmentée, opérations notées sur toute la ligne, tableau triangulaire, remontée, puis vérification.

Le mot du prof. Une matrice range des données ; le produit ligne par colonne calcule d'un coup des recettes ou des coûts.

Avant chaque calcul, vérifie les formats. Après chaque résolution, vérifie la solution dans le système de départ. Ces deux réflexes évitent bien des erreurs.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul matriciel » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)