BURHAN

Résumé : La symétrie centrale et le parallélogramme

1ère Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1ac/mathematiques/symetrie-centrale-et-parallelogramme/resume

Chapitre	Semestre
La symétrie centrale et le parallélogramme	Semestre 2

Le symétrique d'un point

À retenir : Une seule idée : le demi-tour autour du centre

Construire le symétrique d'un point par rapport à un point O, c'est faire un demi-tour autour de O.

Le point et son symétrique sont alignés avec le centre, et O se trouve toujours au milieu. Retiens ces deux mots : **alignés** et **milieu**.

Définition : Symétrique d'un point par rapport à un point

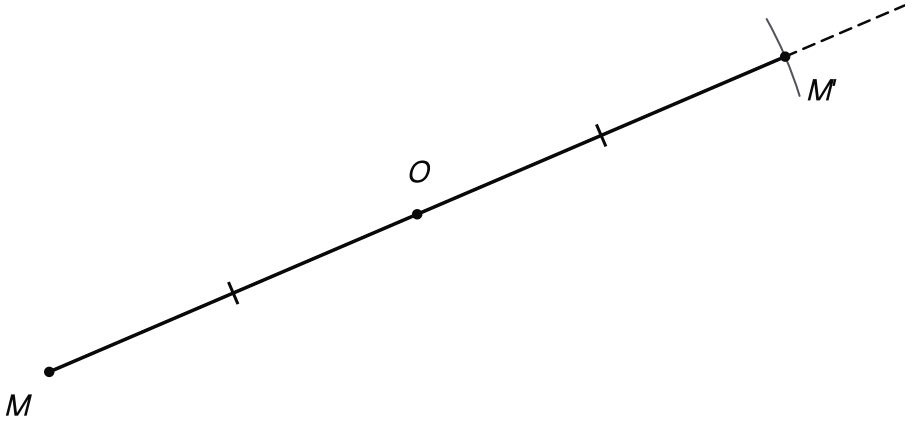
Soit O un point.

- Si M est un point différent de O, le **symétrique** de M par rapport à O est le point M' tel que O soit le **milieu** du segment $[MM']$.
- Le symétrique du point O par rapport à O est le point O lui-même.

On dit que M et M' sont **symétriques par rapport au point** O. Le point O est le **centre** de la symétrie.

Méthode : construire le symétrique d'un point

1. **Trace** la demi-droite qui part de M et passe par O.
2. **Ouvre** ton compas de la longueur OM, la pointe sur O.
3. **Reporte** cette longueur de l'autre côté de O, sur la demi-droite : tu obtiens M'.
4. **Contrôle** à la règle graduée que $OM' = OM$.
5. **Sur quadrillage**, compte le trajet de M jusqu'à O. Refais ensuite le même trajet en partant de O.



Règle et compas : M' se trouve sur la demi-droite [MO), au-delà de O, à la distance OM de O.

Exemple

Énoncé. On a $OM = 2{,}8$ cm. Construis M', puis calcule MM'.

Construction. Tu reportes $2{,}8$ cm de l'autre côté de O, sur la demi-droite $[MO)$. Ainsi $OM' = 2{,}8$ cm.

Calcul. Le point O est le milieu de $[MM']$. Donc $MM' = 2 \times 2{,}8 = 5{,}6$ cm.

Exemple

Énoncé. Sur ton cahier quadrillé, pour aller de P à O, on avance de 4 carreaux vers la gauche et de 1 carreau vers le haut.

Construction. À partir de O, refais le même trajet : 4 carreaux vers la gauche, puis 1 vers le haut. Tu arrives en P'.

Contrôle. De P à P', on compte 8 carreaux vers la gauche et 2 vers le haut. C'est deux fois le trajet de P à O.

Symétrique d'une figure ; ce qui se conserve

Définition **: Figures symétriques par rapport à un point**

Soit O un point et $\mathcal{F}$ une figure. La figure formée par les symétriques, par rapport à O, de **tous** les points de $\mathcal{F}$ est la **symétrique** de $\mathcal{F}$ par rapport à O.

On dit que les deux figures sont **symétriques par rapport au point** O. On obtient l'une à partir de l'autre par un **demi-tour** autour de O.

Méthode : construire le symétrique d'une figure

1. **Choisis** les points qui suffisent. Pour un segment, ses deux extrémités. Pour un angle, son sommet et un point sur chaque côté. Pour un cercle, son centre.
2. **Construis** seulement les symétriques de ces points.
3. **Trace** la figure symétrique avec ce qui se conserve : même longueur, même mesure, même rayon.
4. **Vérifie** une mesure à la règle ou au rapporteur.

Propriété : Symétrique d'un segment

Soit O un point. Si A' et B' sont les symétriques de A et B par rapport à O, alors :

- le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à O est le segment $[A'B']$;
- les deux segments ont la **même longueur** : $A'B' = AB$.

On dit que la symétrie centrale **conserve les longueurs**. Le symétrique du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

Propriété : Symétrique d'une droite et d'une demi-droite ; alignement

Soit O un point, A et B deux points distincts, et A', B' leurs symétriques par rapport à O.

- Le symétrique de la droite (AB) est la droite $(A'B')$, et ces deux droites sont **parallèles** : $(A'B') \parallel (AB)$. Si la droite (AB) passe par O, elle est sa propre symétrique.
- Le symétrique de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- Si trois points sont **alignés**, leurs symétriques sont alignés : la symétrie centrale **conserve l'alignement**.

Remarque : Des propriétés admises

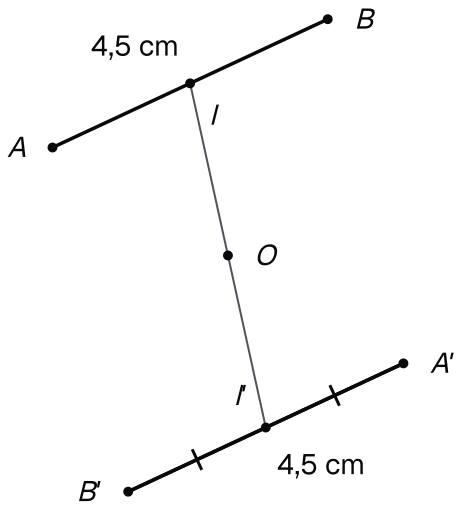
Ces propriétés sont admises. Tu les observes en mesurant sur ta figure, mais on ne les démontre pas cette année. Tu peux t'en servir dans un exercice, en les citant par leur nom.

Exemple

Énoncé. On a $AB = 4{,}5$ cm, et I est le milieu de $[AB]$. Les points A', B' et I' sont les symétriques de A, B et I par rapport à O.

Longueurs. Les longueurs se conservent : $A'B' = 4{,}5$ cm. Le point I' est le milieu de $[A'B']$, donc $A'I' = 2{,}25$ cm.

Droites. D'après la propriété du symétrique d'une droite, $(A'B') \parallel (AB)$.



Avec AB = 4,5 cm : le segment symétrique [A'B'] mesure aussi 4,5 cm, et I' coupe [A'B'] en deux.

Propriété : Symétrique d'un angle

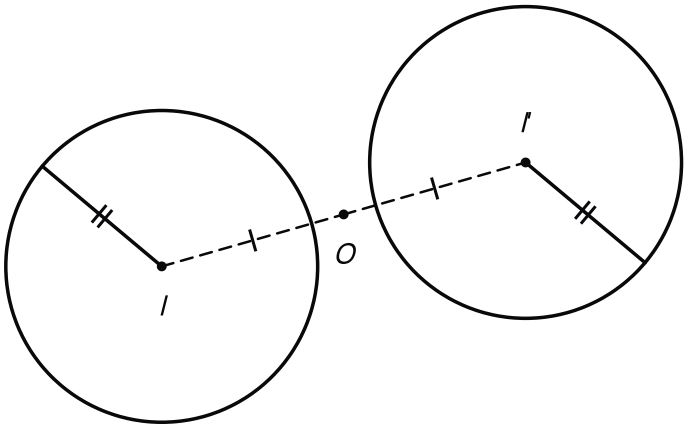
Soit O un point. Si A', B' et C' sont les symétriques de A, B et C par rapport à O, alors le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle $\widehat{A'B'C'}$, et ces deux angles ont la **même mesure** :

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

On dit que la symétrie centrale **conserve les mesures des angles**.

Propriété : Symétrique d'un cercle

Soit O un point et $\mathcal{C}$ un cercle de centre I et de rayon r. Le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à O est le cercle de centre I', symétrique de I par rapport à O, et de **même rayon** r.



Un cercle de centre I et son symétrique par rapport à O : un cercle de centre I' et de même rayon.

Propriété : Conservation des aires

Une figure et sa symétrique par rapport à un point ont la **même aire**. On dit que la symétrie centrale **conserve les aires**.

Plus généralement, une figure et sa symétrique sont **superposables** : on peut poser l'une exactement sur l'autre après un demi-tour.

Remarque : Encore des propriétés admises

Ces trois propriétés sont aussi admises. On les vérifie au rapporteur, au compas, ou en comptant les carreaux d'une surface. Dans une justification, cite-les par leur nom.

Exemple

Angle. Si $\widehat{EFG} = 38°$, le symétrique de cet angle par rapport à O mesure aussi $38°$: $\widehat{E'F'G'} = 38°$.

Cercle. Un cercle a pour centre K et pour rayon $1{,}8$ cm, avec $OK = 3$ cm. Son symétrique a pour centre K', avec $OK' = 3$ cm et $KK' = 6$ cm. Son rayon reste $1{,}8$ cm.

Aire. Une figure de $7{,}5$ cm² a une symétrique de $7{,}5$ cm².

Centre de symétrie d'une figure

Définition : Centre de symétrie d'une figure

On dit qu'un point O est un **centre de symétrie** d'une figure $\mathcal{F}$ lorsque la symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à O est la figure $\mathcal{F}$ elle-même.

Autrement dit, le symétrique de chaque point de $\mathcal{F}$ par rapport à O est encore un point de $\mathcal{F}$. Par exemple, le milieu d'un segment est un centre de symétrie de ce segment, et le centre d'un cercle est un centre de symétrie de ce cercle.

Exemple

Segment. Le segment $[EF]$ mesure 7 cm. Son centre de symétrie est son milieu, à $3{,}5$ cm de E.

Cercle. Le centre d'un cercle est un centre de symétrie de ce cercle.

Lettres et chiffres. Écrits en capitales d'imprimerie simples, les lettres N, Z, H et le chiffre 8 ont un centre de symétrie : fais faire un demi-tour à ton cahier, ils restent pareils.

Les lettres A, E et T n'en ont pas : après un demi-tour, elles sont à l'envers.

Le parallélogramme et ses diagonales

Définition : Parallélogramme

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les **côtés opposés sont parallèles** deux à deux.

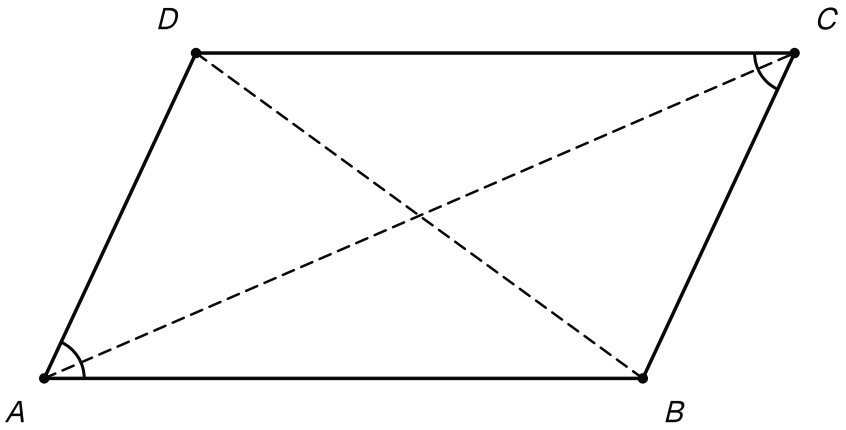
Le quadrilatère $ABCD$ est nommé en suivant ses sommets dans l'ordre. Ses côtés opposés sont $[AB]$ et $[CD]$, puis $[AD]$ et $[BC]$. Ses **diagonales** sont les segments $[AC]$ et $[BD]$. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Remarque : Les mots du parallélogramme

Dans le quadrilatère $ABCD$:

- deux côtés **opposés** n'ont aucun sommet commun, comme $[AB]$ et $[CD]$;
- deux angles **opposés** ont leurs sommets opposés, comme $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$;
- une **diagonale** relie deux sommets opposés : ici $[AC]$ et $[BD]$.

Un quadrilatère est **non croisé** quand ses côtés opposés ne se coupent pas.

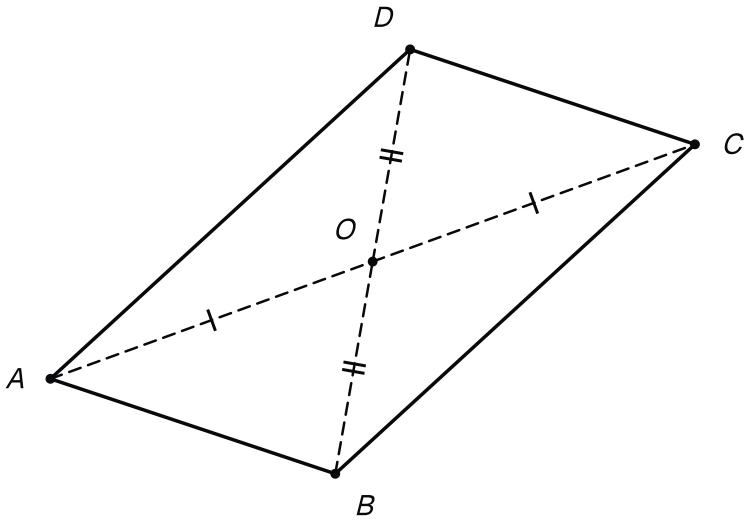


Le vocabulaire du parallélogramme ABCD : deux angles opposés en A et en C, et les diagonales en pointillés.

Théorème : Diagonales et centre de symétrie d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors :

- ses **diagonales** $[AC]$ et $[BD]$ **ont le même milieu** O ;
- ce point O est un **centre de symétrie** du parallélogramme.



Les diagonales [AC] et [BD] du parallélogramme ABCD se coupent en leur milieu commun O, centre de symétrie.

Exemple

Énoncé. $RSTU$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en O, avec $RT = 10$ cm et $SU = 7$ cm.

Milieu. D'après la propriété des diagonales d'un parallélogramme, O est le milieu de $[RT]$ et de $[SU]$. Donc $OR = OT = 5$ cm et $OS = OU = 3{,}5$ cm.

Symétrie. Le point O est un centre de symétrie : le symétrique de R par rapport à O est T.

Côtés et angles du parallélogramme

Théorème : Côtés opposés d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors ses **côtés opposés ont la même longueur** deux à deux :

$$AB = CD$$

et

$$AD = BC.$$

Théorème : Angles opposés d'un parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors ses **angles opposés ont la même mesure** deux à deux :

$$\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$$

et

$$\widehat{ABC} = \widehat{CDA}.$$

Méthode : trouver une longueur ou un angle

1. **Écris** la donnée : « $ABCD$ est un parallélogramme ».
2. **Cherche** sur la figure le côté ou l'angle opposé à celui que tu connais.
3. **Cite** la propriété utile : pour les côtés, la même longueur ; pour les angles, la même mesure ; pour les diagonales, le même milieu.
4. **Conclus** avec la valeur et son unité.

Exemple

Énoncé. $ABCD$ est un parallélogramme, avec $AB = 6{,}5$ cm, $AD = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 72°$.

Côtés. D'après la propriété des côtés opposés, $CD = 6{,}5$ cm et $BC = 4$ cm.

Angles. L'angle opposé à $\widehat{ABC}$ est $\widehat{CDA}$. Les angles opposés ont la même mesure, donc $\widehat{CDA} = 72°$.

Exemple

Énoncé. $EFGH$ est un parallélogramme, avec $\widehat{FEG} = 35°$ et $\widehat{EFG} = 68°$. Calcule $\widehat{EGF}$ et $\widehat{GHE}$.

Rappel. Au chapitre « Le triangle », tu as admis que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Triangle. Dans le triangle EFG, on retire les deux angles connus :

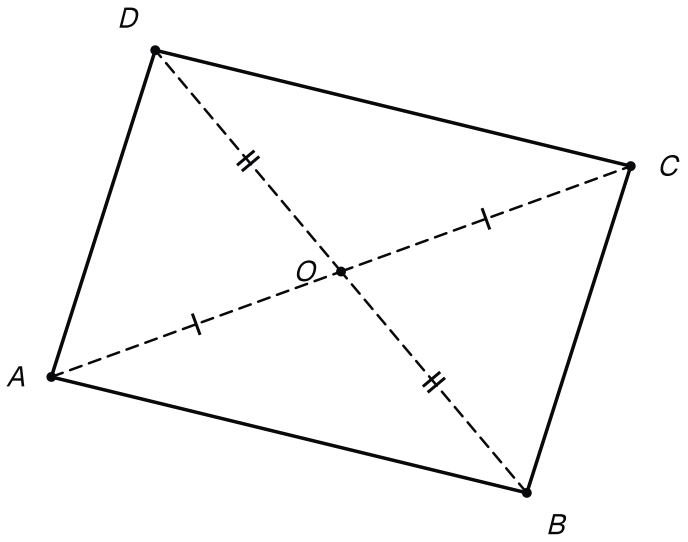
$$\begin{aligned}\widehat{EGF} &= 180° - 35° - 68° \\ &= 77°.\end{aligned}$$

Angle opposé. L'angle $\widehat{GHE}$ est opposé à $\widehat{EFG}$, donc $\widehat{GHE} = 68°$.

Reconnaître un parallélogramme

Théorème : Reconnaître un parallélogramme par ses diagonales

Si les **diagonales** d'un quadrilatère $ABCD$ **ont le même milieu**, alors $ABCD$ est un parallélogramme.



Un quadrilatère ABCD dont les diagonales partagent le même milieu O : c'est un parallélogramme.

Propriété : Reconnaître un parallélogramme par ses côtés

Soit $ABCD$ un quadrilatère **non croisé** : ses côtés opposés ne se coupent pas.

- Si ses **côtés opposés ont la même longueur** deux à deux, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si **deux côtés opposés** sont **parallèles et de même longueur**, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Ces deux propriétés sont admises.

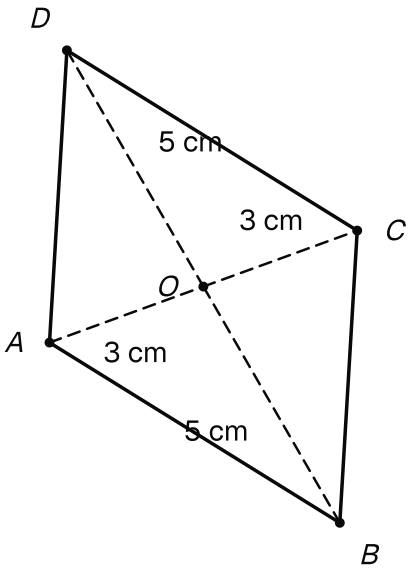
Méthode : prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1. **Relève** les données de l'énoncé : droites parallèles, longueurs égales, milieux.
2. **Choisis** une seule propriété qui va avec ces données :
   - côtés opposés parallèles deux à deux (la définition) ;
   - les deux diagonales ont le même milieu ;
   - les côtés opposés sont égaux deux à deux ;
   - une paire de côtés opposés est parallèle et de même longueur.
3. **Vérifie** que le quadrilatère est non croisé si tu utilises les côtés.
4. **Écris** ce que tu sais, puis la propriété, puis la conclusion.
5. **Rédige** ainsi : « On sait que… Or, si…, alors… Donc… ».

Exemple

Énoncé. Les diagonales de $ABCD$ se coupent en O, avec $OA = OC = 3$ cm et $OB = OD = 5$ cm.

Rédaction. On sait que O est à la fois le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$. Or, si un quadrilatère a ses deux diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.



Les demi-diagonales de l'exemple : OA = OC = 3 cm et OB = OD = 5 cm.

Exemple

Énoncé. $EFGH$ est un quadrilatère non croisé, avec $EF = GH = 5$ cm et $FG = HE = 3$ cm.

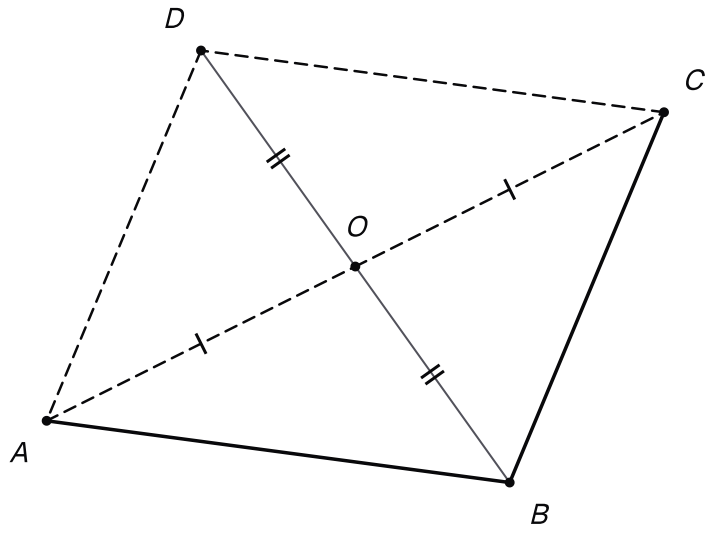
Rédaction. On sait que les côtés opposés de $EFGH$ ont deux à deux la même longueur. Or, si un quadrilatère non croisé vérifie cela, alors c'est un parallélogramme. Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Construire un parallélogramme

Méthode : placer le quatrième sommet

On connaît trois sommets A, B et C du parallélogramme $ABCD$.

1. **Trace** la diagonale $[AC]$ et place son milieu O.
2. **Construis** le symétrique de B par rapport à O : c'est le point D.
3. **Justifie** : O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, donc les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu.
4. **Contrôle** à la règle que $AD = BC$ et $CD = AB$.



Trois sommets connus : on prend le milieu O de [AC], puis le symétrique D de B par rapport à O.

Exemple

Énoncé. On donne $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $\widehat{ABC} = 50°$. Place D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Figure. Trace $[BA]$ de 4 cm. Au rapporteur, trace en B un angle de $50°$, puis place C sur son autre côté, à 6 cm de B.

Quatrième sommet. Place le milieu O de $[AC]$, puis le symétrique D de B par rapport à O.

Contrôle. Tu dois mesurer $AD = 6$ cm, $CD = 4$ cm et $\widehat{CDA} = 50°$.

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Construire un symétrique** : le centre est le milieu ; compas, ou trajet de carreaux.
- **Trouver une mesure** : longueurs, angles, rayons et aires se conservent.
- **Centre de symétrie** : le symétrique de chaque point reste sur la figure.
- **Utiliser un parallélogramme** : diagonales de même milieu ; côtés opposés de même longueur ; pour les angles opposés, même mesure.
- **Prouver un parallélogramme** : choisis une propriété.
  - Côtés opposés parallèles deux à deux.
  - Diagonales de même milieu.
  - Quadrilatère non croisé et côtés opposés égaux deux à deux.
  - Quadrilatère non croisé et une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur.
- **Placer le quatrième sommet** : symétrique d'un sommet par rapport au milieu d'une diagonale.

Erreurs à éviter

Attention : Un point, pas une droite : on ne plie pas

Pour le symétrique par rapport à une droite, tu plies la feuille, comme au primaire. Par rapport à un point, on ne plie pas : on fait un demi-tour autour du centre. Une flèche qui monte vers la droite devient une flèche qui descend vers la gauche.

Attention : Alignés ne suffit pas

Les points M, O et N sont alignés, avec O entre M et N. Mais $OM = 2$ cm et $ON = 2{,}5$ cm.

Donc O n'est pas le milieu de $[MN]$, et N n'est pas le symétrique de M par rapport à O. Il faut deux conditions : alignés, et à la même distance du centre.

Attention : Côté ou diagonale ?

Dans le parallélogramme $MNPQ$, les sommets se suivent dans l'ordre M, N, P, Q. Les diagonales sont donc $[MP]$ et $[NQ]$.

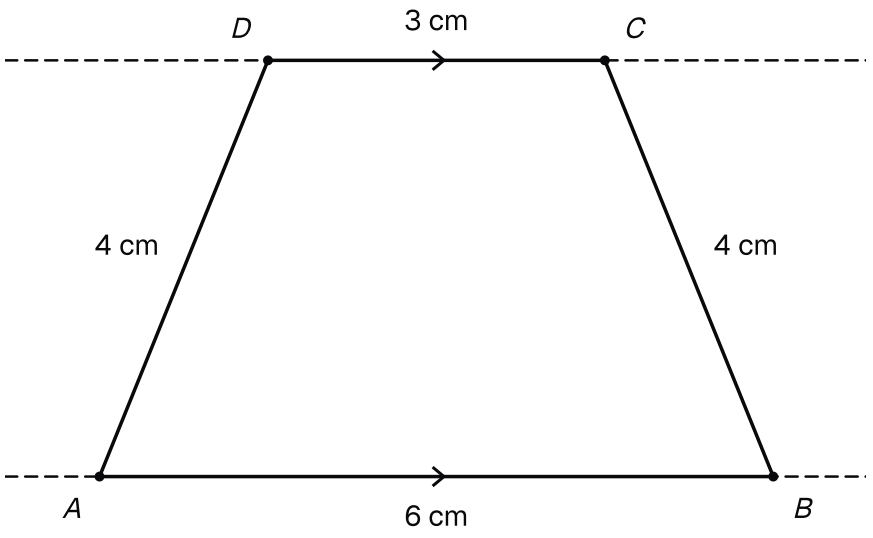
Le segment $[MN]$ est un côté : son milieu n'est pas le centre de symétrie du parallélogramme.

Attention : Deux conditions sur la même paire de côtés

Un trapèze $ABCD$ a $(AB) \parallel (CD)$, avec $AB = 6$ cm et $CD = 3$ cm. Ses côtés $[AD]$ et $[BC]$ mesurent tous les deux 4 cm.

Pourtant, ce n'est pas un parallélogramme, car $AB \neq CD$. Une paire de côtés parallèles et une autre paire de côtés égaux ne suffisent pas.

Il faut deux paires de côtés opposés égaux, ou une **même** paire de côtés opposés parallèles **et** égaux.

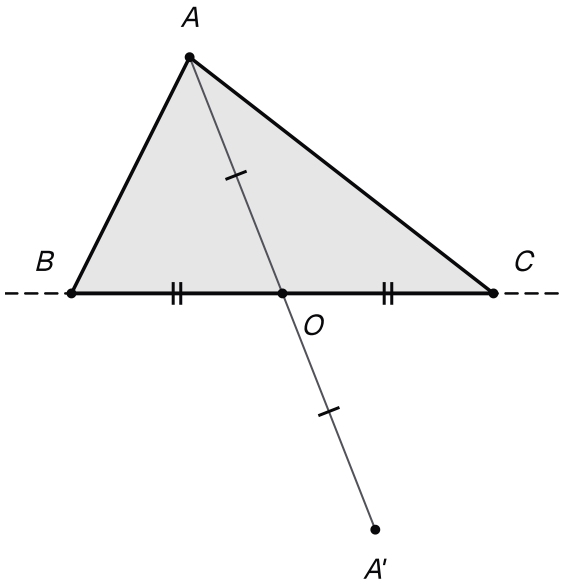


Un trapèze de bases 6 cm et 3 cm, avec AD = BC = 4 cm : pas un parallélogramme, car AB et CD diffèrent.

Attention : Un triangle n'a pas de centre de symétrie

Un triangle n'a aucun centre de symétrie. Essaie avec le milieu d'un côté : le symétrique du troisième sommet arrive hors du triangle.

Pour dire qu'un point est un centre de symétrie, il faut que le symétrique de **chaque** point de la figure soit sur la figure. Pour dire non, un seul point dont le symétrique sort de la figure suffit.



Le demi-tour autour du milieu O de [BC] envoie le sommet A en A', sous la droite (BC) : hors du triangle.

À retenir : Rédiger en devoir

Cite toujours la propriété que tu utilises, par son nom.

Pour une construction, dis pourquoi elle est juste : « O est le milieu de $[MM']$ ». Pour une justification, écris trois temps : on sait que, or, donc.

Termine par une phrase qui répond à la question.